

Структура мод плавно-нерегулярного интегрально-оптического четырехслойного трехмерного волновода

А.А.Егоров, Л.А.Севастьянов

Рассмотрены асимптотический метод и метод связанных волн, используемые в качестве методов исследования интегрально-оптического многослойного трехмерного волновода, удовлетворяющего условию плавного изменения эффективного показателя преломления. Аналитически описаны трехмерные поля плавно деформирующихся мод четырехслойного интегрально-оптического волновода. Получены явные зависимости вкладов первого порядка малости в амплитуды электрического и магнитного полей квазिवолноводных мод. Представлен канонический для асимптотического метода вид квазиволновых уравнений, описывающих структуру квази-ТЕ- и квази-ТМ-мод в плавно-нерегулярном четырехслойном интегрально-оптическом трехмерном волноводе. С помощью теории возмущений в явном виде получены сдвиги комплексных постоянных распространения для этих мод. Разработанная теория применима для анализа аналогичных структур из диэлектрических, магнитных и метаматериалов в достаточно широком диапазоне длин электромагнитных волн.

Ключевые слова: интегральная оптика, моды волновода, плавные трехмерные нерегулярности, асимптотический метод, квазиволновые уравнения, обобщенная линза Люнеберга, связанные волны.

1. Введение

Направляемые моды, распространяющиеся вдоль регулярного участка интегрально-оптического волновода, являются независимыми: они не обмениваются энергией между собой и с окружающей волноводной средой [1, 2]. На участке волновода с плавными нерегулярностями показателей преломления слоев или их толщин направляемая волноводная мода испытывает возмущение. Эту слабо возмущенную моду можно рассматривать как квазиволноводную моду. Она характеризуется тем, что в поперечном сечении волновода волна является стоячей, и число узлов (нулей) напряженности электромагнитного поля при волноводном распространении моды остается неизменным. Квазиволноводные моды могут обмениваться энергией между собой и с окружающей средой [2–18]. Поскольку эта энергия составляет малую часть энергии, переносимой отдельными модами, для исследования плавно-нерегулярных волноводов можно использовать приближенные методы (см., напр., [3–10]).

Для эффективной передачи энергии через различные элементы сопряжения (линзы, разветвители, призмы, мультиплексоры) необходимо учесть векторный характер полей на всех этапах решения электродинамической задачи распространения плоской монохроматической световой волны в планарной многослойной интегрально-оптической структуре. Эффективность сопряжения, как известно, сильно зависит от согласования полей до и после элемента сопряжения [2, 7–13, 16–18].

Как показывает анализ таких процессов [2–17, 19–21], моды плавно-нерегулярного участка волновода являются слабо гибридными квази-ТЕ- и квази-ТМ-модами [9, 13, 16, 17, 21]. Удержание в граничных условиях и в решении квазиволновых уравнений слагаемых, пропорциональных градиенту диэлектрической проницаемости, позволяет учесть векторный характер распространения монохроматического электромагнитного поля вдоль плавно-нерегулярных участков многослойного многомодового интегрально-оптического волновода [2, 8–10, 13, 16, 17, 21]. Заметим, что векторное рассеяние волноводной моды в статистически нерегулярном волноводе рассмотрено достаточно подробно в работах [8–10, 13, 21], в том числе и при наличии шума [15].

В разд.2 настоящей статьи обсуждаются особенности распространения монохроматических электромагнитных волн в плавно-нерегулярном четырехслойном интегрально-оптическом трехмерном волноводе. Отмечено, что граничные условия «связывают» две моды такого волновода с различными линейными поляризациями в одну гибридную моду. Физической причиной различия между ТЕ- и ТМ-модами в регулярном планарном волноводе является зависимость коэффициента отражения плоской волны от поляризации [2, 9]. В плавно-нерегулярной части трехмерного волновода при наклонном падении волн (на границы раздела сред, образующих волновод) происходит перемешивание поляризаций, и линейно поляризованная мода становится гибридной. В основу рассмотрения нами положен метод коротковолновых асимптотик [4, 6], в котором решение U представляется в виде некоторого асимптотического ряда: $U \sim \sum_m u_m/k_0^m$, где члены ряда пропорциональны $k_0^{-m} = (2\pi/\lambda_0)^{-m}$; λ_0 – длина волны монохроматического света в вакууме; k_0 – модуль волнового вектора \mathbf{k}_0 . В видимом диапазоне длин волн $\lambda_0 \rightarrow 0$ ($k_0 \rightarrow \infty$), что позволяет использовать решение в виде конечного асимптотиче-

А.А.Егоров. Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: yegorov@kapella.gpi.ru
Л.А.Севастьянов. Российский университет дружбы народов, Россия, 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6; e-mail: sevast@sci.pfu.edu.ru

Поступила в редакцию 22 августа 2008 г., после доработки – 22 октября 2008 г.

ского ряда, известного как адиабатическое приближение [4, 6, 16, 17, 22].

В разд.3 показано, что учет адиабатичности квази-волноводной моды в плавно-нерегулярном четырехслойном трехмерном волноводе приводит к квазиволновым уравнениям, которые в нулевом и первом приближениях решены асимптотическим методом. В обоих случаях приведена структура компонент поля мод. Представлен канонический для асимптотического метода вид квазиволновых уравнений.

Анализ квази-ТМ- и квази-ТЕ-мод в плавно-нерегулярном четырехслойном интегрально-оптическом трехмерном волноводе проведен в разд.4. С помощью теории возмущений в явном виде получены сдвиги комплексных постоянных распространения (спектральных чисел) для слабосвязанных квази-ТЕ- и квази-ТМ-мод. Установлено, что эти сдвиги являются мнимыми и различны для разных мод. Отметим, что развитие векторной трехмерной теории волноводного распространения и рассеяния света является одной из актуальных задач современной интегральной оптики и волноводной оптоэлектроники [8–10, 12–21]. Действительно, применение скалярного двумерного волнового уравнения [1–5, 9, 16] при переходе в субмикронный и тем более в нанометровый диапазон линейных размеров ограничивает возможности решения задач анализа и синтеза элементов интегральных оптических устройств [17].

Главной целью нашего исследования является решение поставленной в данной работе электродинамической трехмерной задачи, а также анализ полученных квазиволновых уравнений и аналитических выражений для полей деформирующихся мод четырехслойного плавно-нерегулярного интегрально-оптического трехмерного волновода как в нулевом, так и в первом приближении асимптотического метода.

2. Постановка задачи. Общий анализ проблемы

Нами исследовались плавно-нерегулярные интегрально-оптические трехмерные структуры, содержащие регулярные (волновод) и нерегулярные (типа обобщенной волноводной линзы Люнеберга) участки (рис.1). К плавным «нерегулярностям» относятся устройства сопряжения, широко используемые для связи различных элементов интегрально-оптического процессора, а также, например, такие элементы оптических интегральных схем, как призмы и линзы на основе пленок [5, 11, 17, 18]. К последним относится, в частности, тонкопленочная волноводная обобщенная линза Люнеберга [5, 17]. Требование к точности расчета параметров аналогичной волноводной линзы при переходе в нанометровый диапазон сильно возрастает в связи с наличием ограничений, обусловленных дифракционными эффектами [2, 5, 17]. От последних во многом зависит разрешение спектроанализатора.

