

# Симметрия пространственной структуры излучения при синхронизации поперечных мод в лазере с астигматическим резонатором

В.В.Безотосный, М.В.Горбунков, П.В.Кострюков, В.Г.Тункин, Е.А.Чешев, Д.В.Яковлев

*Проанализировано влияние параметров астигматического резонатора на симметрию пространственной структуры интенсивности излучения при синхронизации поперечных мод в лазере с неоднородной накачкой. Определены условия перехода от круговой симметрии к случаю ее нарушения. При фиксированном астигматизме резонатора симметрия определяется, прежде всего, длиной резонатора и потерями. Теоретические выводы подтверждены экспериментами с Nd: YAG- и Nd: YLF-лазерами с неоднородной продольной диодной накачкой.*

**Ключевые слова:** диодная накачка, резонаторы, синхронизация поперечных мод.

## 1. Введение

Использование продольной диодной накачки твердотельных лазеров позволяет достигать высокой эффективности генерации за счет формирования неоднородного профиля усиления [1]. В работах [2–5] изучалась пространственная структура излучения непрерывных Nd: YVO<sub>4</sub>- и Nd: YAG-лазеров с продольной диодной накачкой. Было обнаружено, что при накачке пучком, узким по сравнению с поперечным размером гауссовой моды пустого резонатора, существует дискретный ряд так называемых критических конфигураций резонатора, для которых пространственная структура выходного излучения заметно отличается от гауссовой. Существование критических конфигураций связывается с вырождением мод пустого резонатора по частоте [6], которое реализуется при условии

$$\frac{\arccos \pm \sqrt{g_1 g_2}}{\pi} = \frac{r}{s}, \quad (1)$$

где  $r/s$  – несократимая дробь;  $g_{1,2} = 1 - L/R_{1,2}$  – параметры конфигурации резонатора;  $L$  – длина резонатора;  $R_{1,2}$  – радиусы кривизны зеркал. Пространственная неоднородность накачки при выполнении условия (1) приводит к синхронизации поперечных мод [7, 8]. При этом основная мода представляет собой суперпозицию сфазированных вырожденных мод пустого резонатора. В упомянутых работах использовались относительно короткие резонаторы, образованные сферическим выходным зеркалом с радиусом кривизны  $R \leq 15$  см, пропусканием  $T < 15\%$  и плоским зеркалом, напыленным на грань ла-

зерного кристалла. Формирующаяся при этом основная мода имеет распределение интенсивности с характерной кольцевой структурой и представляет собой суперпозицию лаггер-гауссовых мод пустого резонатора.

Синхронизация поперечных мод при пространственно-неоднородной накачке в Nd: YAG-лазере и использовании выходного зеркала с  $R = 150$  см и  $T < 1\%$  в условиях проявления астигматизма активной среды изучалась в [9]. Обнаружено, что симметрия пространственной структуры излучения отличается от круговой. Для каждого из 15 проявляющихся вырождений  $r/s$  установлено наличие двух длин резонатора –  $L_x^{\text{deg}}$  и  $L_y^{\text{deg}}$ , при которых распределения интенсивности вытягиваются в двух взаимно перпендикулярных направлениях, представляя собой суперпозиции эрмит-гауссовых мод. Обнаруженное нарушение круговой симметрии объясняется в [9] наличием у активной среды слабого астигматизма, т. е. неравенства оптических сил  $D_x$  и  $D_y$  лазерного кристалла, что, по-видимому, связано с нарушением плоскостности поверхностей при обработке кристалла и/или с неоднородным распределением показателя преломления в нем. В [9] установлено, что неравенство оптических сил  $D_x$ ,  $D_y$  кристалла приводит к тому, что условия вырождения для эрмит-гауссовых мод семейств  $\text{HG}_{m0}$  и  $\text{HG}_{0n}$  с ненулевыми первым и вторым индексами реализуются отдельно, соответственно при длинах  $L_x^{\text{deg}}$  и  $L_y^{\text{deg}}$ . Такое расщепление вырождения, вызывающее нарушение круговой симметрии, позволило экспериментально измерить величину астигматизма лазерных кристаллов. Оптические силы  $D_x$ ,  $D_y$ , характеризующие астигматизм активной среды, для исследованных в [9] пяти различных кристаллов YAG: Nd попадают в диапазон  $-0.03 \dots + 0.2 \text{ м}^{-1}$ . Было отмечено, что такие значения астигматизма не приводят к заметной эллиптичности гауссовых распределений интенсивности при достаточной отстройке от вырождения: расчетное отношение радиусов пучка на выходном зеркале  $w_x/w_y \sim 1.01$ .

Таким образом, можно выделить два характерных случая, реализующихся при синхронизации поперечных мод в лазере с астигматическим резонатором: распределение интенсивности с кольцевой структурой [2–5] и расщепление вырождения, приводящее к нарушению круго-

В.В.Безотосный, М.В.Горбунков, Е.А.Чешев. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: victorbe@sci.lebedev.ru; gorbunk@sci.lebedev.ru  
П.В.Кострюков, В.Г.Тункин, Д.В.Яковлев. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; e-mail: kostryukov@gmail.com

Поступила в редакцию 15 октября 2008 г., после доработки – 13 марта 2009 г.

