

# Каскад бифуркации удвоения тора в лазере с отстройкой частоты

А.А.Кренц, Н.Е.Молевич

*С помощью упрощенной системы уравнений Максвелла–Блоха (с адиабатически исключенной поляризованностью среды) исследованы процессы, происходящие в поперечном сечении световой волны, которая распространяется в широкоапертурном лазере с отстройкой частоты генерации от центра линии перехода. Показано, что в исследуемой модели переход к хаотическому режиму при изменении скорости распространения волны поперек апертуры осуществляется через бифуркации удвоения эргодического двумерного тора. Найден спектр ляпуновских характеристических показателей и установлено, что в точках бифуркации рождается структурно неустойчивый трехмерный тор, который порождает устойчивый удвоенный эргодический тор.*

**Ключевые слова:** широкоапертурные лазеры, бифуркация удвоения тора, эргодический тор, ляпуновский характеристический показатель, хаос.

## 1. Введение

В настоящее время широко исследуются процессы в поперечном сечении световой волны, распространяющейся в широкоапертурных лазерных и пассивных оптических системах. В [1] было показано, что с увеличением числа Френеля в широкоапертурном резонаторе Nd:YAG-лазера происходит переход от стационарных поперечных картин интенсивности к периодическим, квазипериодическим и хаотическим картинам. Аналогичные результаты получены в [2] для электроразрядного CO<sub>2</sub>-лазера, работающего на одной продольной моде. В широкоапертурном лазере (при числах Френеля свыше 30) почти постоянная по поперечному сечению пучка интенсивность становится периодически промодулированной в пространстве и слабо промодулированной во времени с частотой ~ 150 кГц, зависящей от отстройки частоты моды от центра линии перехода. С увеличением числа Френеля, отстройки частоты или величины накачки зависимости интенсивности от поперечной координаты и времени становились сильно нерегулярными с полной потерей пространственной и временной корреляции. В [3] впервые показано, что наблюдаемые эффекты могут быть качественно объяснены на основе простой системы уравнений Максвелла–Блоха с отстройкой от частоты продольной моды, которая описывает рождение бегущих периодических волн в результате бифуркации Андронова–Хопфа.

В работе [4] найдено условие, при котором можно адиабатически исключить поляризованность среды из уравнений Максвелла–Блоха. Исследование таких упрощенных уравнений также показало, что при отрицательной отстройке частоты возможно возникновение периодических модуляций интенсивности волн, бегущих поперёк апертуры; найдены в аналитическом виде инкременты нарастания, частота и скорость этих волн [5–7].

В настоящей работе с помощью автомодельной системы уравнений, предложенной в [5], исследовано изменение структуры оптического поля в поперечном сечении пучка от периодического к хаотическому при изменении скорости распространения волны поперёк апертуры и показано, что переход к хаосу происходит через каскад бифуркаций удвоения тора.

## 2. Основные уравнения. Линейный анализ устойчивости

В качестве исходной, как и в [5], рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial E}{\partial t} - i \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\nu}{2} E \left( \frac{N}{1 + A_0^2} - 1 \right) + \frac{i\nu E}{2} \left( 2A_{\text{cav}} - \frac{A_0}{1 + A_0^2} N \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = N_{\text{un}} - N \left( 1 + \frac{J}{1 + A_0^2} \right).$$

Система уравнений (1) описывает пространственно-временную динамику лазерного излучения в предположении, что поляризованность среды мгновенно отслеживает изменения оптического поля. Такая модель в литературе часто называется стандартным адиабатическим исключением поляризованности. Предполагается также, что генерация происходит на одной продольной

А.А.Кренц. Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П.Королева, Россия, 443086 Самара, Московское ш., 34; e-mail: krenz86@mail.ru

Н.Е.Молевич. Самарский филиал Физического института им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 443011 Самара, ул. Ново-Садовая, 221; e-mail: molevich@fian.smr.ru

Поступила в редакцию 7 августа 2008 г., после доработки – 15 октября 2008 г.

