

Особенности периодических и аperiodических режимов энергообмена при каскадном квазисинхронном параметрическом преобразовании частоты

В.М.Петникова, В.В.Шувалов

Проанализированы области существования и особенности точных аналитических решений задачи квазисинхронного взаимодействия четырех плоских коллинеарных монохроматических волн – мод в среде с квадратичной нелинейностью при каскадном преобразовании частоты. Показано, что в этом случае реализуются необычные типы многокомпонентных кноидальных и уединенных солитоноподобных волн (периодических и аperiodических режимов энергообмена). Две из четырех составляющих последних пропорциональны действительной и мнимой частям хорошо известной комплексной лоренцевской зависимости, обычно используемой для описания дисперсии вкладов резонансных переходов в комплексную диэлектрическую проницаемость при однородном уширении линий.

Ключевые слова: квадратичная нелинейность, каскадное квазисинхронное преобразование частоты, периодический и аperiodический энергообмен, многокомпонентные кноидальные и уединенные волны.

1. Введение

В [1] сообщалось о точном решении задачи квазисинхронного взаимодействия четырех (нижний индекс $i = 1 - 4$) плоских коллинеарных монохроматических волн – мод с частотами $\omega_1, \omega_2 = \omega_1, \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 2\omega_1$ и $\omega_4 = \omega_1 + \omega_3 = 3\omega_1$, волновыми векторами \mathbf{k}_{1-4} и комплексными амплитудами A_{1-4} в среде с квадратичной нелинейностью при каскадном преобразовании частоты (одновременно протекающие процессы $\omega_1 + \omega_{2,3} \rightarrow \omega_{3,4}$). Было показано, что описывающая эту задачу исходная система укороченных уравнений

$$\frac{dA_1}{dz} = -i\gamma_1 A_2^* A_3 - i\gamma_2 A_3^* A_4, \quad (1a)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = -i\gamma_1 A_1^* A_3, \quad (1b)$$

$$\frac{dA_3}{dz} = -i2\gamma_1^* A_1 A_2 - i2\gamma_2 A_1^* A_4, \quad (1в)$$

$$\frac{dA_4}{dz} = -i3\gamma_2^* A_1 A_3 \quad (1г)$$

с граничными условиями $A_i|_{z=0} = A_{i0}$ может быть редуцирована к замкнутой системе из двух связанных стационарных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_1}{dz^2} = & -G_+ |A_1|^2 A_1 + \frac{3}{2} G_- |A_3|^2 A_1 \\ & + (|\gamma_1|^2 J_1 + 3|\gamma_2|^2 J_3) A_1, \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_3}{dz^2} = & -3G_+ |A_1|^2 A_3 + \frac{1}{2} G_- |A_3|^2 A_3 \\ & + (|\gamma_1|^2 J_1 + 3|\gamma_2|^2 J_3) A_3 \end{aligned} \quad (2б)$$

относительно амплитуд $A_{1,3}$ двух волн, задействованных в обоих нелинейных процессах, с граничными условиями $A_1|_{z=0} = A_{10}, (dA_1/dz)|_{z=0} = -i\gamma_1 A_{20}^* A_{30} - i\gamma_2 A_{30}^* A_{40}, A_3|_{z=0} = A_{30}, (dA_3/dz)|_{z=0} = -i2\gamma_1^* A_{10} A_{20} - i2\gamma_2 A_{10}^* A_{40}$. Переход к такой записи эквивалентен введению эффективной кубической нелинейности, описывающей конкуренцию процессов слияния и распада квантов. Здесь ось z направлена вдоль векторов \mathbf{k}_i ; $\gamma_{1,2}$ – усредненные по периоду доменной структуры нелинейной среды константы нелинейной связи для процессов $\omega_1 + \omega_{2,3} \rightarrow \omega_{3,4}$ (см. [1]); $G_{\pm} = |\gamma_1|^2 \pm 3|\gamma_2|^2$; $J_1 = I_1 - 2I_2 - I_3/2$ и $J_3 = I_1 + I_3/2 + 2I_4/3$ – интегралы системы (1); $I_i = A_i A_i^*$ – переменные, пропорциональные интенсивностям. Было установлено, что систему (2) можно трансформировать в два идентичных независимых НУШ, что и определило ее самосогласованные решения (кноидальные волны) в весьма необычной форме: как сумму и разность двух идентичных решений одного и того же НУШ со сдвинутыми аргументами. При этом, хотя уравнения для амплитуд $A_{2,4}$ двух других волн и не сводятся к системе, аналогичной (2), их интенсивности $I_{2,4}$ легко могут быть найдены из соотношений

$$\begin{aligned} I_2 - I_{20} = & \frac{1}{2}(I_1 - I_{10}) - \frac{1}{4}(I_3 - I_{30}), \\ I_4 - I_{40} = & -\frac{3}{2}(I_1 - I_{10}) - \frac{3}{4}(I_3 - I_{30}), \end{aligned} \quad (3)$$