вой симметрии [9]. В настоящей работе мы определяем условия реализации обоих случаев.

## 2. Условия реализации круговой симметрии и ее нарушения

Рассмотрим лазер, тонкая активная среда которого имеет оптические силы  $D_x$  и  $D_y$ . Глухое зеркало напылено на грань, обращенную к накачке, выходное сферическое зеркало имеет радиус кривизны  $R$  и коэффициент пропускания  $T$ . Радиусы зеркал будем полагать большими, чтобы обеспечить существование в резонаторе достаточного количества мод. Как и в аксиально-симметричном случае, введем  $g$ -параметры резонатора

$$g_1^x = 1 - D_x \frac{L}{2}, \quad g_1^y = 1 - D_y \frac{L}{2}, \quad g_2^x = g_2^y = 1 - \frac{L}{R}. \quad (2)$$

Рассмотрим окрестность точки, соответствующей  $L_0 = R[1 - \cos^2(\pi r/s)]$  (рис.1). Здесь  $L_0$  – длина резонатора, отвечающая вырождению  $r/s$  при  $D_x = D_y = 0$ . Неравенство оптических сил ( $D_x \neq D_y$ ) приводит к расщеплению  $L_0$  на  $L_y^{\text{deg}}$  и  $L_x^{\text{deg}}$ , для которых условие вырождения (1) выполняется для  $g_1^x g_2^x$  и  $g_1^y g_2^y$  отдельно:

$$\frac{\arccos \pm \sqrt{g_1^x g_2^x}}{\pi} = \frac{r}{s}, \quad \frac{\arccos \pm \sqrt{g_1^y g_2^y}}{\pi} \neq \frac{r}{s} \quad \text{при } L = L_x^{\text{deg}},$$

$$\frac{\arccos \pm \sqrt{g_1^x g_2^x}}{\pi} \neq \frac{r}{s}, \quad \frac{\arccos \pm \sqrt{g_1^y g_2^y}}{\pi} = \frac{r}{s} \quad \text{при } L = L_y^{\text{deg}}.$$

Таким образом, при  $L = L_x^{\text{deg}}$  вырождены эрмит-гауссовы моды  $\text{HG}_{m0}$  с  $m = \Delta m j$ , а при  $L = L_y^{\text{deg}}$  – моды  $\text{HG}_{0n}$  с  $n = \Delta n j$ , где  $j = 0, 1, 2 \dots$ ;  $\Delta m$  и  $\Delta n$  равны друг другу и принимают значения  $s$  или  $2s$  для четных или нечетных  $s$  соответственно (см., напр., [10]). Из (1) и (2) следует выражение, связывающее расстояние между точками  $\Delta L_{x,y}^{\text{deg}} = L_x^{\text{deg}} - L_y^{\text{deg}}$  с оптическими силами  $D_{x,y}$ :

$$\begin{aligned} \Delta L_{x,y}^{\text{deg}} &\equiv |L_x^{\text{deg}} - L_y^{\text{deg}}| \approx \frac{1}{8} R^2 \sin^2 \left( 2\pi \frac{r}{s} \right) |D_x - D_y| \\ &= \frac{1}{2} L_0^2 \cot^2 \left( \pi \frac{r}{s} \right) |D_x - D_y|. \end{aligned} \quad (3)$$

Данная формула с точностью до обозначений совпадает с выражением, полученным в [11]. Отметим, что  $\Delta L_{x,y}^{\text{deg}}$  пропорционально квадрату  $L_0$  и, следовательно, чем больше длина резонатора, тем сильнее проявляется астигматизм.

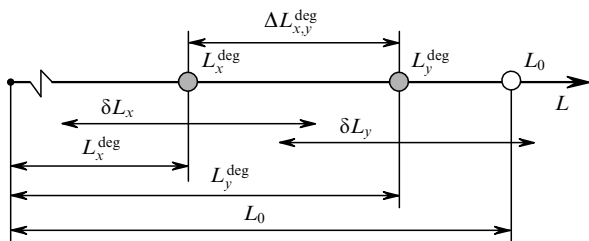


Рис.1. Характерные длины резонатора вблизи вырождения:  $L_0$  – длина, соответствующая  $D_x = D_y = 0$ ;  $L_x^{\text{deg}}$  и  $L_y^{\text{deg}}$  – длины, соответствующие вырождениям мод  $\text{HG}_{m0}$  и  $\text{HG}_{0n}$  при  $D_x \neq D_y$ ;  $\Delta L_{x,y}$  – эффективные ширины областей синхронизации.