моде резонатора Фабри–Перо. Здесь  $E$  – медленно меняющаяся амплитуда поля в широкоапертурном лазере в одномерном (планарном) приближении, нормированная на  $E_s$  – амплитуду поля насыщения в активной среде;  $N = g/g_t$ ;  $g, g_t$  – коэффициенты усиления активной среды на центральной частоте лазерного перехода и потерь, усредненные по длине резонатора соответственно; безразмерное время  $t$  и координата  $x$  связаны с размерными величинами  $t_d$  и  $x_d$  как  $t = t_d/T_i$ ;  $x = x_d(2k/T_i c)^{1/2}$ ;  $k$  – волновое число;  $c$  – скорость света;  $T_i$  – время релаксации населенности уровней активной среды;  $v = cT_i g_t$  – коэффициент, определяющий отношение времени релаксации населенности активной среды к времени жизни фотонов в резонаторе;  $A_{cav} = (\omega - \omega_{cav})/cg_t$  – отстройка частоты генерации  $\omega$  от частоты моды пустого резонатора  $\omega_{cav}$ , нормированная на ширину линии резонатора;  $A_0 = (\omega_0 - \omega)T_p$  – отстройка частоты генерации от центральной частоты  $\omega_0$  линии усиления активной среды, нормированная на полуширину линии усиления;  $T_p$  – время релаксации поляризованности;  $J = |E|^2$ ;  $N_{un} = g_{un}/g_t$ ;  $g_{un}$  – ненасыщенный коэффициент усиления на частоте  $\omega_0$ .

Условия применимости (1) обсуждались в работах [8–10] и сводятся к следующему. Во-первых, амплитуда поля мало изменяется за обход резонатора; во-вторых, в однородную линию усиления попадает достаточно большое число поперечных мод и либо одна продольная мода резонатора, либо несколько продольных мод, поперечные структуры которых различаются несущественно. Это выполняется при условии  $\Delta\omega/\omega \ll N_F^{-1/2}$ , где  $\Delta\omega/\omega$  – относительная ширина спектра генерации,  $N_F$  – число Френеля.

Система уравнений (1) имеет два однородных состояния равновесия. Первое из них соответствует отсутствию генерации ( $E = 0, N = N_{un}$ ), второе ( $E = E_{st}, N = N_{st} = 1 + A_0^2, A_{cav} = A_0/2$ ) – режиму стационарной генерации с интенсивностью  $J_{st} \equiv |E_{st}|^2 = N_{un} - 1 - A_0^2$ .

Будем искать автомодельное решение системы уравнений (1) в виде бегущих с постоянной скоростью волн интенсивности. Для этого используем автомодельную замену переменных  $\xi = t - \beta x$ , где  $\beta^{-1}$  – скорость волны, распространяющейся в поперечном к оси резонатора направлении. В этой модели конечность апертуры резонатора не учитывается.

Линейный анализ, проведенный в [5], показал, что если частотная отстройка  $A_0 < 0$ , то при

$$\beta > \beta_{cr} = \left[ \frac{-(1 + I_{st})A_0}{(1 + I_{st})^2 + A_0^2 v I_{st}} \right]^{1/2}, \quad I_{st} = \frac{J_{st}}{1 + A_0^2}$$

режим однородной стационарной генерации оказывается неустойчивым. При  $\beta = \beta_{cr}$  происходит бифуркация Андронова–Хопфа, в результате чего рождается семейство периодических волн интенсивности малой амплитуды, параметризованных при помощи  $\beta$ . В точке бифуркации частота модуляции интенсивности соответствует

$$\omega_{bif} = \frac{(N_{un}^2 + A_0^2 v I_{st})^{1/2}}{|A_0|}.$$

На рис. 1 построена зависимость инкремента неустойчивости  $G$  в стационарном состоянии от  $\beta$  при параметрах лазерной системы  $N_{un} = 5, v = 4.4, A_0 = -1$ , взятых из работы [5]. Как видно из рисунка, при  $\beta = \beta_{max}$  инк-