Схожие проблемы существуют при сопряжении различных элементов одной оптической интегральной схемы. В частности в интегрально-оптическом ВЧ спектроанализаторе существует проблема сопряжения лазерного пучка с волноводом, а в оптических системах передачи информации необходимо соединять оптические волокна как с источниками излучения, так и с детекторами сигналов.

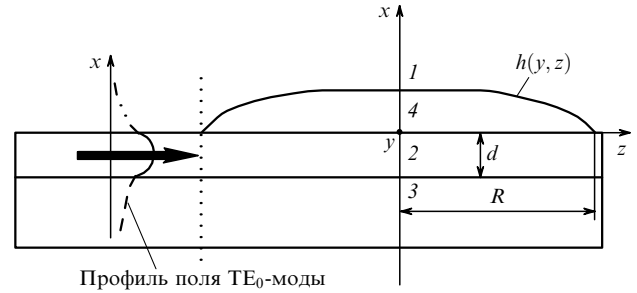


Рис.1. Поперечное сечение рассматриваемой трехмерной интегрально-оптической структуры, образованной обрамляющей средой (покрывной слой – воздух) с показателем преломления n_c (1), первым волноводным слоем (регулярная часть структуры) с показателем преломления n_r (2), подложкой с показателем преломления n_s (3) и тонкопленочной волноводной линзой Люнеберга (нерегулярная часть структуры) с показателем преломления n_L (второй волноводный слой) (4); $h(y, z)$ – толщина слоя, образующего линзу Люнеберга; R – радиус апертуры линзы; d – толщина регулярной части волноводной интегрально-оптической структуры. Направление распространения ТЕ₀-моды показано жирной стрелкой.

Для успешного осуществления эффективной передачи энергии через трехмерные плавно-нерегулярные элементы многослойной оптической интегральной схемы необходимо учитывать векторный характер полей на всех этапах решения электродинамической задачи о распространении световой волны [2, 8–10, 16, 17].

Уравнения Максвелла для непоглощающей неоднородной изотропной среды в системе СИ в отсутствие источников можно записать в следующем виде:

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} = \varepsilon \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = -\mu \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial t}, \quad (1)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ – диэлектрическая проницаемость среды; $\mu = \mu_r \mu_0$ – магнитная проницаемость среды; ε_r, μ_r – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно; ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные соответственно; $\omega \sqrt{\mu \varepsilon} = nk_0$; n – показатель преломления среды (слоя); $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/c$ – модуль волнового вектора \mathbf{k}_0 ; λ_0 – длина волны монохроматического света в вакууме; c – скорость света в вакууме; $\omega = 2\pi f$; f – частота электромагнитного поля; \mathbf{E}, \mathbf{H} – векторы напряженностей электрического и магнитного полей; символ тильда над векторами полей отражает их комплексный характер.

В регулярном четырехслойном волноводе толщина второго волноводящего слоя $h(y, z) = \text{const}$, и поля собственных мод, распространяющихся вдоль оси z , имеют следующий вид [1, 16]:

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z; t) = \mathbf{A} \exp(i\omega t) \exp(-ik_x x) \exp(-ik_z z), \quad (2)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(x, y, z; t) = \mathbf{B} \exp(i\omega t) \exp(-ik_x x) \exp(-ik_z z),$$

причем для ТЕ-мод $\mathbf{A} = (0, A_y, 0)^t$ и $\mathbf{B} = (B_x, 0, B_z)^t$, а для ТМ-мод $\mathbf{A} = (A_x, 0, A_z)^t$ и $\mathbf{B} = (0, B_y, 0)^t$, где $(*, *, *)^t$ – столбец, транспонированный к строке $(*, *, *)$. Между компонентами мод выполняются следующие соотношения [1, 16]: для ТЕ-мод $B_x = (-\beta/\mu)A_y$, $B_z = (i/k_0\mu) \times dA_y/dx$; для ТМ-мод $A_x = (\beta/\varepsilon)B_y$, $A_z = (-i/k_0\varepsilon) \times dB_y/dx$, где $\beta = k_z/k_0$ – коэффициент фазового замедления моды (эффективный показатель преломления волновода).

В плавно-нерегулярном четырехслойном трехмерном волноводе (см. рис.1) толщина второго волноведущего слоя непостоянна, $h(y, z) \neq \text{const}$, так что $\partial h/\partial y \neq 0$, $\partial h/\partial z \neq 0$, но при этом предполагается, что $|\partial h/\partial y|$, $|\partial h/\partial z| \ll 1$.

На регулярном участке четырехслойного волновода вдоль оси z распространяется ТЕ- или ТМ-мода (2). Граница раздела $x = h(y, z) = \text{const}$ волноводного слоя и воздуха на регулярном участке горизонтальна, и в любой точке $(h(y, z), y, z)^t$ касательная к ней плоскость совпадает с плоскостью yz . Тангенциальные граничные условия $H_z|_{h-0} = H_z|_{h+0}$, $E_y|_{h-0} = E_y|_{h+0}$ и $E_z|_{h-0} = E_z|_{h+0}$, $H_y|_{h-0} = H_y|_{h+0}$ выполняются по отдельности для обеих мод.

На поверхности раздела $x = h(y, z)$ трехмерного нерегулярного участка волновода в точке $(h(y, z), y, z)^t$ касательная плоскость в общем случае не совпадает с горизонтальной плоскостью yz . При этом тангенциальные граничные условия $E_\tau|_{h-0} = E_\tau|_{h+0}$, $H_\tau|_{h-0} = H_\tau|_{h+0}$ в общем случае не выполняются раздельно для ТЕ- и ТМ-мод. Таким образом, именно граничные условия связывают две первоначально независимые волноводные моды в одну слабосвязанную гибридную моду. Связь является слабой в силу оценки $|\partial h/\partial y|, |\partial h/\partial z| \ll 1$.

В работе [5] для тонкопленочной волноводной линзы Люнеберга, являющейся примером изучаемых нами плавно-нерегулярных интегральных волноводных структур, Саутвеллом получены дисперсионные соотношения в приближении, когда «наклонные» тангенциальные граничные условия заменялись их проекциями на горизонтальную плоскость, т. е. полученное в [5] решение было двумерным. Учет условий $|\partial h/\partial y| \neq 0$, $|\partial h/\partial z| \neq 0$ вносит в соотношения Саутвелла малую поправку по параметру δ , где $\delta = \max |\nabla_{y,z} \beta| (k_0 \beta^2)^{-1}$ (это двумерный аналог величины $|\nabla \varepsilon/\varepsilon|$).

