

ВЫНУЖДЕННОЕ ЧЕРЕНКОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

PACS 41.60.Bq; 41.75.Ht

Квантовая теория вынужденного черенковского излучения в среде поперечных электромагнитных волн электронным пучком малой плотности

М.В.Кузелев

Изложена квантовая теория вынужденного черенковского излучения электронным пучком поперечных электромагнитных волн в изотропной среде. Получены релятивистские квантовые нелинейные уравнения черенковской пучковой неустойчивости. В линейном приближении выведены квантовое дисперсионное уравнение и определены инкременты развития неустойчивостей. Решена нелинейная задача о насыщении квантовой черенковской пучковой неустойчивости.

Ключевые слова: вынужденное черенковское излучение, поперечные электромагнитные волны, электронный пучок малой плотности.

Квантовое рассмотрение эффекта Вавилова – Черенкова впервые было проведено В.Л.Гинзбургом на основе законов сохранения энергии и импульса при взаимодействии электрона и светового кванта в среде [1]. Электрон описывался классически, а для фотона связь его импульса и энергии устанавливалась с учетом влияния среды. В работе [1] речь фактически шла о спонтанном излучении, поскольку рассматривался отдельный электрон без учета влияния на него других излучающих электронов. При квантовом рассмотрении вынужденного черенковского излучения пучка электронов оправдан иной подход, развитый в теории плазмы и классической СВЧ электронике, где вынужденное черенковское излучение трактуется как резонансная пучковая неустойчивость. Именно таким образом в работах [2, 3] проведено квантовое рассмотрение вынужденного черенковского излучения продольных волн в плазме. В настоящей работе исследовано вынужденное черенковское излучение поперечных электромагнитных волн в среде релятивистским моноэнергетическим пучком электронов.

Известно, что в отсутствие столкновений наиболее общее квантовое описание системы заряженных частиц, в том числе и электронного пучка, осуществляется с помощью матрицы плотности [4, 5]. Если разброс частиц по скоростям отсутствует, то матрица плотности выражается через произведение волновых функций, а уравнение для нее сводится к уравнению Шредингера. Поэтому, описывая электроны пучка, мы будем использовать уравнение для волновой функции, дополненное уравнением для самосогласованного электромагнитного поля. Поскольку предполагается рассмотреть релятивистский электронный пучок, в качестве уравнения для волновой функции используется уравнение Клейна – Гордона – Фока.

Учитывая сказанное, исходим из следующей системы уравнений для векторного ($A(t, \mathbf{r})$) и скалярного ($\varphi(t, \mathbf{r})$)

потенциалов электромагнитного поля в кулоновской калибровке ($\nabla A = 0$):

$$\Delta A - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_b + \frac{\varepsilon}{c} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho_b.$$

Здесь ε – оператор диэлектрической проницаемости, а плотности тока (\mathbf{j}_b) и заряда (ρ_b) электронов пучка выражаются через волновую функцию электрона по формулам [6]

$$\mathbf{j}_b = -i \frac{e\hbar}{2m} [\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi] - \frac{e^2}{mc} \psi \psi^* \mathbf{A}, \quad (2)$$

$$\rho_b = i \frac{e\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - \frac{e^2}{mc^2} \psi \psi^* \varphi.$$

Волновая функция $\psi(t, \mathbf{r})$ определяется из уравнения Клейна – Гордона – Фока, линеаризованного по потенциалам:

$$\begin{aligned} \hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \hbar^2 c^2 \Delta \psi + m^2 c^4 \psi \\ = -2ie\hbar \left[\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \psi + c(\mathbf{A} \nabla) \psi \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку в невозмущенном состоянии у электронов пучка разброс по импульсам отсутствует, невозмущенную волновую функцию каждого электрона можно определить выражениями

$$\psi(t, z) = N \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z), \quad k_0 = \frac{m\omega_0}{\hbar}, \quad (4)$$

$$\omega_0 = \left(k_0^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right)^{1/2} = \frac{mc^2 \gamma}{\hbar},$$

М.В.Кузелев. Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: kuzelev@mail.ru

Поступила в редакцию 12 мая 2009 г., после доработки – 2 ноября 2009 г.