следующих из законов сохранения. Здесь $I_{i0} = I_i|_{z=0}$. Полученные таким образом в [1] аналитические решения полностью перекрывают диапазон изменений граничных условий, что позволяет оптимизировать режимы энергообмена в любой конкретной ситуации.

Ниже мы проанализируем области существования и особенности периодических самосогласованных реше-

В.М.Петникова, В.В.Шувалов. Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vsh@vsh.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 14 января 2009 г.

ний (кноидальных волн, см. ссылки в [1]), полученных для описанной задачи в [1], а также покажем, что в этом случае может быть реализован необычный новый тип многокомпонентного аperiodического (солитоноподобного) решения. Две из четырех его составляющих пропорциональны действительной и мнимой частям хорошо известной комплексной лоренцевской зависимости, которая обычно используется для описания дисперсии вкладов резонансных переходов в комплексную диэлектрическую проницаемость при однородном уширении линий.

2. Области существования и особенности решений

Для того чтобы проиллюстрировать характер и особенности точных аналитических решений системы (1), далее мы остановимся на случае, когда $I_{10,20} \neq 0$ и $I_{30} = I_{40} = 0$ (т. е. на том случае, когда гамильтониан H системы (1) обнуляется и фазы φ_j комплексных амплитуд A_j , введенные соотношением $A_j(z) = X_j(z) \exp[i\varphi_j(z)]$, постоянны, см. [1]). Здесь вещественные переменные X_j могут быть как больше, так и меньше нуля. При этом две низкочастотные моды $A_{1,2}$ играют роль двухкомпонентной накачки, которая используется для генерации двух высокочастотных мод $A_{3,4}$. Отметим, что выбор положения нуля на оси z условен и аргумент любого из приведенных в [1] решений может быть произвольным образом смещен. Поэтому для того, чтобы удовлетворить выбранным нами граничным условиям, решения (43) и (44) работы [1] в отличие от всех остальных будут предварительно сдвигаться вдоль оси z на четверть периода.

Введем плоскость (ϵ, N) , определенную двумя параметрами $\epsilon = 3|\gamma_2|^2/|\gamma_1|^2 - 1 \geq -1$ и $N = I_{10}/I_{20} \geq 0$, которые описывают соотношение между константами нелинейной связи и роль граничных условий для решений (25), (26), (32), (33), (43)–(45) и (47) работы [1]. Значения параметров ϵ и N , использованные далее в расчете, указаны на рис.1 точками, помеченными номерами соответствующих выражений. Тогда области существования перечисленных выше аналитических решений на этой пло-

скости будут ограничены сепаратрисами (см. рис.1)

$$\epsilon_0(N) = -1/N, \tag{4a}$$

$$\epsilon_{\pm}(N) = (2/N)\{2 - N \pm [2(2 - N)]^{1/2}\}. \tag{4б}$$

В действительности сепаратрисы $\epsilon_{\pm}(N)$ представляют собой две ветви двухзначного решения уравнения $N(\epsilon) = 8(\epsilon + 1)/[\epsilon^2 + 4(\epsilon + 1)]$ и поэтому аналитически сшиваются в точке $(\epsilon = 0, N = 2)$. Поскольку касательные к сепаратрисам $\epsilon_0(N)$ и $\epsilon_{\pm}(N)$ в точке их пересечения $(\epsilon = -2/3, N = 3/2)$ совпадают, они также аналитически продолжают друг друга. Все это приводит к формированию двух результирующих пересекающихся кривых, причем на них модуль k эллиптических функций Якоби $\text{sn}(x), \text{cn}(x)$ и $\text{dn}(x)$ [2], через которые и выражены все интересующие нас периодические решения, равен нулю и единице соответственно (см. рис.1). Указанная точка пересечения этих кривых является особой (см. ниже), а решения (32) и (33), (43)–(45) и (47), а также (25) и (26) работы [1] ответственны за области $\epsilon > 0, \epsilon < 0$ и границу их раздела $\epsilon = 0$ соответственно.