Этот подход отражает возникновение в волноводе с трёхмерными плавными нерегулярностями гибридных мод, имеющих шесть компонент поля (см. разд. 3, 4), а не три, как ТЕ- и ТМ-моды [1–13]. Для гибридных мод условия $\partial E/\partial y \equiv 0$, $\partial H/\partial y \equiv 0$ [1, 2, 9] не выполняются, т. е. существуют вариации полей в направлении оси y .

Волновод, у которого показатель преломления зависит от всех трех координат, $n = n(x, y, z)$, уже не обладает трансляционной инвариантностью по z , позволяющей в отсутствие источников получить решение с разделяющимися переменными [9]. В последнем случае для анализа распространения мод вдоль оси z может использоваться полная ортогональная система направляемых мод и мод излучения регулярного волновода, что приводит к уравнениям связанных мод [2, 7–13].

3. Квазиволновые уравнения для адиабатических мод плавно-нерегулярного четырехслойного трехмерного волновода

3.1. Асимптотический метод решения квазиволновых уравнений

При анализе распространения поляризованного монохроматического электромагнитного поля в многослойном интегрально-оптическом трехмерном волноводе с плавно изменяющимися толщинами слоев было использовано сочетание асимптотического метода коротковолновых асимптотик [22] и модифицированного ме-

тогда усреднения [23] (см. Приложение 1). В результате получаем три самостоятельных задачи:

- нелинейное уравнение, связывающее фазу $\varphi(y, z)$ и ее частные производные $\partial \varphi/\partial y$ и $\partial \varphi/\partial z$ с профилем толщины волноводного слоя $h(y, z)$ и его частными производными $\partial h/\partial y$ и $\partial h/\partial z$, обобщающее дисперсионное соотношение для регулярного волновода;

- обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка для амплитуд $E(x)$ и $H(x)$ с малыми ($\sim \delta$) правыми частями, задающими взаимодействие между ними;

- интегральные уравнения вида П.1.4, где интегрирование в выражениях для электромагнитного поля $\vec{E}(x; y, z)$, $\vec{H}(x; y, z)$ производится по лучам, являющимся решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{ds} \left(\beta \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \frac{d}{ds} \left(\beta \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial \beta}{\partial z}.$$

Наш метод решения поставленной электродинамической задачи имеет пять преимуществ:

- полученное решение удовлетворяет уравнениям Максвелла;

- нет необходимости решать проблему поиска ортогонального базиса;

- в каждой точке горизонтальной плоскости (y, z) вертикальное распределение электромагнитного поля вычисляется изолированно, независимо от переменных (y, z) , однако решения в двух близлежащих точках связаны параметрически через $\beta(y, z)$;

- дисперсионное соотношение решается изолированно от других факторов искомого решения уравнений Максвелла;

- полученное решение $\beta(y, z)$ дисперсионного соотношения позволяет изолированно вычислить лучи и волновые фронты в горизонтальной плоскости, после чего интегрированием вдоль лучей можно определить запаздывание фазы $\varphi(y, z)$.

Отметим, что в данном случае неприменим как метод Фурье разделения переменных, используемый для регулярных волноводов [1, 2], так и метод разложения по полной системе направляемых мод и мод излучения регулярного двумерного волновода [2, 7–13], поскольку постоянная распространения здесь комплексная и существует проблема ортогональности соответствующих мод [9, 13, 15, 19].

Итак, решения уравнений Максвелла (1) ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z; t) &= \vec{E}(x; y, z) \exp(i\omega t) \\ &\times \exp \left[-ik_0 \int_{y_0, z_0}^{y, z} \beta(y', z') ds(y', z') \right] [\beta(y, z)]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(x, y, z; t) &= \vec{H}(x; y, z) \exp(i\omega t) \\ &\times \exp \left[-ik_0 \int_{y_0, z_0}^{y, z} \beta(y', z') ds(y', z') \right] [\beta(y, z)]^{-1/2}, \end{aligned}$$

где $ds = (dy^2 + dz^2)^{1/2}$ – элемент длины луча.

Метод решения трех самостоятельных задач является итерационным по параметру малости δ и состоит из следующих этапов*:

- решаем в нулевом приближении волновые уравнения для $E_y(x; y, z)$ и $H_y(x; y, z)$ для ТЕ- и ТМ-мод соответственно в подобластях однородности сред (см. ниже (7));
- подставляем решения в граничные условия (нулевого порядка малости по δ) и получаем дисперсионные соотношения для ТЕ- и ТМ- мод нулевого порядка – алгебраические трансцендентные уравнения для β ;
- решаем уравнения лучей в нулевом приближении;
- интегрируем фазы вдоль лучей и выписываем полные решения (в нулевом приближении по δ).

После этого следует повторить все этапы для соответствующих уравнений в первом приближении по δ . Уравнения дисперсионных соотношений для ТЕ- и ТМ- мод в этом цикле являются нелинейными дифференциальными уравнениями первого порядка в частных производных. Квазиволновые уравнения для $E_y(x; y, z)$ и $H_y(x; y, z)$ в первом приближении оказываются связанными. Все это значительно усложняет цикл вычислений электромагнитных полей в первом приближении.

В данной работе основное внимание уделяется анализу зависимости компонент электромагнитного поля от аргумента x . Распишем векторные уравнения Максвелла по компонентам и построим определенные линейные комбинации из дифференциальных выражений от них (см. Приложение 2). Полученные в Приложении 2 соотношения (П2.8–П2.11) сокращаем на общий множитель, не равный тождественно нулю. В результате получаем выражения для компонент поля $E_x(x; y, z)$, $E_y(x; y, z)$ и $H_y(x; y, z)$, $H_x(x; y, z)$:

$$\begin{aligned} H_y &= \chi_z^{-2} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(-i\beta \frac{\partial s}{\partial y} \right) - \beta^2 \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial y} \right] H_z - i\epsilon\omega \frac{dE_z}{dx} \right\}, \\ H_x &= \chi_z^{-2} \left[\left(-i\beta \frac{\partial s}{\partial z} \right) \frac{dH_z}{dx} + i\epsilon\omega\beta \frac{\partial s}{\partial y} E_z \right], \\ E_y &= \chi_z^{-2} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(-i\beta \frac{\partial s}{\partial y} \right) - \beta^2 \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial y} \right] E_z + i\mu\omega \frac{dH_z}{dx} \right\}, \\ E_x &= \chi_z^{-2} \left[\left(-i\beta \frac{\partial s}{\partial z} \right) \frac{dE_z}{dx} - i\mu\omega\beta \frac{\partial s}{\partial y} H_z \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Для компонент $E_z(x; y, z)$, $H_z(x; y, z)$ получаем следующие квазиволновые уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_z}{dx^2} + \chi_z^2 E_z &= - \left(p_y p_y + \frac{\partial p_y}{\partial y} - p_y \chi_z^2 \frac{\partial \chi_z^{-2}}{\partial y} \right) E_z \\ &- \frac{i}{\omega\epsilon} \left(\frac{\partial p_y}{\partial z} - \frac{\partial p_z}{\partial y} + p_z \chi_z^{-2} \frac{\partial \chi_z^2}{\partial y} \right) \frac{dH_z}{dx}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_z}{dx^2} + \chi_z^2 H_z &= - \left(p_y p_y + \frac{\partial p_y}{\partial y} - p_y \chi_z^2 \frac{\partial \chi_z^{-2}}{\partial y} \right) H_z \\ &+ \frac{i}{\omega\mu} \left(\frac{\partial p_y}{\partial z} - \frac{\partial p_z}{\partial y} + p_z \chi_z^{-2} \frac{\partial \chi_z^2}{\partial y} \right) \frac{dE_z}{dx}. \end{aligned} \quad (6)$$