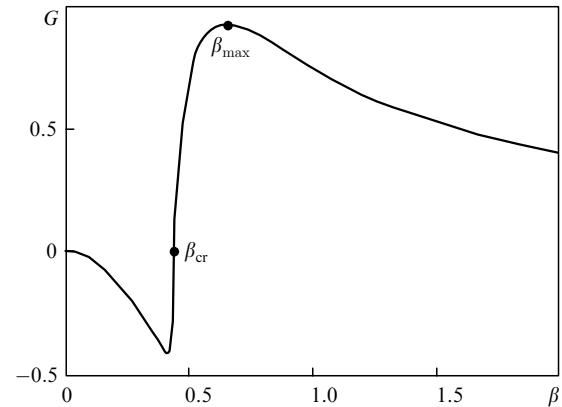


Рис. 1. Зависимость инкремента нарастания неустойчивости  $G$  от  $\beta$ .

ремент максимален. Можно ожидать, что без внешнего воздействия (например, наклона зеркал) на апертуре будут доминировать волны именно с максимальным инкрементом нарастания. Значение  $\beta_{max}$  определяется параметрами лазерной системы и может значительно превышать бифуркационное значение  $\beta_{cr}$ . Ниже подробно исследуется изменение нелинейной динамики лазерного излучения при увеличении параметра  $\varepsilon = (\beta - \beta_{cr})/\beta_{cr}$ .

### 3. Динамика лазерной системы при $\beta > \beta_{cr}$

Нелинейную стадию развития возмущений режима однородной стационарной генерации при  $A_0 < 0$  исследуем методами численного моделирования системы уравнений (1), записанной в автомодельном виде (с использованием замены переменных  $\xi = t - \beta x$ ). Для этого комплексную величину поля представим в виде  $E = E' + iE''$ . Таким образом, получим динамическую систему с размерностью  $n = 5$  и начальными условиями, соответствующими малым отклонениям  $E$  и  $N$  от их стационарных значений.

Параметры лазерной среды соответствовали указанным в предыдущем разделе. В результате было получено, что при  $\varepsilon < 0$  режим однородной стационарной генерации устойчив, установившиеся периодические решения появляются только при  $\varepsilon > 0$ . Дальнейшее увеличение параметра  $\varepsilon$  приводит к бифуркациям удвоения периода колебаний интенсивности излучения, на что впервые было указано в [5].

На рис. 2 построены фазовые портреты на плоскости  $(J, dJ/dt)$ , форма колебаний интенсивности и её спектр. Кроме основной частоты в спектре присутствуют её гармоники  $-2\omega, 3\omega$  и т. д. В последовательности бифуркаций удвоения периода возникают субгармоники частоты  $\omega$  и их линейные комбинации. В настоящей работе получено, что при переходе через критическое значение параметра  $\varepsilon \approx 0.078$  спектр становится сплошным.

На рис. 3 приведена фазопараметрическая диаграмма, иллюстрирующая переход к хаосу через каскад удвоения периода. При построении на оси абсцисс откладывался управляющий параметр  $\varepsilon$ , а на оси ординат – возможные значения максимумов интенсивности. Из этой диаграммы, а также из структуры фазового портрета (см. рис. 2, а) видно, что рождение  $2^l$  периодов ( $l > 1$ ) происходит для разных «ветвей интенсивности» не одновременно.