где u – скорость электронов пучка; $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ – релятивистский фактор электронов пучка; $N = n_b^{1/2} \gamma^{-1/2}$ – нормировочный множитель; n_b – концентрация электронов в пучке. Волновая функция (4) является начальным условием (при $t = 0$ или $t \rightarrow \infty$) для уравнения Клейна – Гордона – Фока. Заметим, что если бы электроны пучка имели разброс по импульсам, то квантовое описание усложнилось бы: при решении уравнения (3) с начальным условием (4) импульс $m\gamma u$ был бы свободным параметром, по которому с учетом функции распределения по импульсам в формулах (2) проводилось бы интегрирование. В нерелятивистском случае такое описание было бы полностью эквивалентно описанию с помощью одночастичной матрицы плотности [5]. Разброс по импульсам несуществен при выполнении неравенства $|\delta\omega/\omega| \gg \Delta p \times (m\gamma)^{-1}$, где $\delta\omega$ – инкремент, ω – частота излучения, а Δp – ширина функции распределения электронов пучка по импульсам.

Как будет видно из дальнейшего, черенковское излучение в виде поперечных волн возможно только под углом к направлению невозмущенного движения электронов пучка, поэтому представим потенциалы \tilde{A} и волновую функцию в виде

$$\begin{aligned} A(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2} [\tilde{A}(t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) + \tilde{A}^*(t) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})], \\ \varphi(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}(t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) + \tilde{\varphi}^*(t) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})], \\ \psi &= H_0(t) \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r}) + H_-(t) \exp[i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\mathbf{r}] \\ &\quad + H_+(t) \exp[i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k})\mathbf{r}]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{k}_0 = \{0, 0, k_0\}$; $\mathbf{k} = \{k_\perp, 0, k_\parallel\}$. Подставляя выражения (5) в формулы (2) и в уравнения (1), после довольно громоздких вычислений получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{d^2 \tilde{A}}{dt^2} + k^2 \tilde{A} + i \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{k} \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} + \frac{4\pi e^2}{mc^2} (H_0 H_0^* + H_- H_-^* \\ &+ H_+ H_+^*) \tilde{A} = \frac{8\pi}{c} \frac{e\hbar}{2m} [(2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) H_0 H_-^* + (2\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}) H_0^* H_+], \\ &k^2 \tilde{\varphi} + \frac{4\pi e^2}{\varepsilon mc^2} (H_0 H_0^* + H_- H_-^* + H_+ H_+^*) \tilde{\varphi} \\ &= i \frac{8\pi}{\varepsilon} \frac{e\hbar}{2mc^2} [(\dot{H}_0 H_-^* - H_0 \dot{H}_-^*) + (H_0^* \dot{H}_+ - \dot{H}_0^* H_+)], \\ &\hbar^2 \frac{d^2 H_0}{dt^2} + (\hbar^2 k_0^2 c^2 + m^2 c^4) H_0 = -ie\hbar \left\{ (\tilde{\varphi} \dot{H}_- + \tilde{\varphi}^* \dot{H}_+) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} (\dot{\tilde{\varphi}} H_- + \dot{\tilde{\varphi}}^* H_+) + ic[(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \tilde{A} H_- + (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}) \tilde{A}^* H_+] \right\}, \\ &\hbar^2 \frac{d^2 H_-}{dt^2} + [\hbar^2 (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})^2 c^2 + m^2 c^4] H_- \\ &= -ie\hbar \left(\dot{H}_0 \tilde{\varphi}^* + \frac{1}{2} H_0 \dot{\tilde{\varphi}}^* + ic H_0 \mathbf{k}_0 \tilde{A}^* \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &\hbar^2 \frac{d^2 H_+}{dt^2} + [\hbar^2 (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k})^2 c^2 + m^2 c^4] H_+ \\ &= -ie\hbar \left(\dot{H}_0 \tilde{\varphi} + \frac{1}{2} H_0 \dot{\tilde{\varphi}} + ic H_0 \mathbf{k}_0 \tilde{A} \right). \end{aligned}$$