С помощью обозначений $\chi_z^2 = k_0^2 \epsilon \mu + p_z p_z + \partial p_z / \partial z$, $p_y = -ik_0 \beta \partial s / \partial y - (2\beta)^{-1} \partial \beta / \partial y$, $p_z = -ik_0 \beta \partial s / \partial z - (2\beta)^{-1} \times \partial \beta / \partial z$, использованных в (4)–(6), производные от напряженностей E_i выражаются следующим образом: $\partial E_i / \partial y = p_y E_i$, $\partial^2 E_i / \partial y^2 = (p_y p_y + \partial p_y / \partial y) E_i$, $\partial E_i / \partial z = p_z E_i$, $\partial^2 E_i / \partial z^2 = (p_z p_z + \partial p_z / \partial z) E_i$. Производные от напряженностей H_i выражаются аналогично.

В каждой из областей I_j ($j = 1, 2, 3, 4$) с постоянными ϵ и μ ,

$$I_1 = \{(x, y, z) : x \in [h(y, z), +\infty); y, z \in (-\infty, +\infty)\},$$

$$I_2 = \{(x, y, z) : x \in [-d, 0]; y, z \in (-\infty, +\infty)\}, \quad (7)$$

$$I_3 = \{(x, y, z) : x \in (-\infty, -d]; y, z \in (-\infty, +\infty)\},$$

$$I_4 = \{(x, y, z) : x \in [0, h(y, z)]; y, z \in (-\infty, +\infty)\},$$

уравнения для зависимости продольных компонент $E_z(x; y, z)$, $H_z(x; y, z)$ от x имеют следующий вид:

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + \chi_j^2 E_z = \frac{i}{\omega\epsilon_j} \left(\frac{\partial p_z}{\partial y} - \frac{\partial p_y}{\partial z} \right) \frac{dH_z}{dx}, \quad (8)$$

$$\frac{d^2 H_z}{dx^2} + \chi_j^2 H_z = \frac{i}{\omega\mu_j} \left(\frac{\partial p_y}{\partial z} - \frac{\partial p_z}{\partial y} \right) \frac{dE_z}{dx}. \quad (9)$$

Здесь $\chi_j^2 = \chi^2|_{I_j}$ – значения χ^2 в области I_j (см. (7)); $\chi^2 = \chi_z^2 + p_y p_y + \partial p_y / \partial y$. Представим χ^2 в виде суммы слагаемых нулевого, первого и второго порядков малости по δ :

$$\chi^2 = (\chi^2)^{(0)} + (\chi^2)^{(1)} + (\chi^2)^{(2)},$$

где

$$(\chi^2)^{(0)} = k_0^2 (\epsilon \mu - \beta^2);$$

$$(\chi^2)^{(1)} = ik_0 \left(\frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)$$

$$- ik_0 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\beta \frac{\partial s}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\beta \frac{\partial s}{\partial z} \right) \right]; \quad (10)$$

$$(\chi^2)^{(2)} = \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)^2 \right] (4\beta)^{-1}$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} (2\beta)^{-1} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} (2\beta)^{-1} \right) \right].$$

Выражения в скобках в правых частях уравнений (8), (9) также можно представить в виде суммы слагаемых первого и второго порядков малости по δ :

$$\frac{\partial p_y}{\partial z} - \frac{\partial p_z}{\partial y} = p^{(1)} + p^{(2)},$$

где

*Подробный анализ всех этих задач выходит за рамки данной статьи и будет дан в одной из следующих работ.

$$p^{(1)} = ik_0 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\beta \frac{\partial s}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\beta \frac{\partial s}{\partial y} \right) \right]; \tag{11}$$

$$p^{(2)} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} / 2\beta \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} / 2\beta \right).$$

Уравнения (8), (9) будем решать асимптотическим методом [24], для чего представим поля в виде асимптотических (по δ) рядов:

$$E_z(x) = \sum_{m=0}^{\infty} E_z^m(x) \delta^m, \quad H_z(x) = \sum_{m=0}^{\infty} H_z^m(x) \delta^m, \tag{12}$$

где m , как правило, ограничено сверху: $m \ll \infty$.

3.2. Нулевое приближение квазиволновых уравнений

В каждой из указанных в (7) однородных областей $I_1 - I_4$ уравнения (8), (9) принимают в нулевом приближении (по порядку малости δ) более простой вид волновых уравнений

$$\frac{d^2 E_z^{(0)}}{dx^2} + k_0^2 (\varepsilon_j \mu_j - \beta^2) E_z^{(0)} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{d^2 H_z^{(0)}}{dx^2} + k_0^2 (\varepsilon_j \mu_j - \beta^2) H_z^{(0)} = 0, \tag{14}$$

где $\varepsilon_1 \mu_1 = n_c^2$; $\varepsilon_2 \mu_2 = n_f^2$; $\varepsilon_3 \mu_3 = n_s^2$; $\varepsilon_4 \mu_4 = n_L^2$. Следовательно,

$$\chi_s^2 = k_0^2 (n_s^2 - \beta^2) = -\gamma_s^2 < 0, \quad \chi_f^2 = k_0^2 (n_f^2 - \beta^2) > 0,$$

$$\chi_L^2 = k_0^2 (n_L^2 - \beta^2) > 0, \quad \chi_c^2 = k_0^2 (n_c^2 - \beta^2) = -\gamma_c^2 < 0.$$

Для величин E_x, E_y, H_y, H_x в нулевом приближении справедливы выражения

$$E_x^{(0)} = \frac{1}{(\chi_z^2)^{(0)}} \left(-i\beta \frac{\partial s}{\partial z} \frac{dE_z^{(0)}}{dx} - i\omega\mu\beta \frac{\partial s}{\partial y} H_z^{(0)} \right), \tag{15}$$

$$H_y^{(0)} = \frac{1}{(\chi_z^2)^{(0)}} \left(-\beta^2 \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial z} H_z^{(0)} - i\omega\varepsilon \frac{dE_z^{(0)}}{dx} \right),$$

$$H_x^{(0)} = \frac{1}{(\chi_z^2)^{(0)}} \left(-i\beta \frac{\partial s}{\partial z} \frac{dH_z^{(0)}}{dx} + i\omega\varepsilon\beta \frac{\partial s}{\partial y} E_z^{(0)} \right), \tag{16}$$

$$E_y^{(0)} = \frac{1}{(\chi_z^2)^{(0)}} \left(-\beta^2 \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial z} E_z^{(0)} + i\omega\mu \frac{dH_z^{(0)}}{dx} \right).$$