До сих пор речь шла о динамике интенсивности генерации, определяемой как  $J = E'^2 + E''^2$ . Другой сцена-

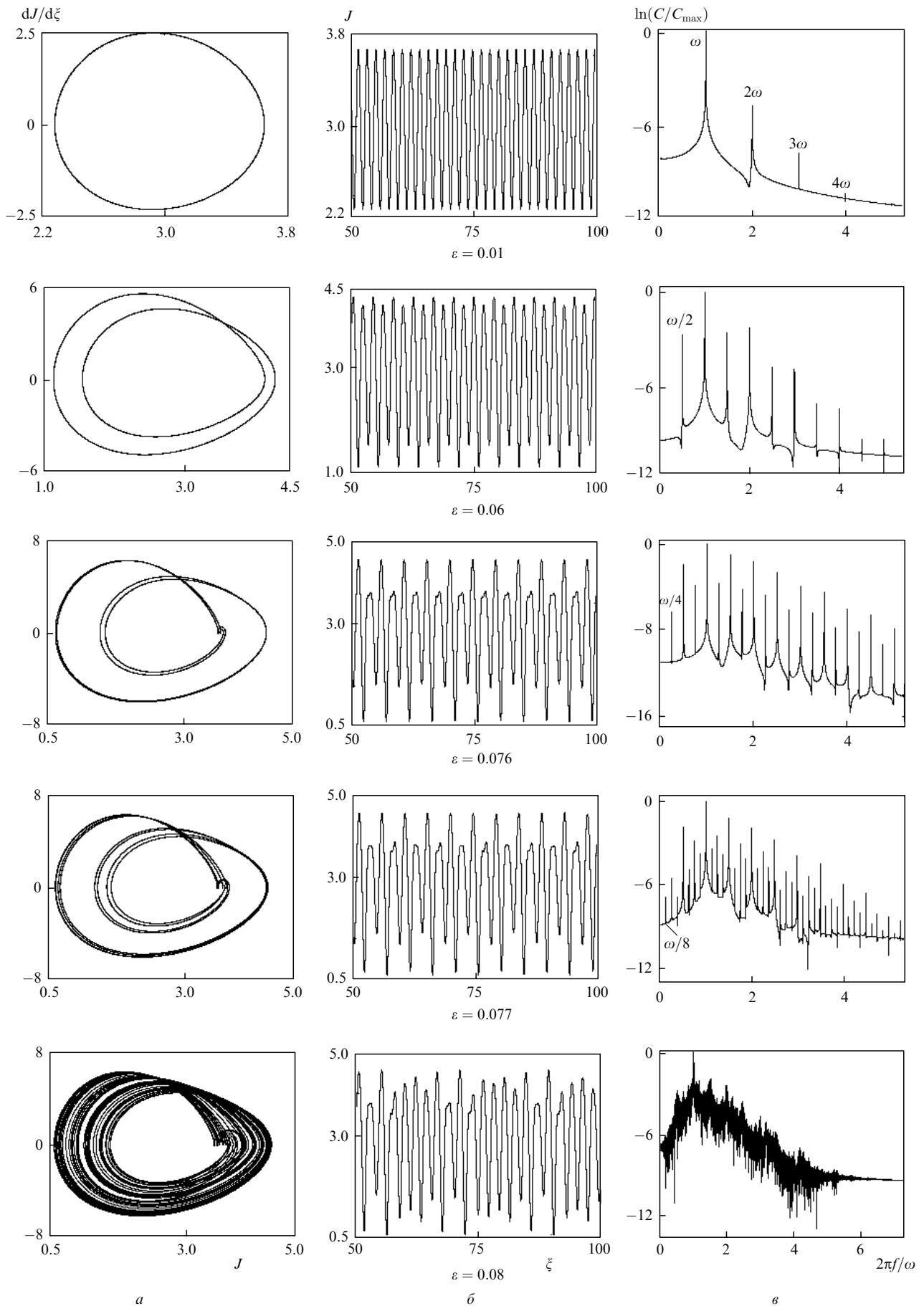


Рис.2. Последовательность бифуркаций удвоения периода при изменении параметра  $\varepsilon$ : фазовая плоскость (а), форма колебаний интенсивности (б) и её спектр (в);  $C$  – мощность спектра,  $C_{\max}$  – максимальное значение мощности,  $f$  – линейная частота.