Уравнения (6) и (7) являются основой для излагаемой ниже релятивистской квантовой теории черенковского излучения поперечных электромагнитных волн в среде.

В линейном приближении правая часть первого уравнения системы (7) равна нулю, поэтому с учетом (4) имеем $H_0(t) = N \exp(-i\omega_0 t)$. При этом остальные уравнения систем (6) и (7) после линеаризации принимают вид

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 H_-}{dt^2} + \omega_-^2 H_- = -\frac{en_b^{1/2}}{\hbar\gamma^{1/2}} \left(\omega_0 \tilde{\varphi}^* + \frac{1}{2} i \dot{\tilde{\varphi}}^* - c\mathbf{k}_0 \tilde{A}^* \right) \\ &\quad \times \exp(-i\omega_0 t), \\ &\frac{d^2 H_+}{dt^2} + \omega_+^2 H_+ = -\frac{en_b^{1/2}}{\hbar\gamma^{1/2}} \left(\omega_0 \tilde{\varphi} + \frac{1}{2} i \dot{\tilde{\varphi}} - c\mathbf{k}_0 \tilde{A} \right) \exp(-i\omega_0 t), \\ &\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{d^2 \tilde{A}}{dt^2} + \left(k^2 + \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{c^2} \right) \tilde{A} + i \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{k} \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = \frac{8\pi}{c} \frac{e\hbar n_b^{1/2}}{2m\gamma^{1/2}} \\ &\quad \times [(2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) H_-^* \exp(-i\omega_0 t) + (2\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}) H_+ \exp(i\omega_0 t)], \\ &\left(k^2 + \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{\varepsilon c^2} \right) \tilde{\varphi} = -i \frac{8\pi}{\varepsilon} \frac{e\hbar n_b^{1/2}}{2mc^2 \gamma^{1/2}} \\ &\quad \times [(i\omega_0 H_-^* + \dot{H}_-^*) \exp(-i\omega_0 t) + (i\omega_0 H_+ - \dot{H}_+) \exp(i\omega_0 t)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь ω_b – ленгмюровская частота электронов пучка;

$$\omega_\mp = \left[(\mathbf{k}_0 \mp \mathbf{k})^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Представим решение уравнений (8) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \mathbf{a} \exp(-i\omega t), \quad \tilde{\varphi} = b \exp(-i\omega t), \\ H_- &= a_- \exp[-i(\omega_0 - \omega)t], \quad H_+ = a_+ \exp[-i(\omega_0 + \omega)t], \end{aligned} \quad (10)$$

где \mathbf{a} , b , a_- , a_+ – постоянные. Подставляя выражения (10) в уравнения (8) и исключая постоянные, получаем следующее дисперсионное уравнение для определения комплексной частоты $\omega(\mathbf{k})$:

$$\begin{aligned} D_\perp(\omega, \mathbf{k}) D_\parallel(\omega, \mathbf{k}) &= k_\perp^2 u^2 \omega_b^2 \gamma^{-1} (\varepsilon - 1) \\ &\quad \times \left[(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2 - \frac{\hbar^2 (\omega^2 - k^2 c^2)^2}{4m^2 c^4 \gamma^2} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$D_\perp(\omega, \mathbf{k}) = \omega^2 \varepsilon - k^2 c^2 - \omega_b^2 \gamma^{-1}; \quad (12)$$

$$D_\parallel(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon - \omega_b^2 \gamma^{-1} \left[1 - \frac{u^2}{c^2} - \frac{\hbar^2 (\omega^2 - k^2 c^2)}{4m^2 c^4 \gamma^2} \right]$$

$$\times \left[(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2 - \frac{\hbar^2 (\omega^2 - k^2 c^2)^2}{4m^2 c^4 \gamma^2} \right]^{-1}.$$

В классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ уравнение (11) переходит в известное дисперсионное уравнение [7]

$$\begin{aligned} & (\omega^2 \varepsilon - k^2 c^2 - \omega_b^2 \gamma^{-1}) \left[\varepsilon - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} \right] \\ &= \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} k_{\perp}^2 u^2 (\varepsilon - 1). \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнение $D_{\perp}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ определяет частоты поперечных электромагнитных волн в среде с диэлектрической проницаемостью ε , а уравнение $D_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ – частоты квантовых продольных волн релятивистского электронного пучка. При $k_{\perp} = 0$, т. е. при распространении в направлении движения пучка, поперечные волны с пучком не взаимодействуют, и оказывается возможным черенковское излучение только продольных волн. Черенковское излучение продольных волн в плазме ($\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, ω_p – плазменная частота) в нерелятивистском случае было рассмотрено в работе [3] и сейчас для нас интереса не представляет. Не представляет интереса и случай взаимодействия электронного пучка с поперечными волнами в плазме. Действительно, в этом случае из уравнения $D_{\perp}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ при $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ получаем частоту поперечной волны $\omega = (k^2 c^2 + \omega_p^2 + \omega_b^2 \gamma^{-1})^{1/2}$. Фазовая скорость такой волны больше скорости света, и черенковское излучение невозможно как в классическом, так и в квантовом случае. Поэтому мы рассмотрим здесь вынужденное черенковское излучение в изотропном диэлектрике без дисперсии, т. е. считаем $\varepsilon = \text{const} > 1$.

Устремляя в уравнении (11) плотность электронов пучка к нулю, находим квантовое условие черенковского резонанса волна – частица:

$$\omega = \mathbf{k}\mathbf{u} \pm \frac{\hbar(\omega^2 - k^2 c^2)}{2mc^2 \gamma}. \quad (14)$$

Поясним, что условия черенковского резонанса мы определяем как полюса пучковых слагаемых в дисперсионном уравнении. При $\varepsilon = \text{const}$ и $\omega_b \rightarrow 0$ частота поперечной волны $\omega = kc/\sqrt{\varepsilon}$, поэтому (14) преобразуется к виду

$$\omega = \mathbf{k}\mathbf{u} \pm \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{\hbar k^2}{2m\gamma}. \quad (15)$$

Равенства (15) следует рассматривать как квантовые условия черенковского излучения (знак «минус») и черенковского поглощения (знак «плюс») в изотропном диэлектрике. Именно условие (15) со знаком «минус» впервые было получено на основе законов сохранения в работе [1]. Если квантовый член мал, то условию (14) можно придать другую форму:

$$\omega = \mathbf{k}\mathbf{u} \pm \frac{\hbar(k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2 \gamma^{-2})}{2m\gamma}. \quad (16)$$

В случае электронного пучка малой плотности, когда выполнено неравенство $\omega_b^2 \gamma^{-1} \ll k_{\perp}^2 c_0^2$ ($c_0 = c/\sqrt{\varepsilon}$ – скорость света в среде), для частот, близких к частоте поперечной волны, дисперсионное уравнение (11) существенно упрощается:

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - k^2 c_0^2) \left[(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2 - \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{\hbar k^2}{2m\gamma} \right)^2 \right] \\ &= k_{\perp}^2 u^2 \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{\varepsilon} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (17)$$