Решения уравнений (13), (14) для компонент E_z, H_z (с учетом граничных условий $|H_z|, |E_z| < \infty$ в области I_3 при $x \rightarrow -\infty$ и $|H_z|, |E_z| < \infty$ в области I_1 при $x \rightarrow \infty$) таковы:

$$E_s^{(0)}(x) = A_s \exp(\gamma_s x), \quad x \in (-\infty, -d],$$

$$E_f^{(0)}(x) = A_f^+ \exp(i\chi_f x) + A_f^- \exp(-i\chi_f x), \quad x \in [-d, 0], \tag{17}$$

$$E_L^{(0)}(x) = A_L^+ \exp(i\chi_L x) + A_L^- \exp(-i\chi_L x), \quad x \in [0, h],$$

$$E_c^{(0)}(x) = A_c \exp(-\gamma_c x), \quad x \in [h, \infty),$$

$$H_s^{(0)}(x) = B_s \exp(\gamma_s x), \quad x \in (-\infty, -d],$$

$$H_f^{(0)}(x) = B_f^+ \exp(i\chi_f x) + B_f^- \exp(-i\chi_f x), \quad x \in [-d, 0], \tag{18}$$

$$H_L^{(0)}(x) = B_L^+ \exp(i\chi_L x) + B_L^- \exp(-i\chi_L x), \quad x \in [0, h],$$

$$H_c^{(0)}(x) = B_c \exp(-\gamma_c x), \quad x \in [h, \infty).$$

Таким образом, согласно (2) ТЕ-мода имеет следующую структуру компонент электромагнитного поля: $E_z^{(0)} = 0, H_y^{(0)} = 0, E_x^{(0)} = 0, H_z^{(0)} \neq 0, H_x^{(0)} \neq 0, E_y^{(0)} \neq 0$; явные выражения для них даны соотношениями (16), (18). Для ТМ-моды $H_z^{(0)} = 0, H_x^{(0)} = 0, E_y^{(0)} = 0, E_z^{(0)} \neq 0, H_y^{(0)} \neq 0, E_x^{(0)} \neq 0$ (согласно (2)); явные выражения для этих компонент даны соотношениями (15), (17).

3.3. Первое приближение квазиволновых уравнений

Для вкладов первого порядка малости по δ в амплитуды (12) получаем по правилам асимптотического метода систему уравнений с малым параметром в правой части:

$$\frac{d^2 E_z^{(1)}}{dx^2} + k_0^2 (\varepsilon\mu - \beta^2) E_z^{(1)} = f_1 E_z^{(0)} + \frac{f_2}{\varepsilon} \frac{dH_z^{(0)}}{dx}, \tag{19}$$

$$\frac{d^2 H_z^{(1)}}{dx^2} + k_0^2 (\varepsilon\mu - \beta^2) H_z^{(1)} = -f_1 H_z^{(0)} - \frac{f_2}{\mu} \frac{dE_z^{(0)}}{dx}, \tag{20}$$

где

$$f_1 = ik_0\beta \left(\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right); \quad f_2 = \frac{k_0}{\omega} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial y} \right).$$

Подставив в (19), (20) выражения для амплитуд полей из (17), (18), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_z^{(1)}}{dx^2} + \chi_j^2 E_z^{(1)} &= f_1 [A_j^+ \exp(i\chi_j x) + A_j^- \exp(-i\chi_j x)] \\ &+ i\chi_j \frac{f_2}{\varepsilon} [B_j^+ \exp(i\chi_j x) - B_j^- \exp(-i\chi_j x)], \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_z^{(1)}}{dx^2} + \chi_j^2 H_z^{(1)} &= -f_1 [B_j^+ \exp(i\chi_j x) + B_j^- \exp(-i\chi_j x)] \\ &- i\chi_j \frac{f_2}{\mu} [A_j^+ \exp(i\chi_j x) - A_j^- \exp(-i\chi_j x)]. \end{aligned} \tag{22}$$

После группировки подобных членов система принимает канонический для асимптотического метода вид:

$$\frac{d^2 E_z^{(1)}}{dx^2} + \chi_j^2 E_z^{(1)} = C_{j1}^+ \exp(i\chi_j x) + C_{j1}^- \exp(-i\chi_j x), \tag{23}$$

$$\frac{d^2 H_z^{(1)}}{dx^2} + \chi_j^2 H_z^{(1)} = D_{j1}^+ \exp(i\chi_j x) + D_{j1}^- \exp(-i\chi_j x). \tag{24}$$

Поскольку левые и правые части уравнений (23), (24) периодичны с одной «частотой» χ_j , то решения этих уравнений отражают возникновение резонансных явлений в исследуемой системе. В силу первого порядка малости f_1 и f_2 , следующего из (10), (11), как (19), (20), так и вытекающие из них уравнения являются слабосвязанными.

Решение уравнений (23), (24) имеет вид

$$E_z^{(1)}(x) = x[C_{j1}^+ \exp(i\chi_j x) - C_{j1}^- \exp(-i\chi_j x)](2i\chi_j)^{-1}, \quad (25)$$

$$H_z^{(1)}(x) = x[D_{j1}^+ \exp(i\chi_j x) - D_{j1}^- \exp(-i\chi_j x)](2i\chi_j)^{-1}. \quad (26)$$

Множитель x в резонансных слагаемых не нарушает регулярности решения, т. к. его линейный рост подавляется при $x \rightarrow \pm\infty$ экспоненциально убывающим множителем (см. подробнее в [24]).

Из сравнения выражений (23)–(26) следуют равенства

$$C_{j1}^+ = A_j^+ f_1 + B_j^+(i\chi_j f_2/\varepsilon), \quad C_{j1}^- = A_j^- f_1 - B_j^-(i\chi_j f_2/\varepsilon) \quad (27)$$

$$D_{j1}^+ = -B_j^+ f_1 - A_j^+(i\chi_j f_2/\mu), \quad D_{j1}^- = -B_j^- f_1 + A_j^-(i\chi_j f_2/\mu).$$

Из (25)–(27) получаем согласно (12) явную зависимость вкладов первого порядка малости по δ в амплитуды электрического и магнитного полей:

$$E_z^{(1)}(x) = -\frac{x f_1}{2\chi_j^2} \frac{dE_z^{(0)}(x)}{dx} + \frac{x f_2}{2\varepsilon} H_z^{(0)}(x), \quad (28)$$

$$H_z^{(1)}(x) = \frac{x f_1}{2\chi_j^2} \frac{dH_z^{(0)}(x)}{dx} - \frac{x f_2}{2\mu} E_z^{(0)}(x). \quad (29)$$

Отметим еще, что коэффициенты C_{j1}^\pm , D_{j1}^\pm при осциллирующих множителях $\exp(\pm i\chi_j x)$ в первом (по малому параметру δ) приближении решений $E_z^{(1)}(x)$, $H_z^{(1)}(x)$ зависят от коэффициентов A_j^\pm , B_j^\pm и β в нулевом приближении.