Будем предполагать, что эффективный радиус пучка накачки в активной среде  $w_p$  достаточно мал для того, чтобы обеспечить синхронизацию поперечных мод [12]. Синхронизация поперечных мод семейств  $\text{HG}_{m0}$  и  $\text{HG}_{0n}$  реализуется в пределах некоторых областей длин резонатора с центрами в точках, соответствующих длинам  $L_x^{\text{deg}}$  и  $L_y^{\text{deg}}$ , с ширинами  $\delta L_x$  и  $\delta L_y$ . Далее под шириной области синхронизации  $\delta L_{x,y}$  будем понимать ширину диапазона отстроек от строгого вырождения, в пределах которого доля мощности, приходящаяся на высшие моды, составляет не менее половины значения, которое реализуется при строгом вырождении.

Для оценки ширины областей синхронизации  $\delta L_x$  и  $\delta L_y$  воспользуемся результатами, полученными авторами в [12]. В этой работе для случая синхронизации поперечных аксиально-симметричных лаггерр-гауссовых мод (с нулевым угловым индексом) получена оценка ширины области синхронизации в координатах  $g_1, g_2$  (формула (23) в [12]):

$$\begin{aligned} \Delta(g_1 g_2)^{\text{LG}} &= 2 \sin \left( 2\pi \frac{r}{s} \right) \left[ 2\Delta p \left( \frac{t_{\Delta p, \Delta p} \gamma_{\Delta p}}{t_{0,0} \gamma_0} \right)^{1/2} \right]^{-1} \\ &\times \left( 1 - \frac{\gamma_{\Delta p}}{\gamma_0} \frac{t_{\Delta p, \Delta p}}{t_{0,0}} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Delta p$  – минимальная разность значений радиального индекса вырожденных мод; величины  $1 - \gamma_0^2$  и  $1 - \gamma_{\Delta p}^2$  определяют дифракционные потери мод;  $t_{0,0}, t_{\Delta p, \Delta p}$  – матричные элементы профиля усиления в базисе лаггерр-гауссовых мод. Выражение (4) дает ширины областей синхронизации, которые не более чем на 10 % отличаются от ширин, полученных методом Фокса – Ли. В [12] показано, что ширины областей синхронизации увеличиваются с ростом коэффициента усиления, а следовательно, с ростом потерь в резонаторе, и практически не зависят от относительного диаметра пучка накачки (см. рис.1 и 2 в [12]). Для распространения выражения (4) на случай синхронизации эрмит-гауссовых мод семейства  $\text{HG}_{m0}$  ( $\text{HG}_{0n}$ ) необходимо заменить матричные элементы  $t_{0,0}$  и  $t_{\Delta p, \Delta p}$  на аналогичные величины  $t_{00,00}$  и  $t_{\Delta m0, \Delta m0}$  ( $t_{00,00}$  и  $t_{0\Delta n, 0\Delta n}$ ), определяемые в базисе эрмит-гауссовых функций:

$$t_{mm', m'n'} = \int \text{HG}_{mm}^*(x, y) K(x, y) \text{HG}_{m'n'}(x, y) dx dy, \quad (5)$$

где  $\text{HG}_{mm}(x, y)$  и  $\text{HG}_{m'n'}(x, y)$  – комплексные амплитуды эрмит-гауссовых пучков в плоскости активной среды. Кроме того, в (4) необходимо заменить  $2\Delta p$  на  $\Delta m$  ( $\Delta n$ ), поскольку фазовые набег лаггерр- и эрмит-гауссовых пучков пропорциональны  $2p + l + 1$  и  $m + n + 1$  соответственно (см., напр., [13]). Будем считать поперечные размеры зеркал достаточно большими, чтобы пренебречь различием в дифракционных потерях рассматриваемых пучков. Таким образом, получим оценку ширин областей синхронизации эрмит-гауссовых мод семейств  $\text{HG}_{m0}$  и  $\text{HG}_{0n}$ :

$$\begin{aligned} \Delta(g_1 g_2)^{\text{HG}_{m0}} &= 2 \sin \left( 2\pi \frac{r}{s} \right) \left[ \Delta m \left( \frac{t_{\Delta m0, \Delta m0}}{t_{00,00}} \right)^{1/2} \right]^{-1} \\ &\times \left( 1 - \frac{t_{\Delta m0, \Delta m0}}{t_{00,00}} \right), \end{aligned} \quad (6a)$$