Анализом дисперсионного уравнения (17) мы здесь и ограничимся. Предположим, что поперечная компонента волнового вектора электромагнитной волны k_{\perp} зафиксирована (как в волноводе), а продольная компонента k_{\parallel} может принимать любые значения. Кроме того, считаем, что скорость света в среде c_0 меньше скорости электронов пучка u . Точки с координатами k_{\parallel}, ω одночастичного черенковского резонанса определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k_{\perp}^2 c_0^2 + k_{\parallel}^2 c_0^2, \\ \omega &= k_{\parallel} u - \frac{\hbar(k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2)}{2m\gamma} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (18)$$

Если выполнено неравенство

$$\frac{\hbar k_{\perp}}{m(u - c_0)\gamma} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \ll 1, \quad (19)$$

то координаты резонансных точек даются следующими формулами:

$$\begin{aligned} k_{\parallel 1} &= \frac{\omega_1}{u}, \quad \omega_1 = \frac{k_{\perp} c_0}{(1 - c_0^2/u^2)^{1/2}}, \\ k_{\parallel 2} &= \frac{2m(u - c_0)\gamma}{\hbar} \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}, \quad \omega_2 = k_{\parallel 2} c_0, \end{aligned} \quad (20)$$

причем $\omega_2 \gg \omega_1$. Резонанс в точке $(k_{\parallel 1}, \omega_1)$ имеется и в классическом случае, а вот резонанс в точке $(k_{\parallel 2}, \omega_2)$ является чисто квантовым, поскольку при $\hbar \rightarrow 0$ точка $(k_{\parallel 2}, \omega_2)$ уходит на бесконечность. При $u > c_0$ расположение резонансных точек на плоскости ωk_{\parallel} показано на рис.1.

В резонансных точках дисперсионное уравнение (17) преобразуется к виду

$$(\delta\omega)_{1,2}^2 \left[(\delta\omega)_{1,2} - (\varepsilon - 1) \frac{\hbar\omega_{1,2}^2}{mc^2\gamma} \right] = \frac{1}{2} k_{\perp}^2 u^2 \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{\omega_{1,2} \varepsilon} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}, \quad (21)$$

где $(\delta\omega)_{1,2} = \omega - \omega_{1,2}$ – комплексный инкремент. При выполнении неравенства

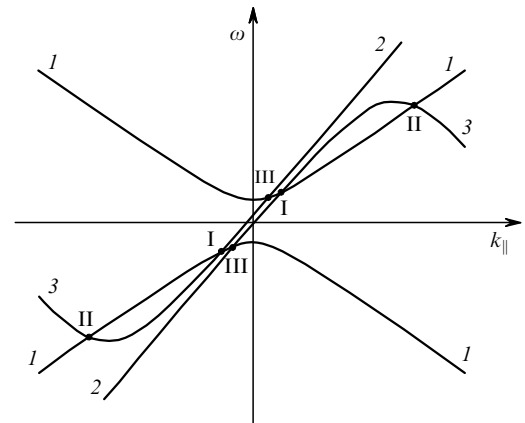


Рис.1. Линии черенковского резонанса и резонансные точки в релятивистской квантовой теории вынужденного черенковского излучения: дисперсионные зависимости для поперечных электромагнитных волн в диэлектрике (1), а также резонансные линии черенковского поглощения (2) и черенковского излучения (3).

$$\frac{|(\delta\omega)_{1,2}|}{\omega_{1,2}} \gg (\varepsilon - 1) \frac{\hbar\omega_{1,2}}{mc^2\gamma} \quad (22)$$

из уравнения (21) находим следующий инкремент развития неустойчивости:

$$(\delta\omega)_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} k_{\perp}^2 u^2 \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{\omega_1 \varepsilon} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right)^{1/3}. \quad (23)$$

Неустойчивость с инкрементом (23) обусловлена обыкновенным классическим одночастичным вынужденным эффектом Черенкова [2], а неравенство (22) преобразуется к виду

$$\left(\frac{k_{\perp}^2 u^2 \omega_b^2 \gamma^{-1}}{2\omega_{1,2}^4 \varepsilon^2} \right)^{1/3} \gg (\varepsilon - 1)^{2/3} \frac{\hbar\omega_{1,2}}{mc^2\gamma}. \quad (24)$$

Неравенство (24) может быть выполнено только для $\omega = \omega_1$, что учтено в формуле (23).