Решения для амплитуд электрического и магнитного полей в первом приближении имеют асимптотику

$$E_z(x) = E_z^{(0)}(x) + E_z^{(1)}(x) = E_z^{(0)}(x) + \frac{x}{2} \left[\frac{f_2}{\varepsilon} H_z^{(0)}(x) - \frac{f_1}{\chi_j^2} \frac{dE_z^{(0)}(x)}{dx} \right] + O(\delta^2), \quad (30)$$

$$H_z(x) = H_z^{(0)}(x) + H_z^{(1)}(x) = H_z^{(0)}(x) - \frac{x}{2} \left[\frac{f_2}{\mu} E_z^{(0)}(x) - \frac{f_1}{\chi_j^2} \frac{dH_z^{(0)}(x)}{dx} \right] + O(\delta^2) \quad (31)$$

равномерно по всей оси x при произвольных $(y, z) \in yz$ (см. подробнее в [24]).

4. Квази-ТЕ- и квази-ТМ-моды плавно-нерегулярного четырехслойного интегрально-оптического трехмерного волновода

Выше был выполнен анализ решений в нулевом и первом приближениях уравнений (5), (6) для произвольной поляризации моды, попадающей из трехслойного регулярного двумерного волновода в четырехслойный нерегулярный трехмерный волновод.

В данном разделе рассмотрим последовательно два частных случая: распространение ТЕ- или ТМ-моды из регулярного трехслойного интегрально-оптического двумерного волновода (левая часть рис. 1 до пунктирной вер-

тикальной линии) в четырехслойный плавно-нерегулярный интегрально-оптический трехмерный волновод (правая часть рисунка). Главное внимание уделим трансформации вертикального распределения полей этих мод в четырехслойном волноводе.

Граничные условия на трех границах рассматриваемой интегрально-оптической волноведущей структуры (см. рис. 1) образуют однородную систему из двенадцати линейных алгебраических уравнений для двенадцати неопределенных амплитудных коэффициентов $A_s, B_s, A_f^\pm, B_f^\pm, A_L^\pm, B_L^\pm, A_c, B_c$ [17]. Эта система имеет нетривиальное решение, если она вырождена, т. е. если детерминант соответствующей ей матрицы равен нулю.

Начнем наше рассмотрение с ТЕ-моды (см. первое выражение в (2)). Коэффициент фазового замедления β удовлетворяет дисперсионному соотношению для шести амплитуд B_j продольной компоненты напряженности поля H_z . Допустимые значения β задаются корнями $\beta_1^H, \beta_2^H, \dots$ дисперсионного соотношения (они же являются корнями дисперсионного соотношения в общепринятой тригонометрической форме записи [2, 16]).

На нерегулярном участке трехмерного волновода сомножители $H_z(x; y, z)$ и $E_z(x; y, z)$, входящие в продольные компоненты полей \mathbf{H} и \mathbf{E} вида (3), удовлетворяют уравнениям (8), (9). В эти уравнения входят функции f_1 и f_2 , зависящие в случае ТЕ-моды от β_m^H ($m = 1, 2, \dots$) за границей области нерегулярности. При переходе ТЕ-моды в область нерегулярности она деформируется и начинает удовлетворять дисперсионному соотношению, включающему все двенадцать амплитуд A_j, B_j [17]. Решение нулевого приближения данного дисперсионного соотношения, совпадающее с одним из корней β_m^H на границе области нерегулярности, обозначим через $\beta_m^H(y, z)$. Такое решение может быть найдено численно.

Обозначив $f_1(\beta_m^H(y, z))$ через f_1^H , а $f_2(\beta_m^H(y, z))$ – через f_2^H , запишем уравнения (8), (9) в следующем виде:

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + \chi_j^2 (\beta_m^H) E_z = f_1^H E_z + \frac{f_2^H}{\varepsilon} \frac{dH_z}{dx},$$

$$\frac{d^2 H_z}{dx^2} + \chi_j^2 (\beta_m^H) H_z = -f_1^H H_z - \frac{f_2^H}{\mu} \frac{dE_z}{dx}.$$

Решения этих уравнений в первом приближении задаются выражениями (30), (31), в которых конкретизированы зависимости функций f_1, f_2 и χ_j от коэффициента $\beta_m^H(y, z)$.

Следовательно, при переходе ТЕ-моды в область нерегулярности и при дальнейшем распространении деформирующейся моды в нерегулярном трехмерном волноводе амплитуды $H_z(x; y, z)$, $E_y(x; y, z)$ и $H_x(x; y, z)$ параметрически зависят через $\beta_m^H(y, z)$ от аргументов (y, z) . Одновременно амплитуды $E_z(x; y, z)$, $H_y(x; y, z)$ и $E_x(x; y, z)$ перестают быть равными нулю и также параметрически зависят через $\beta_m^H(y, z)$ от переменных (y, z) . В нулевом приближении правая часть квазиволнового уравнения (8) для ТМ-моды в областях с постоянными диэлектрической и магнитной проницаемостями равна нулю, и его решение имеет вид (17) для компоненты $E_z^{(0)} \neq 0$. В силу (15) у ТМ-моды не равны нулю также компоненты $E_x^{(0)}$ и $H_y^{(0)}$. Аналогично для ТЕ-моды в нулевом приближении правая часть квазиволнового уравнения (9) равна нулю, и его решение для компоненты $H_z^{(0)} \neq 0$ имеет вид (18). В силу (16) у ТЕ-моды не равны нулю также компоненты

$H_x^{(0)}$ и $E_y^{(0)}$. Таким образом, в нулевом приближении падающие моды сохраняют исходную линейную поляризацию, а в первом приближении происходит деполяризация падающей волноводной моды – она изменяет исходную поляризацию.

В случае ТМ-моды (см. второе выражение в (2)) рассмотрение, аналогичное приведенному выше для ТЕ-моды, позволяет записать уравнения (8), (9) в следующем виде:

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + \chi_j^2(\beta_m^E) E_z = f_1^E E_z + \frac{f_2^E}{\varepsilon} \frac{dH_z}{dx},$$

$$\frac{d^2 H_z}{dx^2} + \chi_j^2(\beta_m^E) H_z = -f_1^E H_z - \frac{f_2^E}{\mu} \frac{dE_z}{dx}.$$

Здесь также в нулевом приближении (8), (9) падающие моды сохраняют исходную линейную поляризацию, а в первом приближении происходит их деполяризация.