Выражения (25), (32) и (43) (в последнем случае после сдвига аргумента на четверть периода) работы [1] отвечают за область, расположенную слева от сепаратрис $\epsilon_{\pm}(N)$, в которой все эти три решения могут быть переписаны в унифицированном виде

$$\frac{X_1}{|A_{10}|} = \text{cn}(\alpha z) \left[1 - \frac{\sqrt{1 + \epsilon N} - 1}{2\sqrt{1 + \epsilon N}} \text{sn}^2(\alpha z) \right]^{-1}, \tag{5a}$$

$$\begin{aligned} \frac{X_2}{|A_{10}|} &= N^{-1/2} \left[1 - \frac{\sqrt{1 + \epsilon N} - 1 + N}{2\sqrt{1 + \epsilon N}} \text{sn}^2(\alpha z) \right] \\ &\times \left[1 - \frac{\sqrt{1 + \epsilon N} - 1}{2\sqrt{1 + \epsilon N}} \text{sn}^2(\alpha z) \right]^{-1}, \end{aligned} \tag{5б}$$

$$\begin{aligned} \frac{X_3}{|A_{10}|} &= \sqrt{2}(1 + \epsilon N)^{-1/4} \text{sn}(\alpha z) \text{dn}(\alpha z) \\ &\times \left[1 - \frac{\sqrt{1 + \epsilon N} - 1}{2\sqrt{1 + \epsilon N}} \text{sn}^2(\alpha z) \right]^{-1}, \end{aligned} \tag{5в}$$

$$\begin{aligned} \frac{X_4}{|A_{10}|} &= \frac{1}{2} \left[\frac{3N(1 + \epsilon)}{1 + \epsilon N} \right]^{1/2} \text{sn}^2(\alpha z) \\ &\times \left[1 - \frac{\sqrt{1 + \epsilon N} - 1}{2\sqrt{1 + \epsilon N}} \text{sn}^2(\alpha z) \right]^{-1}, \end{aligned} \tag{5г}$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{[2(\sqrt{1 + \epsilon N} - 1) + N(2 + \epsilon)]^{1/2}}{2(1 + \epsilon N)^{1/4}}, \\ \alpha &= \sqrt{\frac{2}{N}}(1 + \epsilon N)^{1/4} |\gamma_1| |A_{10}|. \end{aligned} \tag{5д}$$

Выражения (26), (33) и (45) работы [1] ответственны за расположенную справа от сепаратрис $\epsilon_{\pm}(N)$ над сепаратрисой $\epsilon_0(N)$ при $\epsilon > -2/3$ область, в которой для всех трех указанных решений также может быть использована унифицированная форма записи

$$\frac{X_1}{|A_{10}|} = \text{dn}(\alpha z) \left[1 - 2 \frac{\epsilon}{2 + 2\epsilon + (2 + \epsilon)\sqrt{1 + \epsilon N}} \text{sn}^2(\alpha z) \right]^{-1}, \tag{6a}$$

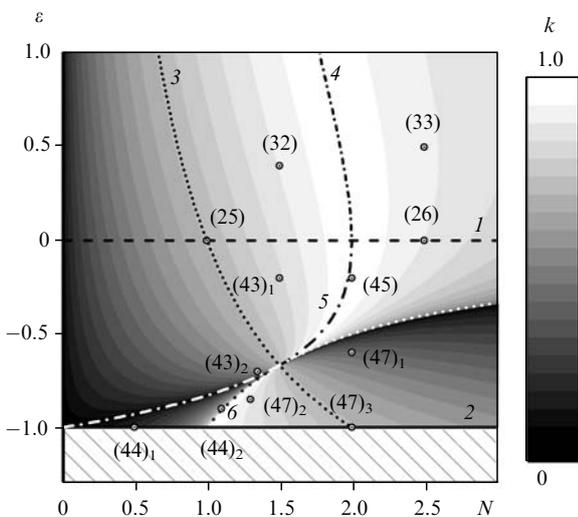


Рис.1. Карта градаций серого цвета для зависимости $k(\epsilon, N)$ при $I_{10,20} \neq 0$ и $I_{30} = I_{40} = 0$. На плоскости (ϵ, N) показаны прямые $\epsilon = 0$ (1) и $\epsilon = -1$ (2), а также сепаратрисы $\epsilon_0(N) = -1/N$ (6) и $\epsilon_{\pm}(N) = (2/N)[2 - N \pm \sqrt{2(2 - N)}]$ (4,5). Линии черного и белого цвета соответствуют $k = 1$ и 0. Линия из черных точек (3) проходит через особую точку $(\epsilon = -2/3, N = 3/2)$ и соответствует $k = 1/2$.