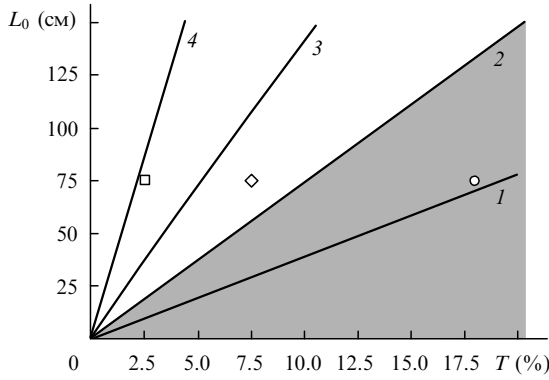


Рис.2. Линии раздела характерных областей (9) и (10) для полуконфокальной конфигурации резонатора ( $r/s = 1/4$ ,  $L_0 = R/2$ ) в координатах  $L_0$ ,  $T$ , соответствующие равенству  $\Delta L_{x,y}^{\text{deg}} = \delta L_{x,y}$  при  $\omega_p = 100$  мкм и  $D_x - D_y = 0.2$  (1), 0.1 (2), 0.05 (3) и 0.02 м $^{-1}$  (4). Область реализации круговой симметрии для  $D_x - D_y = 0.1$  м $^{-1}$  выделена серым цветом. Точки  $\square$ ,  $\diamond$ ,  $\circ$  соответствуют комбинациям  $L_0$  и  $T$ , для которых на рис.3 приведены распределения интенсивности.

$$\Delta(g_1 g_2)^{\text{HG}_{0n}} = 2 \sin \left( 2\pi \frac{r}{s} \right) \left[ \Delta n \left( \frac{t_{0\Delta n, 0\Delta n}}{t_{00,00}} \right)^{1/2} \right]^{-1} \times \left( 1 - \frac{t_{0\Delta n, 0\Delta n}}{t_{00,00}} \right). \quad (66)$$

Отсюда ширина области синхронизации в координатах длины резонатора

$$\delta L_{x,y} = \Delta(g_1 g_2)^{\text{HG}_{m0,0n}} \left| \frac{\partial(g_1 g_2)}{\partial L} \right|^{-1} = \Delta(g_1 g_2)^{\text{HG}_{m0,0n}} \times L_0 \left[ \sin^2 \left( \pi \frac{r}{s} \right) \right]^{-1}, \quad (7)$$

и далее имеем

$$\delta L_x = 4L_0 \cot \left( \pi \frac{r}{s} \right) \left[ \Delta m \left( \frac{t_{\Delta m 0, \Delta m 0}}{t_{00,00}} \right)^{1/2} \right]^{-1} \left( 1 - \frac{t_{\Delta m 0, \Delta m 0}}{t_{00,00}} \right), \quad (8a)$$

$$\delta L_y = 4L_0 \cot \left( \pi \frac{r}{s} \right) \left[ \Delta n \left( \frac{t_{0\Delta n, 0\Delta n}}{t_{00,00}} \right)^{1/2} \right]^{-1} \left( 1 - \frac{t_{0\Delta n, 0\Delta n}}{t_{00,00}} \right). \quad (8b)$$

Очевидно, расщепление вырождения проявляется, если  $\Delta L_{x,y}^{\text{deg}}$  значительно превышает эффективные ширины  $\delta L_x$  и  $\delta L_y$  областей синхронизации поперечных мод семейств  $\text{HG}_{m0}$  и  $\text{HG}_{0n}$  с центрами в точках, соответствующих  $L_x^{\text{deg}}$  и  $L_y^{\text{deg}}$ :

$$\Delta L_{x,y}^{\text{deg}} > \delta L_{x,y}. \quad (9)$$

В случае выполнения (9) можно считать, что основная мода при  $L \approx L_x^{\text{deg}}$  образована преимущественно модами семейства  $\text{HG}_{m0}$ , а вклад мод семейства  $\text{HG}_{0n}$  пренебрежимо мал. Наоборот, при  $L \approx L_y^{\text{deg}}$  пренебрежимо мал вклад мод семейства  $\text{HG}_{m0}$ .

Соответственно при условии

$$\Delta L_{x,y}^{\text{deg}} \ll \delta L_{x,y} \quad (10)$$

расстоянием между  $L_x^{\text{deg}}$  и  $L_y^{\text{deg}}$  относительно  $\delta L_{x,y}$  можно пренебречь, что должно приводить к отсутствию расщепления.

На рис.2 для полуконфокальной конфигурации резонатора ( $r/s = 1/4$ ,  $L_0 = R/2$ ) в координатах  $L_0$ ,  $T$  представлены линии, на которых выполняется равенство  $\Delta L_{x,y}^{\text{deg}} = \delta L_{x,y}$  при различных значениях  $D_x - D_y$ . Данные линии рассчитывались по формулам (3), (8) и представляют собой линии раздела характерных областей (9) и (10). В расчетах использовался гауссов профиль усиления (см. формулу (2) в [12]). Видно, что для перехода к случаю круговой симметрии необходимо уменьшать длину резонатора и/или увеличивать потери в нем.