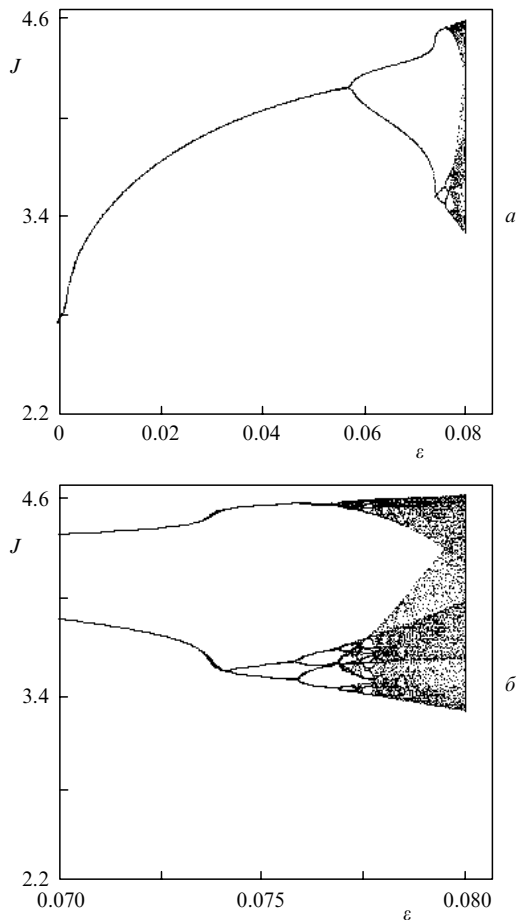


Рис.3. Фазопараметрическая диаграмма (а) и её увеличенный фрагмент (б).

рий перехода к хаосу наблюдается при рассмотрении динамики самих компонент поля ( $E'$ ,  $E''$ ).

На рис.4 показаны проекции траекторий в пространстве ( $E'$ ,  $E''$ ,  $N$ ), сечение Пуанкаре плоскостью  $N = N_{st}$  (учитывались лишь точки, в которых знак разности  $N - N_{st}$  менялся с плюса на минус) и спектр колебаний  $E'$ . При малых значениях управляющего параметра  $\varepsilon$  любые малые отклонения от положения равновесия притягиваются к аттрактору, который является двумерным эргодическим тором. Как видно из рис.4, при увеличении управляющего параметра  $\varepsilon$  наблюдаются бифуркации удвоения тора, приводящие в конечном итоге к хаотическому режиму колебаний. После первой бифуркации при  $\varepsilon \approx 0.056$  и появления второго (внутреннего) тора последующие бифуркации происходят, прежде всего, с внутренними торами. Помимо процесса на частоте  $\omega$ , который претерпевает бифуркации удвоения периода, в спектре присутствует сигнал на второй частоте  $\Omega$ , не испытывающий бифуркаций удвоения, а также гармоника  $\omega + 2\Omega$ , связанная с кубической нелинейностью системы (1) (рис.4,б). Форма колебаний компоненты поля  $E'(\xi)$  и фазы поля  $\varphi(\xi) = \arctan[E''(\xi)/E'(\xi)]$  при  $\varepsilon = 0.05$  представлена на рис.5. Видно, что отношение частот меняется примерно как  $\omega/\Omega \sim 1/\varepsilon$ . В свою очередь это означает, что тор является эргодическим, за исключением тех значений управляющего параметра, при которых отношение частот  $\omega/\Omega$  становится рациональным числом.