В работе [21] исследуются «собственные волны среднего поля» в статистически нерегулярном волноводе. Полученные в ней решения имеют структуру, аналогичную структуре изучаемых нами квази-ТЕ- и квази-ТМ-волн. Выражения для сдвигов спектральных (собственных волновых) чисел получены в [21] методом теории возмущений (родственным асимптотическому методу, используемому нами) в виде формального выражения через многократный интеграл. Мы получили подобные результаты в явном виде. Анализ распределения комплексных постоянных распространения, искажений их спектра, структуры соответствующих мод следует проводить на комплексной плоскости [2, 7–10, 13, 15, 19].

При учете структуры изучаемых мод уравнения (8), (9) для квази-ТМ-моды приобретают следующий вид:

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + \chi_j^2(\beta_m^E(y, z)) E_z = f_1(\beta_m^E(y, z)) E_z,$$

$$\frac{d^2 H_z}{dx^2} + \chi_j^2(\beta_m^E(y, z)) H_z = \frac{f_2(\beta_m^E(y, z))}{\mu} \frac{dE_z}{dx}.$$

Из первого уравнения (32) видно, что для квази-ТМ-моды собственное значение, равное χ_j^2 в нулевом приближении, в первом приближении таково:

$$(\chi_j^2)^{(1)} = \chi_j^2(\beta_m^E(y, z)) - f_1(\beta_m^E(y, z)). \quad (33)$$

Аналогично для квази-ТЕ-моды уравнения (8), (9) принимают вид

$$\frac{d^2 H_z}{dx^2} + \chi_j^2(\beta_m^H(y, z)) H_z = -f_1(\beta_m^H(y, z)) H_z,$$

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + \chi_j^2(\beta_m^H(y, z)) E_z = -\frac{f_2(\beta_m^H(y, z))}{\varepsilon} \frac{dH_z}{dx}.$$

Таким образом, для квази-ТЕ-моды собственное значение в первом приближении есть

$$(\chi_j^2)^{(1)} = \chi_j^2(\beta_m^H(y, z)) + f_1(\beta_m^H(y, z)). \quad (35)$$

Заметим, что в силу (33) и (35) добавки первого поряд-

ка к собственным значениям $(\chi_j^2)^{(0)}$ ($\beta_m^{E,H}$) являются чисто мнимыми и различны для разных квазिवолноводных мод.

При распространении адиабатической волноводной моды вдоль нерегулярного участка многослойного интегрально-оптического трехмерного волновода имеют место следующие характерные особенности.

Фазовое распределение электромагнитного поля описывается быстроосциллирующим множителем. Поляризация электромагнитного поля описывается эволюцией множителей $\mathbf{E}(x; y, z)$, $\mathbf{H}(x; y, z)$ при распространении «центров поперечного распределения энергии» вдоль лучевых трубок. При этом в области с $\partial h/\partial y \neq 0$ и $\partial h/\partial z \neq 0$ первоначально линейно-поляризованные ТЕ- и ТМ-моды испытывают деполяризацию.

Совместное решение, например, уравнений (32) и (34) позволит проанализировать особенности обмена энергией между квази-ТЕ- и квази-ТМ-модами. Одна из трудностей этого анализа связана с численным решением дисперсионного соотношения, получаемого с помощью системы из двенадцати линейных алгебраических уравнений [17].

5. Заключение

В настоящей работе в качестве методов исследования многослойного интегрально-оптического трехмерного волновода использованы асимптотический метод и метод связанных волн. Аналитические выражения для полей деформирующихся мод четырехслойного плавно-нерегулярного интегрально-оптического трехмерного волновода получены как в нулевом, так и в первом приближении теории возмущений. Приведены квазиволновые уравнения, описывающие трансформацию вертикальной структуры квази-ТЕ- и квази-ТМ-мод. В явном виде получены сдвиги собственных волновых чисел.

Разработанная нами теория учитывает векторный характер полей, т. е. позволяет вполне адекватно, в отличие от скалярного рассмотрения, описать реальные плавно-нерегулярные многослойные трехмерные волноведущие структуры. Полученное решение может быть использовано для анализа аналогичных трехмерных интегральных структур из диэлектрических, магнитных и метаматериалов, в том числе состоящих из N слоев, в достаточно широком диапазоне электромагнитных длин волн.

Результаты данной работы могут также служить основой для разработки алгоритмов приближенного численного решения задач синтеза плавно-нерегулярных интегрально-оптических многослойных волноведущих трехмерных структур, выполняющих, например, заданную амплитудно-фазовую трансформацию электромагнитного излучения. Решение этой проблемы, несмотря на ее актуальность и практическую значимость, до настоящего времени сдерживалось отсутствием полученного авторами в данной работе аналитического решения соответствующей электродинамической задачи.

Л.А.Севастьянов выражает признательность РФФИ за частичную финансовую поддержку (грант № 00738).

Приложение 1

При использовании метода коротковолновых асимптотик решение волнового уравнения для напряженности электромагнитного поля с учетом градиента диэлектрической проницаемости

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E} = -2\nabla[\mathbf{E}, \nabla(\ln n(\mathbf{r}))], \quad (\text{П1.1})$$

вытекающего из уравнений Максвелла [22], представляется [6, 22] в виде конечного асимптотического ряда, называемого адиабатическим приближением:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \sqrt{n(\mathbf{r}_0)}}{\sqrt{n(\mathbf{r})}} \exp\left(-ik_0 \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} n(\mathbf{r}') d\mathbf{l}\right). \quad (\text{П1.2})$$

В оптико-лучевом приближении излучение, введенное в регулярный оптический волновод, распространяется вдоль оси z в виде плоских волн,двигающихся зигзагообразно и испытывающих полное внутреннее отражение на границах волновода [2, 12]. При полном внутреннем отражении, как известно, фаза волны испытывает резкий скачок при каждом отражении на границах волновода. Кроме того, волновод как направляющая структура имеет различные характерные пространственные масштабы L_j : вдоль оси x масштаб L_x имеет порядок длины волны λ (в видимом диапазоне $L_x \sim 1$ мкм), вдоль осей y, z масштабы $L_y, L_z \gg L_x$. Как следствие, фаза электромагнитной волны изменяется вдоль оси x намного быстрее, чем вдоль осей y, z . Это позволяет считать переменную x «быстрой», а переменные y, z – «медленными», что и является основанием применимости метода усреднения.