На рис.3 представлены распределения интенсивности основной моды на выходном сферическом зеркале, рассчитанные для полуконфокальной конфигурации при фиксированном  $L_0 = 750$  мм и характерных значениях  $T$ . Комбинации  $L_0$  и  $T$ , для которых на рис.3 приведены распределения интенсивности, обозначены на рис.2 точками  $\square$ ,  $\diamond$  и  $\circ$ . Точки  $\square$  и  $\circ$  находятся в характерных областях, а точка  $\diamond$  лежит вблизи их линии раздела. Ре-

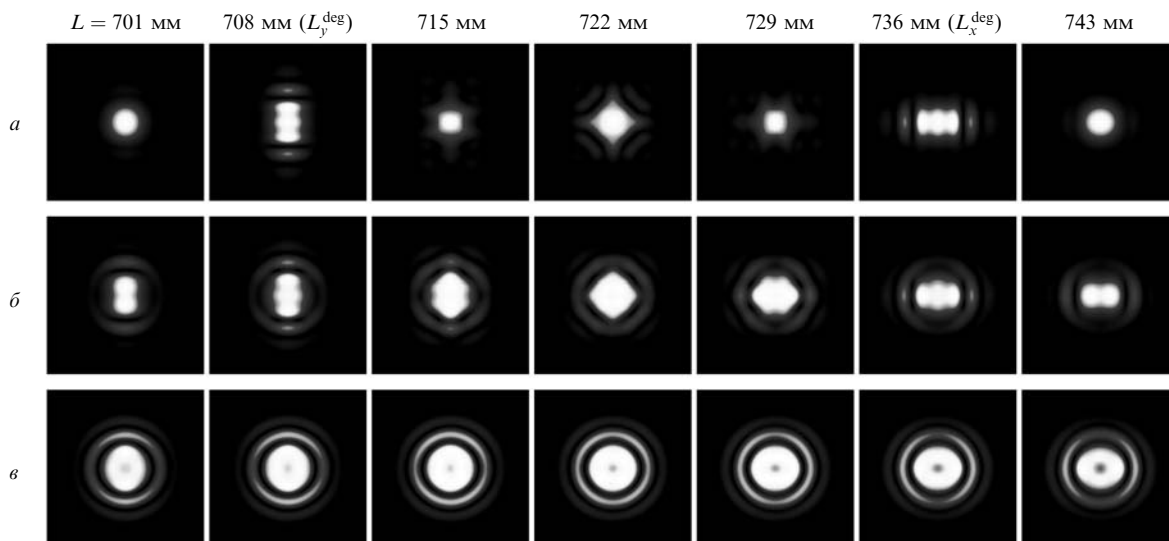


Рис.3. Рассчитанные распределения интенсивности основной моды при  $R = 150$  см,  $D_x = 0.05$  м $^{-1}$ ,  $D_y = 0.15$  м $^{-1}$ ,  $\omega_p = 100$  мкм и  $T = 2.5\%$  (a),  $7.5\%$  (б) и  $20\%$  (в) для разных значений  $L$ .

зультаты расчета показывают переход от случая расщепления вырождения, сопровождающегося нарушением круговой симметрии ( $T = 2.5\%$ , рис.3,а), к случаю распределений с кольцевой структурой с симметрией, близкой к круговой ( $T = 20\%$ , рис.3,б).

Расчеты проводились с помощью модели, основанной на перераспределении амплитуд в системе эрмит-гауссовых мод астигматического резонатора за счет пространственной неоднородности усиления. Описание модели дано в Приложении.

### 3. Эксперимент

Экспериментально изучались распределения интенсивности излучения за выходным зеркалом для Nd:YAG- и Nd:YLF-лазеров с продольной диодной накачкой, с резонаторами различной длины  $L$  и различными пропусками выходных зеркал  $T$ . Распределения регистрировались ПЗС-камерой.

В Nd:YAG-лазере с  $R = 150$  см использовался кристалл с  $D_x - D_y = 0.124 \text{ м}^{-1}$  [9]. Эффективный размер пучка накачки в активной среде составлял 100 мкм. Для исключения возникновения тепловой линзы пучок накачки модулировался механическим прерывателем, что позволило снизить среднюю мощность накачки до 10 мВт. Для резонаторов с длинами, сильно отличающимися от длин резонатора, при которых возникает вырождение, распределения интенсивности близки к гауссовым. Расщепление вырождения наиболее ярко проявляется при использовании глухого зеркала ( $T < 1\%$ ), при этом длины  $L_x^{\text{deg}}$  и  $L_y^{\text{deg}}$  можно указать с наибольшей точностью. Соответствующие распределения интенсивности с нарушенной круговой симметрией для полуконфокальной конфигурации резонатора ( $L_0 = R/2 = 750$  мм) приведены на рис.4. Измеренные распределения близки к полученным численно (рис.3,а) во всем диапазоне изменения  $L$ . При увеличении  $T$  до 18% наблюдались распределения интенсивности с кольцевой структурой, демон-

стрирующие круговую симметрию (рис.4,з). В данном случае характерные длины  $L_x^{\text{deg}}$  и  $L_y^{\text{deg}}$  не проявлялись, распределения с кольцевой структурой наблюдались во всей окрестности вырождения, что соответствует расчетам (рис.3,б).