При уменьшении плотности пучка неравенство (24) нарушается, и характер неустойчивости становится иным. Так, если выполнено неравенство, обратное (22), то инкремент определяется формулой

$$(\delta\omega)_{1,2} = i \left(\frac{1}{2} \frac{mc^2\gamma}{\hbar} \frac{k_{\perp}^2 u^2 \omega_b^2 \gamma^{-1}}{\varepsilon^2 \omega_{1,2}^3} \right)^{1/2}. \quad (25)$$

Неустойчивость с инкрементом (25) является чисто квантовым эффектом. В точке $(k_{\parallel 1}, \omega_1)$ в зависимости от плотности пучка возможна как обычная классическая, так и квантовая неустойчивость. В точке $(k_{\parallel 2}, \omega_2)$, поскольку $\omega_2 \propto \hbar^{-1}$, развивается только квантовая неустойчивость с инкрементом (25), пропорциональным \hbar . Типичные дисперсионные кривые $\omega(k_{\parallel})$ уравнения (17) представлены на рис.2 и 3 (показаны только ближайшие к точкам I и II области, см. рис.1). В случае рис.2 выполнено неравенство (25), а в случае рис.3 имеет место обратное неравенство.

Основываясь на волновых представлениях, можно дать интересную интерпретацию квантового вынужденного эффекта Черенкова. Как следует из третьей формулы (5) и двух последних выражений (10), волновая функция электрона пучка имеет вид

$$\psi = A \exp(-i\omega_0 t + \mathbf{k}_0 \mathbf{r}) + a_- \exp[-i(\omega_0 - \omega)t + i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\mathbf{r}]$$

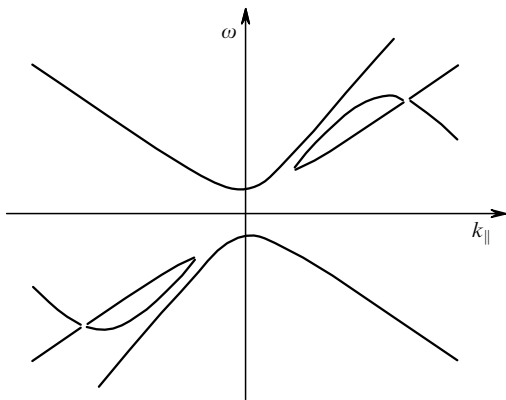


Рис.2. Дисперсионные кривые при черенковской пучковой неустойчивости в диэлектрике в случае выполнения неравенства (22) (описание кривых дано в подписи к рис.1).

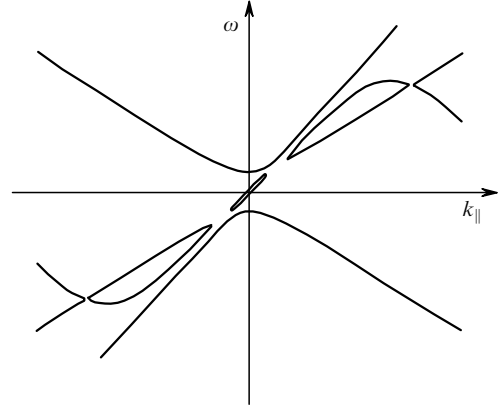


Рис.3. Дисперсионные кривые при черенковской пучковой неустойчивости в диэлектрике в случае выполнения неравенства, обратного (22) (описание кривых дано в подписи к рис.1).

$$+ a_+ \exp[-i(\omega_0 + \omega)t + (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k})\mathbf{r}]. \quad (26)$$

Первое слагаемое в (26) назовем первичной волной де Бройля. Это – волновая функция электрона в исходном состоянии с энергией $\hbar\omega_0$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}_0$. Второе и третье слагаемые имеют смысл вторичных волн де Бройля, возникших при рассеянии на потенциалах электромагнитного поля. Второе слагаемое в (26) есть волновая функция электрона, испустившего электромагнитный квант с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$, а третье – волновая функция электрона, поглотившего квант.