Согласно методу усреднения [23], находим вначале усредненное двумерное решение:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}(y, z) &= \frac{\bar{\mathbf{E}}(y_0, z_0) \beta(y_0, z_0)}{\sqrt{\beta(y, z)}} \\ &\times \exp\left[-ik_0 \int_{y_0, z_0}^{y, z} \beta(y', z') ds\right], \end{aligned} \quad (\text{П1.3})$$

где $ds = (dy^2 + dz^2)^{1/2}$ – элемент длины луча;

$$\varphi(y, z) = k_0 \int_{y_0, z_0}^{y, z} \beta(y', z') ds(y', z')$$

– фаза волны усредненного двумерного уравнения $\nabla_{y,z}^2 \bar{\mathbf{E}}(y, z) + k_0^2 \beta^2(y, z) \bar{\mathbf{E}}(y, z) = 0$ для неусредненного волнового уравнения, соответствующего неусредненному волновому уравнению (П1.1). Интеграл под знаком экспоненты берется вдоль луча, проходящего через точки (y_0, z_0) и (y, z) .

После этого, в отличие от традиционного метода усреднения [23], мы ищем решение неусредненной задачи в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z) = \mathbf{E}(x; y, z) \frac{\exp[-ik_0 \int \beta(y, z) ds]}{\sqrt{\beta(y, z)}}, \quad (\text{П1.4})$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(x, y, z) = \mathbf{H}(x; y, z) \frac{\exp[-ik_0 \int \beta(y, z) ds]}{\sqrt{\beta(y, z)}}$$

и подставляем его в уравнения Максвелла (1) и в граничные условия с учетом негоризонтальности касательных плоскостей в точках границ раздела сред.

Приложение 2

Запишем уравнения Максвелла (1) в координатном виде:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad (\text{П2.1})$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (\text{П2.2})$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (\text{П2.3})$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad (\text{П2.4})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad (\text{П2.5})$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (\text{П2.6})$$

Согласно (3) каждая из компонент электромагнитного поля имеет вид

$$\psi(x, y, z; t) = \varphi(x; y, z) \exp(i\omega t)$$

$$\times \exp\left[-ik_0 \int_{y_0, z_0}^{y, z} \beta(y', z') ds(y', z')\right] [\beta(y, z)]^{-1/2},$$

а частные производные ψ –

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \exp\left[-ik_0 \int_{y_0, z_0}^{y, z} \beta(y', z') ds(y', z')\right] \frac{\exp(i\omega t)}{\sqrt{\beta(y, z)}} \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = p_y \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = p_z \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega \psi.$$

Следовательно, соотношение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(k_0^2 \varepsilon \mu + p_z^2 + \frac{\partial p_z}{\partial z}\right) \psi \quad (\text{П2.7})$$

справедливо для каждой компоненты электромагнитного поля вида (3).

Получим из уравнений Максвелла (П2.1)–(П2.6) выражения вида (П2.7) для компонент H_y, H_x, E_y, E_x . А именно, действуя оператором $\partial/\partial z$ на соотношение (П2.1) и оператором $(\varepsilon/c)(\partial/\partial t)$ на соотношение (П2.5) и затем складывая полученные соотношения, получаем новое выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} &\equiv \left(k_0^2 \varepsilon \mu + p_z^2 + \frac{\partial p_z}{\partial z}\right) H_y \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right). \end{aligned} \quad (\text{П2.8})$$

Аналогично, действуя оператором $(\mu/c)(\partial/\partial t)$ на (П2.1) и оператором $\partial/\partial z$ на (П2.5), оператором $\partial/\partial z$ на (П2.2) и оператором $(\varepsilon/c)(\partial/\partial t)$ на (П2.4), а также оператором $(\mu/c)(\partial/\partial t)$ на (П2.2) и оператором $\partial/\partial z$ на (П2.4) и поочередно складывая найденные соотношения, получаем соответственно

$$\left(k_0^2 \varepsilon \mu + p_z^2 + \frac{\partial p_z}{\partial z}\right) E_x = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) - \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y}\right), \quad (\text{П2.9})$$

$$\left(k_0^2 \varepsilon \mu + p_z^2 + \frac{\partial p_z}{\partial z}\right) H_x = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\right), \quad (\text{П2.10})$$

$$\left(k_0^2 \varepsilon \mu + p_z^2 + \frac{\partial p_z}{\partial z}\right) E_y = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right). \quad (\text{П2.11})$$

Таким образом, мы получили для компонент H_y, H_x, E_y, E_x алгебраические выражения из компонент H_z, E_z и их производных.

Теперь получим из уравнений Максвелла (П2.1)–(П2.6) уравнения второго порядка для продольных компонент H_z, E_z электромагнитного поля. Для этого подставим в левую часть уравнения (П2.3) выражения для H_y, H_x из соотношений (П2.8) и (П2.10), а в левую часть уравнения (П2.6) – выражения для E_y, E_x из соотношений (П2.9) и (П2.11).

1. Дерюгин Л.Н., Марчук А.Н., Сотин В.Е. *Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника*, **10**, 134 (1967).
2. Маркузе Д. *Оптические волноводы* (М.: Мир, 1974).
3. Каценеленбаум Б.З. *Теория нерегулярных волноводов с медленно изменяющимися параметрами* (М.: изд. АН СССР, 1961).
4. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. *Геометрическая оптика неоднородных сред* (М.: Наука, 1980).
5. Southwell W.H. *J. Opt. Soc. Am.*, **67**, 1004 (1977).
6. Бабич В.М., Булдырев В.С. *Асимптотические методы в задачах*

дифракции коротких волн (М.: Наука, 1972).

7. Шевченко В.В. *Плавные переходы в открытых волноводах (Введение в теорию)* (М.: Наука, 1969).
8. Унгер Х.Г. *Планарные и волоконные оптические волноводы* (М.: Мир, 1980).
9. Снайдер А., Лав Дж. *Теория оптических волноводов* (М.: Радио и связь, 1987).
10. Содха М.С., Гхатак А.К. *Неоднородные оптические волноводы* (М.: Связь, 1980).
11. Золотов Е.М., Киселев В.А., Сычугов В.А. *УФН*, **112**, 231 (1974).
12. Хансперджер Р. *Интегральная оптика: Теория и технология* (М.: Мир, 1985).
13. Нефедов Е.И. *Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах* (М.: Наука, 1979).
14. Егоров А.А. *Laser Phys. Lett.*, **1**, 421 (2004).
15. Егоров А.А. *Квантовая электроника*, **34**, 744 (2004).
16. Адамс М. *Введение в теорию оптических волноводов* (М.: Мир, 1984).
17. Севастьянов Л.А., Егоров А.А. *Оптика и спектроскопия*, **105**, 632 (2008).
18. Летов Д.М., Половинкин А.Н. *Письма в ЖТФ*, **3**, 295 (1977).
19. Маненков А.Б. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **48**, 388 (2005).
20. Голант Е.И., Голант К.М. *ЖТФ*, **76**, 99 (2006).
21. Жук Н.П. *ЖТФ*, **56**, 825 (1986).
22. Солимено С., Крозиньяни Б., ди Порто П. *Дифракция и волноводное распространение оптического излучения* (М.: Мир, 1989).
23. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах* (М.: Наука, 1984).
24. Коняев Ю.А. *Асимптотические и аналитические методы решения некоторых классов прикладных модельных задач* (М.: Изд. РУДН, 2005).