Для Nd:YLF-лазера [14] с полуконфокальным резонатором  $L_0 = 7$  см, что близко к  $L_0 = 10$  см, реализованному в [2, 3], где при  $T = 10\%$  наблюдались распределения с круговой симметрией. Пучок накачки в активной среде имел эффективные размеры  $100 \times 100$  мкм. В исследуемом Nd:YLF-лазере при использовании зеркал с  $T = 7.8\%$ ,  $15\%$  и  $25\%$  распределения интенсивности также имели круговую симметрию. Как видно из рис.2, для резонаторов длиной до 10 см уверенно реализовать случай расщепления вырождения при  $D_x - D_y < 0.1 \text{ м}^{-1}$  затруднительно. Однако при использовании глухого зеркала с  $T < 1\%$  удалось экспериментально наблюдать нарушение круговой симметрии распределений интенсивности. Соответствующие распределения приведены на рис.5,а-в при  $L = L_x^{\text{deg}} = 6.91$  см,  $L = 6.96$  см и  $L = L_y^{\text{deg}} = 6.99$  см (этим значениям  $L_x^{\text{deg}}$  и  $L_y^{\text{deg}}$  соответствует  $D_x - D_y = 0.096 \text{ м}^{-1}$ ). Случай  $L_0 = 7$  см и  $T < 1\%$  является промежуточным между случаями, удовлетворяющими (9) и (10). Расчетные распределения для аналогичного промежуточного случая показаны на рис.3,б. Характерное распределение интенсивности с круговой симметрией, полученное при  $T = 25\%$ , приведено на рис.5,з.

### 4. Заключение

Таким образом, теоретически и экспериментально показано, что при одном и том же астигматизме резонатора в лазере с продольной накачкой в условиях синхронизации поперечных мод возможно формирование основной моды как с кольцевой пространственной структурой с круговой симметрией, так и со структурой, демонстрирующей расщепление вырождения. Показано, что связанное с астигматизмом расщепление вырожде-

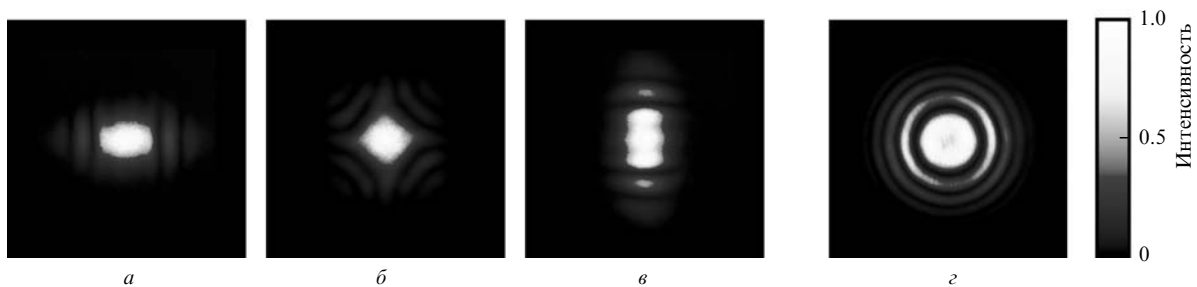


Рис.4. Экспериментальные распределения интенсивности излучения Nd:YAG-лазера за выходным сферическим зеркалом при  $R = 150$  см и  $T < 1\%$  для  $L = L_x^{\text{deg}} = 700$  мм (а),  $L = (L_x^{\text{deg}} + L_y^{\text{deg}})/2 = 717$  мм (б) и  $L = L_y^{\text{deg}} = 734$  мм (в) и при  $T = 18\%$  для  $L = 715$  мм (з).

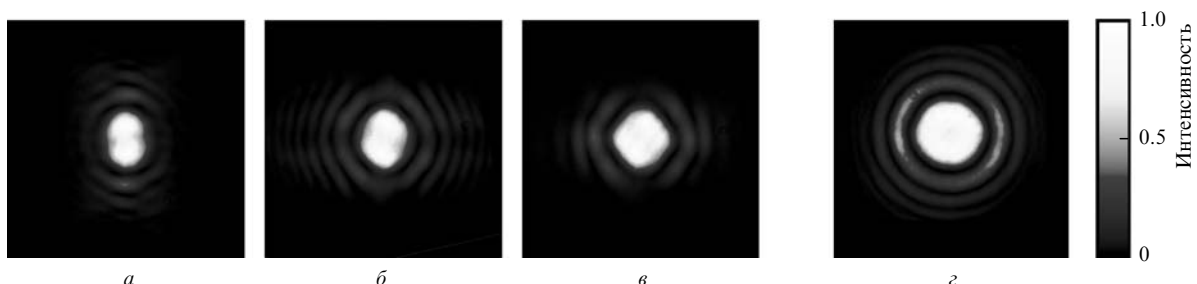


Рис.5. Экспериментальные распределения интенсивности излучения Nd:YLF-лазера с полуконфокальным резонатором при  $T < 1\%$  для  $L = L_x^{\text{deg}} = 6.91$  см (а),  $L = 6.96$  см (б) и  $L = L_y^{\text{deg}} = 6.99$  см (в) и при  $T = 25\%$  для  $L = 6.9$  см (з).