$$\frac{X_2}{|A_{10}|} = N^{-1/2} \left[1 - 2 \frac{1 + \varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon N}}{2 + 3\varepsilon + (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}} \operatorname{sn}^2(\alpha z) \right] \times \left[1 - 2 \frac{\varepsilon}{2 + 3\varepsilon + (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}} \operatorname{sn}^2(\alpha z) \right]^{-1}, \quad (6б)$$

$$\frac{X_3}{|A_{10}|} = 2N^{-1/2} \left[\frac{2(1 + \sqrt{1 + \varepsilon N})}{2 + 3\varepsilon + (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}} \right]^{1/2} \times \frac{\operatorname{sn}(\alpha z) \operatorname{cn}(\alpha z)}{1 - 2\varepsilon [2 + 3\varepsilon + (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}]^{-1} \operatorname{sn}^2(\alpha z)}, \quad (6в)$$

$$\frac{X_4}{|A_{10}|} = 2N^{-1/2} \frac{\sqrt{3(1 + \varepsilon)}(1 + \sqrt{1 + \varepsilon N})}{2 + 3\varepsilon + (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}} \times \frac{\operatorname{sn}^2(\alpha z)}{1 - 2\varepsilon [2 + 3\varepsilon + (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}]^{-1} \operatorname{sn}^2(\alpha z)}, \quad (6г)$$

$$k = 2 \left[\frac{\varepsilon \sqrt{1 + \varepsilon N}}{[2 + 3\varepsilon + (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}](\sqrt{1 + \varepsilon N} - 1)} \right]^{1/2}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{(1 + \varepsilon N)^{1/4}}{k} |\gamma_1| |A_{10}|. \quad (6д)$$

Выражения (44) работы [1], сдвинутые на четверть периода вдоль оси z , отвечают за область, расположенную слева от сепаратрисы $\varepsilon_0(N)$ под сепаратрисой $\varepsilon_-(N)$ при $\varepsilon < -2/3$, где соответствующее решение может быть записано в виде

$$\frac{X_1}{|A_{10}|} = \frac{\operatorname{cn}(\alpha z) \operatorname{dn}(\alpha z)}{1 + (2 + \varepsilon)(\sqrt{1 + \varepsilon N} - 1) [2 + 3\varepsilon - (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}]^{-1} \operatorname{sn}^2(\alpha z)}, \quad (7а)$$

$$\frac{X_2}{|A_{10}|} = N^{-1/2} \left[1 + \varepsilon \frac{\sqrt{1 + \varepsilon N} - 1}{2 + 3\varepsilon - (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}} \operatorname{sn}^2(\alpha z) \right] \times \left[1 + (2 + \varepsilon) \frac{\sqrt{1 + \varepsilon N} - 1}{2 + 3\varepsilon - (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}} \operatorname{sn}^2(\alpha z) \right]^{-1}, \quad (7б)$$

$$\frac{X_3}{|A_{10}|} = 2N^{-1/2} \left[\frac{2(\sqrt{1 + \varepsilon N} - 1)}{2 + 3\varepsilon - (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}} \right]^{1/2} \times \frac{\operatorname{sn}(\alpha z)}{1 + (2 + \varepsilon)(\sqrt{1 + \varepsilon N} - 1) [2 + 3\varepsilon - (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}]^{-1} \operatorname{sn}^2(\alpha z)}, \quad (7в)$$

$$\frac{X_4}{|A_{10}|} = 2N^{-1/2} \frac{\sqrt{3(1 + \varepsilon)}(\sqrt{1 + \varepsilon N} - 1)}{2 + 3\varepsilon - (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}} \times \frac{\operatorname{sn}^2(\alpha z)}{1 + (2 + \varepsilon)(\sqrt{1 + \varepsilon N} - 1) [2 + 3\varepsilon - (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}]^{-1} \operatorname{sn}^2(\alpha z)}, \quad (7г)$$

$$k = \left\{ \frac{(1 - \sqrt{1 + \varepsilon N}) [2 + 3\varepsilon + (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}]}{(1 + \sqrt{1 + \varepsilon N}) [2 + 3\varepsilon - (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}]} \right\}^{1/2},$$

$$\alpha = \left\{ \frac{(1 + \sqrt{1 + \varepsilon N}) [2 + 3\varepsilon - (2 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon N}]}{2\varepsilon N} \right\}^{1/2} |\gamma_1| |A_{10}|. \quad (7д)$$