Обозначим частоту и волновой вектор любой из вторичных волн де Бройля через ω'_0 и \mathbf{k}'_0 . Тогда в соответствии с (26) можно записать

$$\omega_0 = \omega'_0 + \omega, \quad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}'_0 + \mathbf{k}, \quad (27a)$$

$$\omega'_0 = \omega_0 + \omega, \quad \mathbf{k}'_0 = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}. \quad (27б)$$

Резонанс волны излучения и волн де Бройля означает, что выполнено одно из следующих резонансных условий:

$$\omega'_0 = \omega_{\mp}, \quad (28)$$

где частоты ω_{\mp} определены в (9). При этом соотношения (27) оказываются общими условиями распада при трехволновом взаимодействии [8], а с учетом (28) и (9) они сводятся к условиям черенковского резонанса (14). Таким образом, черенковское излучение можно трактовать как распад волны де Бройля на волну де Бройля и электромагнитную волну. Этот процесс происходит при выполнении условий (27a). Обратный процесс – черенковское поглощение – является слиянием волн и реализуется при условиях (27б).

На языке резонансного трехволнового взаимодействия удобно излагать и нелинейную теорию квантовых черенковских пучковых неустойчивостей. Полагая в системе (6) и (7) потенциал $\tilde{\varphi} = 0$ и пренебрегая в ней кубическими по полю членами, запишем следующие уравнения:

$$\frac{d^2 H_0}{dt^2} + \omega_0^2 H_0 = \frac{ec}{\hbar} \mathbf{n} \mathbf{k}_0 (\tilde{A} H_- + \tilde{A}^* H_+),$$

$$\frac{d^2 H_-}{dt^2} + \omega_-^2 H_- = \frac{ec}{\hbar} \mathbf{n} \mathbf{k}_0 H_0 \tilde{A}^*,$$

(29)

$$\frac{d^2 H_+}{dt^2} + \omega_+^2 H_+ = \frac{ec}{\hbar} \mathbf{nk}_0 H_0 \tilde{A},$$

$$\frac{d^2 \tilde{A}}{dt^2} + \omega^2 \tilde{A} = \frac{8\pi c}{\varepsilon} \frac{e\hbar}{m} \mathbf{nk}_0 (H_0 H_-^* + H_0^* H_+),$$

где $\tilde{A} = \mathbf{n}\tilde{A}$; $\omega = kc_0$ – частота электромагнитной волны; \mathbf{n} – единичный вектор поляризации, который считаем постоянным, причем для поперечной волны $\mathbf{nk} = 0$. Представим решение уравнений (29) в виде (см. (10))

$$H_0 = n_b^{1/2} \gamma^{-1/2} a_0(t) \exp(-i\omega_0 t),$$

$$H_{\mp} = n_b^{1/2} \gamma^{-1/2} a_{\mp}(t) \exp[-i(\omega_0 \mp \omega)t], \quad (30)$$

$$\tilde{A} = a(t) \exp(-i\omega t),$$

где a_0 , a_{\mp} , a – функции, медленно меняющиеся во времени. Подстановка (30) в (29) приводит к следующим уравнениям:

$$\omega_0 \frac{da_0}{dt} = i \frac{ec}{2\hbar} \mathbf{nk}_0 (aa_- + a^* a_+),$$

$$(\omega_0 - \omega) \frac{da_-}{dt} - \frac{1}{2} i [(\omega_0 - \omega)^2 - \omega_-^2] a_- = i \frac{ec}{2\hbar} \mathbf{nk}_0 a_0 a^*, \quad (31)$$

$$(\omega_0 + \omega) \frac{da_+}{dt} - \frac{1}{2} i [(\omega_0 + \omega)^2 - \omega_+^2] a_+ = i \frac{ec}{2\hbar} \mathbf{nk}_0 a_0 a,$$

$$\omega \frac{da}{dt} = i \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{\varepsilon} \frac{\hbar c}{e} \mathbf{nk}_0 (a_0 a_-^* + a_0^* a_+).$$