С точки зрения нелинейной динамики рассматриваемой системы особый интерес представляет спектр ляпу-

новских характеристических показателей (ЛХП), особенно в точках бифуркации удвоения периода, т.к. он даёт возможность понять механизм бифуркации. На рис.6 показаны зависимости пяти ЛХП ( $\lambda_1 - \lambda_5$ ) от параметра  $\varepsilon$ . Два показателя ( $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ) не зависят от  $\varepsilon$  и равны нулю, что соответствует двумерному тору. В точках бифуркации (точки А, В, С, D, Е) нулю оказываются равными сразу три показателя. Сигнатура спектра ЛХП при бифуркациях в точках В, С, D меняется как

$$0, 0, -, -, - \rightarrow 0, 0, 0, -, - \rightarrow 0, 0, -, -, -,$$

что соответствует рождению в точке бифуркации структурно-неустойчивого трехмерного тора, который порождает далее устойчивый удвоенный эргодический тор [11].

Сигнатура спектра ЛХП при бифуркации в точке Е меняется как

$$0, 0, -, -, - \rightarrow 0, 0, 0, -, - \rightarrow +, 0, 0, -, -,$$

т.е. старший ляпуновский показатель становится положительным, что свидетельствует о переходе к хаотическим колебаниям.

Нетрудно посчитать дивергенцию поля фазовых скоростей нашей системы, усредненную по траектории:  $\langle \text{div}F \rangle = -1 - J_{st}/(1 + \Delta_0^2) = -2.5$  (параметры системы указаны выше). С другой стороны,  $\langle \text{div}F \rangle = \sum \lambda_i \approx -2.5$ , где  $\lambda_i$  – соответствующий ляпуновский показатель. Это тождество подтверждается результатами численного расчета спектра ЛХП с погрешностью не хуже 1.5%.

#### 4. Заключение

Известно, что бифуркация удвоения тора возможна только в системах с размерностью  $n \geq 4$ , которые являются гораздо менее изученными, чем системы с меньшей размерностью. Как указано в [11], несмотря на то что удвоение двумерного тора было открыто много лет назад [12–14], детали этой бифуркации до сих пор во многом остаются неясными и поиск простых автономных моделей, позволяющих реализовывать режимы устойчивого двумерного тора, бифуркации удвоения тора и переходы к хаосу, является актуальным. В [11] найдены условия бифуркации удвоения тора в модифицированной модели инерционного генератора Анищенко – Астахова. В [15] впервые предложена автономная точечная модель, описывающая бифуркацию удвоения тора в двухмодовом лазере с насыщающимся фильтром.

Как показано в настоящей работе, реализация сценария перехода к хаосу через бифуркации удвоения тора возможна также в простой автономной модели системы уравнений, описывающей динамику одномодового лазера с отстройкой частоты при адиабатическом исключении поляризованности среды. Управляющим параметром здесь фактически является обратная скорость волны  $\beta_{\max}$ , зависящая в неявном виде от параметров лазерной системы (прежде всего от  $\nu$ ,  $N_{\text{un}}$ ,  $\Delta_0$ ). Исследование численным методом распределённой модели (1) (не в автономном виде), проведённое ранее в [6], также продемонстрировало переход при изменении указанных параметров лазерной системы от регулярных оптических картин с бегущими в поперечном направлении волнами (со скоростью, зависящей от  $\nu$ ,  $N_{\text{un}}$ ,  $\Delta_0$ ) к хаотическим картинкам. Сценарий перехода к хаосу в [6] исследован не был. В этой