Выражения (47) работы [1] ответственны за расположенную ниже сепаратрисы $\varepsilon_0(N)$ область, в которой указанное решение может быть переписано в форме

$$\frac{X_1}{|A_{10}|} = \frac{2\eta}{\eta + 1} \frac{\operatorname{dn}(\alpha z)}{1 + [(\eta - 1)/(\eta + 1)] \operatorname{cn}(\alpha z)}, \quad (8а)$$

$$\frac{X_2}{|A_{10}|} = N^{-1/2} \frac{(2 + \varepsilon)(\eta + 1) - 2}{(2 + \varepsilon)(\eta + 1)}$$

$$\times \frac{1 + \{[(2 + \varepsilon)(\eta - 1) + 2]/[(2 + \varepsilon)(\eta + 1) - 2]\} \operatorname{cn}(\alpha z)}{1 + [(\eta - 1)/(\eta + 1)] \operatorname{cn}(\alpha z)}, \quad (8б)$$

$$\frac{X_3}{|A_{10}|} = N^{-1/2} \frac{2}{\eta + 1} \sqrt{\frac{2\eta}{2 + \varepsilon}} \frac{\operatorname{sn}(\alpha z)}{1 + [(\eta - 1)/(\eta + 1)] \operatorname{cn}(\alpha z)}, \quad (8в)$$

$$\frac{X_4}{|A_{10}|} = 2N^{-1/2} \frac{\sqrt{3(1 + \varepsilon)}}{(2 + \varepsilon)(\eta + 1)} \times \frac{1 - \operatorname{cn}(\alpha z)}{1 + [(\eta - 1)/(\eta + 1)] \operatorname{cn}(\alpha z)}, \quad (8г)$$

$$k = \left[\frac{2 + (2 + \varepsilon)(\eta - 1)N}{2(2 + \varepsilon)\eta N} \right]^{1/2}, \quad \alpha = \sqrt{2(2 + \varepsilon)\eta} |\gamma_1| |A_{10}|,$$

$$\eta = \left[1 - 8 \frac{1 + \varepsilon}{N(2 + \varepsilon)^2} \right]^{1/2}. \quad (8д)$$

И, наконец, решение в особой точке ($\varepsilon = -2/3, N = 3/2$) может быть получено как соответствующий предел выписанных нами выше выражений, что дает весьма необычное аperiodическое решение солитоноподобного типа

$$\frac{X_1}{|A_{10}|} = \frac{1}{1 + \lambda z^2}, \quad (9а)$$

$$\frac{X_2}{|A_{10}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{2 - \lambda z^2}{1 + \lambda z^2}, \quad (9б)$$

$$\frac{X_3}{|A_{10}|} = \frac{2\sqrt{\lambda} z}{1 + \lambda z^2}, \quad (9в)$$

$$\frac{X_4}{|A_{10}|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\lambda z^2}{1 + \lambda z^2}, \quad (9г)$$

$$\lambda = \frac{2}{3} |\gamma_1|^2 I_{10}. \quad (9д)$$

Заметим, что для определения $X_{2,4}(z)$ в (5)–(9) мы воспользовались (3) и учли знак производных $dA_{2,4}/dz$ в окрестности точек $X_{2,4} = 0$.

Особенности аналитических решений (5)–(8) иллюстрирует рис.2, на котором показан характер трансформации зависимостей амплитуд X_{1-4} (нормированных на $|A_{10}|$) от координаты z (нормированной на α^{-1}) с изменением параметров ε и N . Приведенные зависимости соответствуют выражениям (25) (формулы (5) настоящей работы при $\varepsilon = 0$), (26) ((6) при $\varepsilon = 0$), (32) ((5) при $\varepsilon > 0$), (33) ((6) при $\varepsilon > 0$), (45) ((6) при $\varepsilon < 0$), и (47) ((8) настоящей