ния, сопровождающееся нарушением круговой симметрии, перестает проявляться при уменьшении длины резонатора и/или увеличении потерь. По этой причине для диагностики слабого астигматизма с помощью расщепления вырождения при синхронизации поперечных мод целесообразно использовать глухие резонаторы большой длины. Теоретические выводы подтверждены экспериментами с Nd:YAG- и Nd:YLF-лазерами с неоднородной продольной диодной накачкой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 08-08-00108-а, 08-02-12143-офи и 09-02-01190-а) и Программы фундаментальных исследований Отделения физических наук РАН «Фундаментальные проблемы фотоники и физика новых оптических материалов».

## Приложение

### Численная модель расчета распределений интенсивности излучения лазера с астигматическим резонатором и пространственно-неоднородной накачкой

Рассмотрим лазер, который состоит из тонкой активной среды радиусом  $a$ , обладающей оптическими силами  $D_x$  и  $D_y$ , и двух зеркал. Одно из них напылено на грань, обращенную к излучению накачки, другое является сферическим выходным зеркалом с радиусом кривизны  $R$ . Собственные моды холодного резонатора представляют собой астигматические эрмит-гауссовы пучки [13]:

$$u_{mn}(q^x, q^y; x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^{m+n} m! n!}} \frac{1}{\sqrt{w_x w_y}} H_m \left( \frac{\sqrt{2} x}{w_x} \right) \times H_n \left( \frac{\sqrt{2} y}{w_y} \right) \exp \left( -i \frac{kx^2}{2R_x} - \frac{x^2}{w_x^2} \right) \exp \left( -i \frac{ky^2}{2R_y} - \frac{y^2}{w_y^2} \right), \quad (\text{П1})$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ . Горизонтальный и вертикальный радиусы пучка  $w_x$ ,  $w_y$  и радиусы кривизны волнового фронта  $R_x$ ,  $R_y$  могут быть выражены через комплексные параметры кривизны  $q^x$  и  $q^y$ :

$$w_{x,y} = \left[ -\frac{2}{k \operatorname{Im}(1/q^{x,y})} \right]^{1/2}, \quad R_{x,y} = \frac{1}{\operatorname{Re}(1/q^{x,y})}. \quad (\text{П2})$$

В рассматриваемом резонаторе выделяются три плоскости: 1 и 2 – входная и выходная плоскости активной среды соответственно, 3 – плоскость сферического зеркала. Комплексные параметры кривизны  $q^x$  и  $q^y$  в этих плоскостях определяются следующими выражениями:

$$\frac{1}{q_1^{x,y}} = \frac{1 - g_1^{x,y}}{L} - \frac{i}{L} \left[ \frac{g_1^{x,y} (1 - g_1^{x,y} g_2^{x,y})}{g_2^{x,y}} \right]^{1/2},$$

$$\frac{1}{q_2^{x,y}} = -\frac{1 - g_1^{x,y}}{L} - \frac{i}{L} \left[ \frac{g_1^{x,y} (1 - g_1^{x,y} g_2^{x,y})}{g_2^{x,y}} \right]^{1/2}, \quad (\text{П3})$$

$$\frac{1}{q_3^{x,y}} = \frac{1 - g_2^{x,y}}{L} - \frac{i}{L} \left[ \frac{g_2^{x,y} (1 - g_1^{x,y} g_2^{x,y})}{g_1^{x,y}} \right]^{1/2}.$$

Распределение комплексной амплитуды лазерного поля  $u(x, y)$  может быть описано матрицей  $\beta_{mn}$ , элементы которой представляют собой амплитуды эрмит-гауссовых пучков в разложении

$$u(x, y) = \sum_{m,n} \beta_{mn} u_{mn}(q^x, q^y; x, y), \quad (\text{П4})$$

где  $u_{mn}(q^x, q^y; x, y)$  – комплексные амплитуды эрмит-гауссовых пучков (П1). Разложение (П4) справедливо для произвольных  $q^x$  и  $q^y$ , но в случае резонатора целесообразно использовать значения  $q^x$  и  $q^y$ , определяемые (П3). При естественной нормировке  $\sum_{m,n} |\beta_{mn}|^2 = 1$  величина  $|\beta_{mn}|^2$  представляет собой долю энергии лазерного излучения, сосредоточенную в эрмит-гауссовом пучке с индексами  $m$  и  $n$ .

При известном  $u(x, y)$  значения  $\beta_{mn}$  могут быть найдены из соотношений

$$\beta_{mn} = \iint u_{mn}^*(q^x, q^y; x, y) u(x, y) dx dy. \quad (\text{П5})$$

Преобразование элементов матрицы  $\beta_{mn}$  при распространении излучения от плоскости 2 к плоскости 3 и обратно к плоскости 1 имеет вид [15]

$$\beta'_{mn} = \beta_{mn} \exp \left[ 2ikL - i(2m+1) \arccos \pm \sqrt{g_1^x g_2^x} - i(2n+1) \arccos \pm \sqrt{g_1^y g_2^y} \right], \quad (\text{П6})$$

где знаки «+» или «-» совпадают со знаками  $g_1^x$  и  $g_1^y$ .