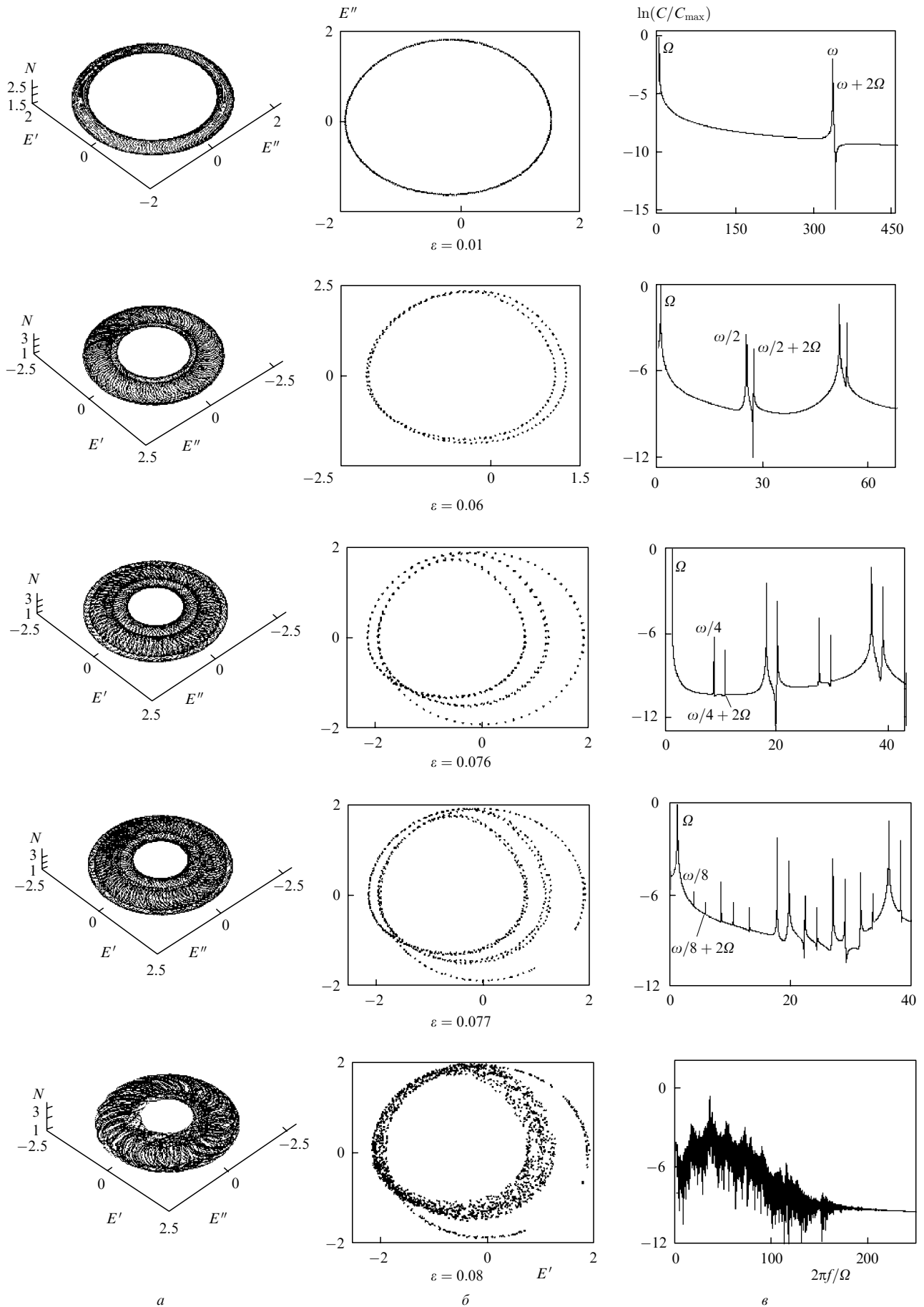


Рис.4. Последовательность бифуркаций удвоения тора при изменении параметра  $\varepsilon$ : фазовый объём (а), сечение Пуанкаре (б), спектр колебаний (в).