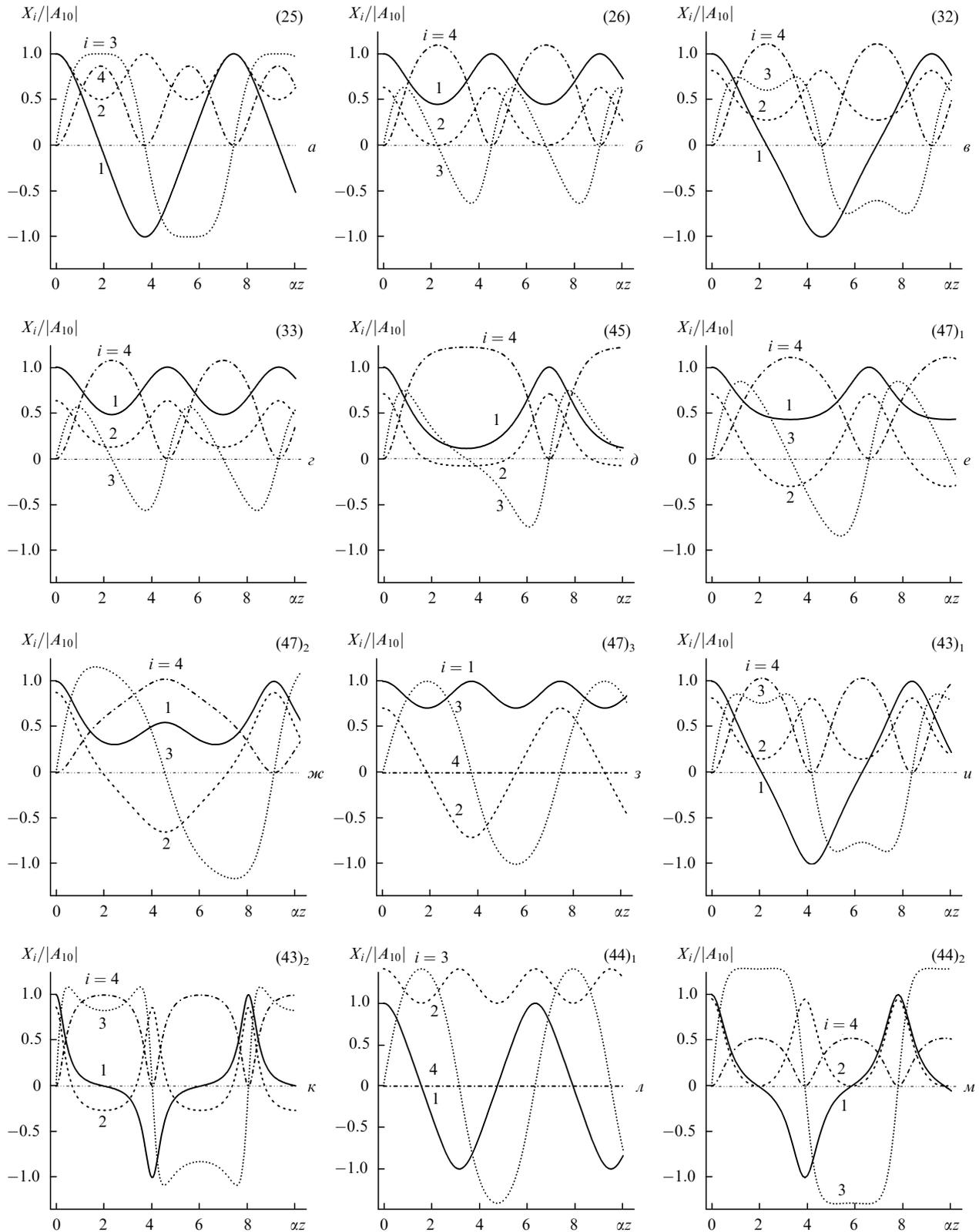


Рис.2. Эволюция $X_{1-4}(z)$ при изменении значений параметров ε и N . Зависимости соответствуют выражениям (25) (а), (26) (б), (32) (в), (33) (г), (45) (д) и (47) (е-з), а также сдвинутым решениям (43) (и,к) и (44) (л,м) работы [1]. Значения ε и N для всех кривых отмечены на плоскости (ε, N) точками с указанием номеров соответствующих решений (см. рис.1).

работы), а также сдвинутым решениям (43) ((5) при $\varepsilon < 0$) и (44) ((7) настоящей работы), взятым из работы [1].

Легко убедиться, что наиболее резкие изменения характера зависимостей $X_{1-4}(z)$ происходят вблизи сепаратрис, что и определило наш выбор точек для расчета.