Перераспределение амплитуд пучков  $\beta_{mn}$  после двойного прохода активной среды с профилем усиления  $K(x, y)$  дается выражением

$$\beta'_{mn} = \sum_{j,l} t_{mjil} \beta_{jl}, \quad (\text{П7})$$

где

$$t_{mjil} = \iint u_{mn}^*(x, y) K(x, y) u_{jl}(x, y) dx dy. \quad (\text{П8})$$

Следует отметить, что  $t_{mjil} = \delta_{mj} \delta_{nl}$  только в случае  $K(x, y) \equiv 1$ .

Преобразование амплитуд пучков при полном обходе резонатора с учетом (П6)–(П8) может быть записано в следующем виде:

$$\beta'_{mn} = \sum_{j,l} f_{mjil} \beta_{jl}, \quad (\text{П9})$$

где

$$f_{mjil} = t_{mjil} \exp \left[ 2ikL - i(2j+1) \arccos \pm \sqrt{g_1^x g_2^x} - i(2l+1) \arccos \pm \sqrt{g_1^y g_2^y} \right]. \quad (\text{П10})$$

Значения  $\beta_{mn}$ , соответствующие основной моде, находятся как компоненты собственного вектора уравнения

$$\beta_{mn} = \lambda \sum_{j,l} f_{mjil} \beta_{jl} \quad (\text{П11})$$

с максимальным по модулю собственным значением  $\lambda$ . Уравнение (П11) решалось степенным итерационным методом. Его решение представляет собой набор амплитуд пучков в плоскости 2. Амплитуды пучков в плоскости 3 находятся из решения (П11) следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta'_{mn} = \beta_{mn} \exp[-i(m+1/2)(\psi_x - \psi_x^0) \\ -i(n+1/2)(\psi_y - \psi_y^0)], \end{aligned} \quad (\text{П12})$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{x,y} - \psi_{x,y}^0 = \arctan \left[ -\frac{\operatorname{Re}(1/q_3^{x,y})}{\operatorname{Im}(1/q_3^{x,y})} \right] \\ - \arctan \left[ -\frac{\operatorname{Re}(1/q_2^{x,y})}{\operatorname{Im}(1/q_2^{x,y})} \right]. \end{aligned}$$

Полученные значения позволяют с помощью (П1)–(П4) получить распределение интенсивности основной моды  $|u(x, y)|^2$  на выходном зеркале.

1. Laporta P., Brussard M. *IEEE J. Quantum Electron.*, **27**, 2319 (1991).
2. Wu H.-H., Sheu C.-C., Chen T.-W., Wei M.-D., Hsieh W.-F. *Opt. Commun.*, **165**, 225 (1999).
3. Chen C.-H., Tai P.-T., Hsieh W.-F. *J. Opt. Soc. Am. B*, **20**, 1220 (2003).
4. Frauchiger J., Albers P., Weber H.P. *IEEE J. Quantum Electron.*, **28**, 1046 (1992).
5. Martel G., Labbe C., Sanches F., Frimager M., Ait-Ameur K. *Opt. Commun.*, **201**, 117 (2002).
6. Ramsay I.A., Degnan J.J. *Appl. Opt.*, **9**, 385 (1970).
7. Chen C.-H., Tai P.-T., Chiu W.-H., Hsieh W.-F. *Opt. Commun.*, **245**, 301 (2005).
8. Горбунков М.В., Кострюков П.В., Телегин Л.С., Тункин В.Г., Яковлев Д.В. *Квантовая электроника*, **37**, 173 (2007).
9. Bezotosnyi V.V., Cheshev E.A., Gorbunkov M.V., Kostryukov P.V., Tunkin V.G. *Appl. Opt.*, **47**, 3651 (2008).
10. Ананьев Ю.А. *Оптика и спектроскопия*, **64**, 650 (1988).
11. Ozygus B., Zhang Q. *Appl. Phys. Lett.*, **71**, 2590 (1997).
12. Горбунков М.В., Кострюков П.В., Тункин В.Г. *Квантовая электроника*, **38**, 689 (2008).
13. Быков В.П., Силичев О.О. *Лазерные резонаторы* (М.: Физматлит, 2004, с. 70, 137).
14. Безотосный В.В., Горбунков М.В., Кострюков П.В., Петухов В.А., Попов Ю.М., Тункин В.Г., Чешев Е.А. *Труды 6-го белорусско-российского семинара «Полупроводниковые лазеры и системы на их основе»* (Минск, 2007, с. 73–76).
15. Siegman A.E. *Lasers* (Mill Valley, CA: Univ. Sci. Books, 1986, p. 761).