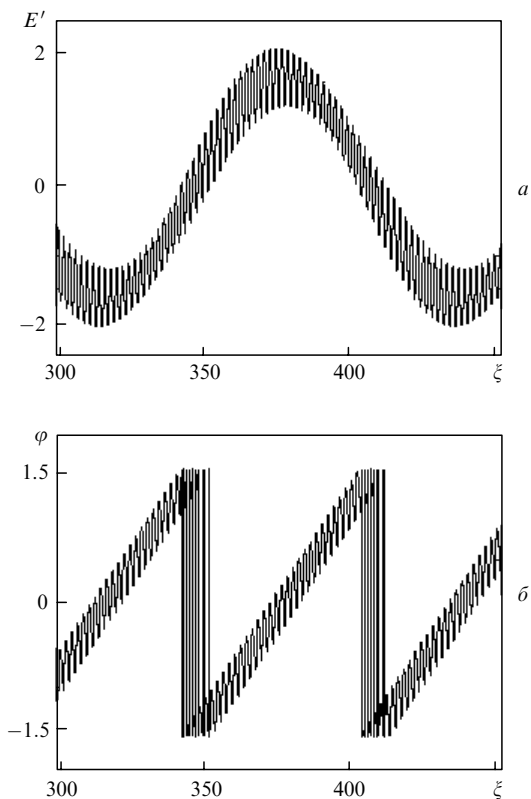


Рис.5. Колебания компоненты поля  $E'(\xi)$  (а) и фазы поля  $\varphi(\xi)$  (б).

связи интерес для дальнейших исследований представляет проверка существования рассмотренного в настоящей работе сценария перехода к хаосу через бифуркацию удвоения тора в более сложных моделях, включая как распределённую модель (1), так и полную систему уравнений Максвелла–Блоха (учитывающую конечность времени релаксации поляризованности среды).

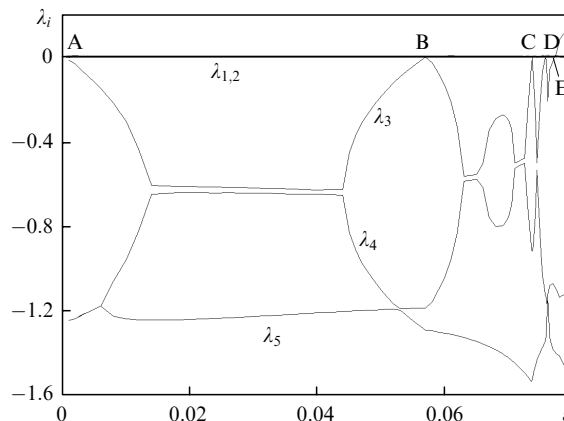


Рис.6. Спектр ляпуновских характеристических показателей.

1. Hollinger F., Jung Chr., Weber H. *Opt. Commun.*, **75**, 84 (1990).
2. Huyet G., Tredicce J.R. *Phys. D*, **96**, 209 (1996).
3. Huyet G., Martinoni M.C., Tredicce J.R., Rica S. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4027 (1995).
4. Заикин А.П., Молевич Н.Е. *Квантовая электроника*, **8**, 731 (2004).
5. Заикин А.П., Кургузкин А.А., Молевич Н.Е. *Квантовая электроника*, **27**, 246 (1999).
6. Заикин А.П., Кургузкин А.А., Молевич Н.Е. *Квантовая электроника*, **27**, 249 (1999).
7. Заикин А.П., Кургузкин А.А., Молевич Н.Е. *Изв. вузов. Сер. «Прикладная нелинейная динамика»*, **7**, 87 (1999).
8. Сучков А.Ф. *ЖЭТФ*, **49**, 1495 (1965).
9. Летохов В.С., Сучков А.Ф. *ЖЭТФ*, **50**, 1148 (1966).
10. Розанов Н.Н. *Оптическая бистабильность и гистерезис в распределённых системах* (М.: Наука, 1997).
11. Анищенко В.С., Николаев С.М. *Письма в ЖТФ*, **31**, 88 (2005).
12. Анищенко В.С. *Тез. III Всес. конф.* (Вильнюс: изд-во АН ЛитССР, 1983, с. 24).
13. Franceschini V. *Phys. D*, **6**, 285 (1983).
14. Kaneko K. *Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems* (Singapore: World Scientific, 1986).
15. Letellier C., Bennoud M., Martel G. *Chaos, Solitons and Fractals*, **33**, 782 (2007).