На границе $\varepsilon = -1$ амплитуда $X_4(z)$ обнуляется и выражения (7) и (8) переходят в классические аналитические формулы, описывающие генерацию волны A_3 волнами $A_{1,2}$ [3]. Можно также заметить, что хотя все решения, показанные на рис.2, построены с использованием фун-

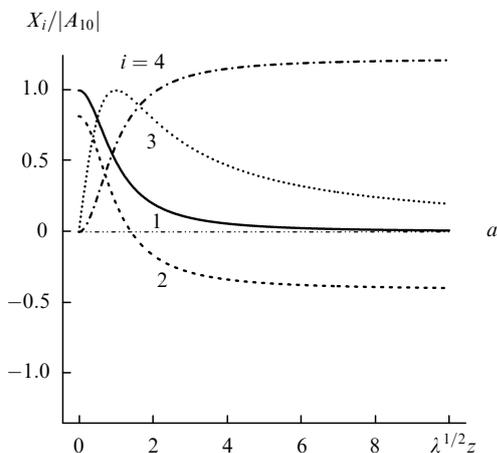
даментальных решений уравнения Ламэ первого порядка (см. [4]), помимо удвоения периода $2K \rightarrow 4K$, которое всегда происходит при переходе от функции $\operatorname{dn}(z, k)$ с постоянным знаком к знакопеременным функциям $\operatorname{sn}(z, k)$ и $\operatorname{cn}(z, k)$, удвоение периода наблюдается при этом и для знакопеременных компонент. Здесь $K = K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, который определяет как период фундаментальных решений уравнения Ламэ первого порядка (т.е. эллиптических функций Якоби [2]), так и период выписанных нами выше аналитических решений).

Как уже отмечалось, в рассматриваемом нами случае две низкочастотные моды $A_{1,2}$ играют роль двухкомпонентной накачки, которая используется для генерации двух высокочастотных мод $A_{3,4}$. Это значит, что вопрос о возможности реализации режимов энергообмена с истощением волн накачки приобретает первостепенное значение. Легко заметить, что в рассмотренном нами случае интенсивность хотя бы одной из компонент накачки почти всегда обращается в нуль. Единственным исключением является решение (6) при $\varepsilon > 0$ (рис.2,з), для которого минимальные интенсивности компонент накачки определяются выражениями

$$I_1^{\min} = I_{10} \left[1 - \frac{8(\varepsilon + 1)}{N(\varepsilon + 2)^2} \right], \quad I_2^{\min} = I_{20} \left(\frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} \right)^2. \quad (10)$$

В решениях (6) при $\varepsilon \leq 0$ и (8) при $-2/3 < \varepsilon \leq 0$ минимальная интенсивность I_1^{\min} первой компоненты определяется тем же выражением [см. (10)] и соответствует точке, в которой $I_2 = 0$ (рис.2,д,е). Однако решение (8) при $\varepsilon < -2/3$ имеет уже два смещенных друг относительно друга минимума $I_1^{\min} = I_{10}(\varepsilon N + 1)/(\varepsilon N)$, расположенных в точках, для которых интенсивности I_{2-4} остальных мод не являются ни минимальными, ни максимальными (рис.2,ж). Отметим также, что зависимость $I_3(z)$ имеет экстремумы аналогичного типа почти для всех полученных решений (рис.2,б-ж,и,к). В решениях (5) и (7) $I_1^{\min} = 0$, поскольку $X_1(z)$ является в этом случае знакопеременной функцией (см. рис.2,а,в,и-м). Причем здесь минимальная интенсивность второй компоненты накачки определяется выражением

$$I_2^{\min} = I_{20} \left(\frac{1 + \varepsilon - \sqrt{1 + \varepsilon N}}{\varepsilon} \right)^2. \quad (11)$$



Очевидно, что вследствие полного перекрытия области возможных изменений граничных условий полученные аналитические решения обеспечивают возможность оптимизации эффективности преобразования в любой конкретной ситуации. Например, выбор значений ε и N в соответствии с решением (45) работы [1] вблизи сепаратрисы $\varepsilon_-(N)$ приводит к максимальной эффективности преобразования на частоту ω_4 (рис.2,д). В целом же можно констатировать, что область, соответствующая решениям вида (5), отвечает возможности эффективной генерации двух мод $A_{3,4}$. Изменение значений параметров ε и N , приводящее к переходу в соответствующие решениям типа (6) и (7) области, позволяет реализовать преимущественную генерацию уже только одной из двух высокочастотных мод (A_4 и A_3 соответственно). В решениях типа (8) происходит одновременная генерация трех мод ($A_{1,2,4}$).

Особый интерес представляет необычное аperiodическое солитоноподобное решение (9) (рис.3), две составляющие которого $A_{1,3}$ (см. (9а) и (9в)) пропорциональны действительной и мнимой частям комплексной лоренцевской зависимости, которой обычно описывается дисперсия вклада любого резонансного перехода в комплексную диэлектрическую проницаемость при однородном уширении линии. С математической точки зрения появление решения типа (9) в рассматриваемой задаче не столь неожиданно, т.к. известно, что обыкновенное дифференциальное уравнение вида $d^2 A/dz^2 = aA^3$, весьма сходное с НУШ, помимо решений, выраженных через эллиптические интегралы, имеет и частное решение $A = \sqrt{2/a}(z - C)^{-1}$, где $a = \text{const}$ – параметр задачи и C – произвольная константа, которая может быть и чисто мнимой [5]. Поэтому необходимым условием реализации решения такого типа у системы (2) является отсутствие в уравнениях (2а) и (2б) линейного члена ($|\gamma_1|^2 J_1 + 3|\gamma_2|^2 J_3 = 0$), что в рассматриваемом нами случае сводится к требованию

$$\varepsilon = 2(N^{-1} - 1). \quad (12)$$

Условие (12) выполнено на линии 3, показанной на рис.1 черными точками. Естественно, что эта линия проходит и через особую точку ($\varepsilon = -2/3, N = 3/2$), в которой и реализуется решение этого необычного типа. Однако гораздо интереснее то, что во всех прочих точках плоскости (ε, N) , где это условие также выполнено, реализуются

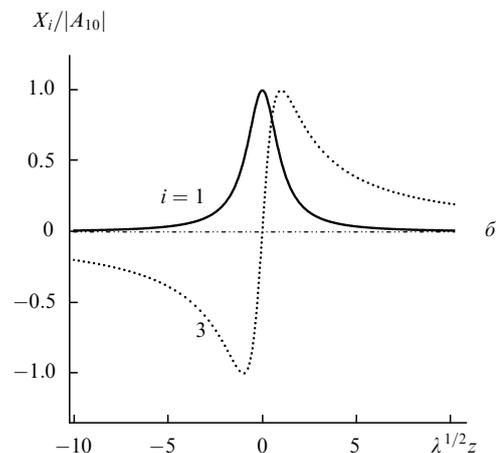


Рис.3. Зависимости $X_{1-4}(z)$ в особой точке ($\varepsilon = -2/3, N = 3/2$) (а) и двух компонент $X_{1,3}$, пропорциональных действительной и мнимой частям комплексной лоренцевской зависимости, на всей оси z (б).

решения (5) и (8) (для областей, расположенных слева от сепаратрис $\varepsilon_{\pm}(N)$ и ниже сепаратрисы $\varepsilon_0(N)$) при $k = 1/2$. При этом решения (5), (8) и (9) оказываются аналитически сшитыми в точке ($\varepsilon = -2/3$, $N = 3/2$) за счет согласованного изменения значений параметров k , α и η при этом предельном переходе.

3. Заключение

Итак, в настоящей работе проанализированы области существования и особенности аналитических решений, полученных в [1], для задачи квазисинхронного взаимодействия четырех плоских коллинеарных монохроматических волн – мод в среде с квадратичной нелинейностью при каскадном преобразовании частоты. Показано, что в этом случае реализуются необычные типы многокомпонентных кноидальных волн и уединенных солитоноподобных решений. Две из четырех составляющих последних оказываются пропорциональными действительной и мнимой частям классической лоренцевской зависимости, которой обычно описывают дисперсию вкладов резонансных переходов в комплексную диэлектрическую проницаемость при однородном уширении линий.

Установлено, что за счет полного перекрытия диапазона возможных изменений граничных условий получен-

ные в [1] аналитические решения обеспечивают возможность оптимизации эффективности преобразования в любой конкретной ситуации. Так, выбор параметров задачи (ε и N) в области, соответствующей решениям вида (5), отвечает возможности эффективной генерации двух высокочастотных мод $A_{3,4}$. В то же время изменение значений этих параметров, отвечающее переходу в соответствующие решениям типа (6) и (7) области, позволяет реализовать преимущественную генерацию только одной из этих двух мод (A_4 и A_3 соответственно). При этом решения типа (8) отвечают одновременной генерации трех мод ($A_{1,2,4}$).

1. Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **38** (12), 1135 (2008).
2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1989); Кузнецов Д.С. *Специальные функции* (М.: Высшая школа, 1965).
3. Armstrong J.A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P.S. *Phys. Rev.*, **127**, 1918 (1962); Ахманов С.А., Хохлов Р.В. *Проблемы нелинейной оптики* (М.: ВИНТИ, 1964); Бломберген Н. *Нелинейная оптика* (М.: Мир, 1966).
4. Petnikova V.M., Shuvalov V.V., Vysloukh V.A. *Phys. Rev. E*, **60**, 1009 (1999); Выслоух В.А., Петникова В.М., Руденко К.В., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **28**, 55 (1999).
5. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* (М.: Наука, 1989).