Пусть выполнены условие (27а) и первое условие (28), т. е. имеет место черенковское излучение. Тогда резонансной является вторичная волна де Бройля с амплитудой a_- , а амплитуду нерезонансной волны a_+ можно положить равной нулю. При этом уравнения (31) преобразуются к виду

$$\omega_0 \frac{da_0}{dt} = i \frac{ec}{2\hbar} k_{\perp} \frac{m\gamma}{\hbar k} a a_-,$$

$$\omega_- \frac{da_-}{dt} = i \frac{ec}{2\hbar} k_{\perp} \frac{m\gamma}{\hbar k} a_0 a^*, \quad (32)$$

$$\omega \frac{da}{dt} = i \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{\varepsilon} \frac{\hbar c}{e} k_{\perp} \frac{m\gamma}{\hbar k} a_0 a^*.$$

Здесь учтено, что $\mathbf{nk}_0 = k_{\perp} m\gamma / (\hbar k)$. В линейном приближении ($a_0 = 1$) из (32) следует инкремент (25). Заметим, что пренебрегая в уравнениях (31) амплитудой a_+ , мы

использовали неравенство, обратное (22). В противном случае амплитуды a_+ и a_- сравнимы, поскольку при выполнении неравенства (22) с точностью до инкремента $\delta\omega$ имеют место оба условия резонанса (28). Поэтому черенковская неустойчивость при условиях (22), когда она является классической, аналогична так называемому модифицированному распаду [8–10]. Квантовая же неустойчивость является простым распадом, о чем свидетельствует и структура уравнений (32).

Для адиабатических начальных условий ($a_0(t \rightarrow -\infty) = 1$, $a(t \rightarrow -\infty) = 0$, $a_-(t \rightarrow -\infty) = 0$) решение системы (32) приводит к соотношению

$$\frac{1}{8\pi} \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} |a|^2 = \frac{\hbar \omega n_b}{\cosh^2(|\delta\omega|t)}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (33)$$

где $\delta\omega$ – инкремент (25). Левая часть соотношения (33) есть плотность энергии электромагнитного поля поперечной волны, возбуждаемой в условиях квантового эффекта Черенкова.

В заключение отметим, что возможность экспериментального наблюдения квантовых эффектов, исследованных в настоящей работе, проблематична. Получение излучения на высокой частоте ω_2 могло бы быть прямой проверкой квантового условия черенковского резонанса (15). Однако частота ω_2 оказывается слишком высокой, поэтому излучение на этой частоте требует более детального теоретического исследования с учетом временной и пространственной дисперсий диэлектрической проницаемости ε . Что касается легко получаемого излучения на низкой частоте ω_1 , то квантовые эффекты сказываются на времени излучения (обратного инкременту (25)) и его мощности (33). Эти параметры легко измеряются, но результаты измерений трудно интерпретировать однозначно.

Автор благодарен А.А.Рухадзе за интерес к работе и полезные дискуссии.

1. Гинзбург В.Л. *ЖЭТФ*, **10**, 589 (1940).
2. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. *УФН*, **178** (10), 1025 (2008).
3. Кузелев М.В. *Кр. сообщ. физ. ФИАН*, № 8, 13; 20 (2009).
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1974).
5. Силин В.П., Рухадзе А.А. *Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред* (М.: Атомиздат, 1961).
6. Давыдов А.С. *Квантовая механика* (М.: Наука, 1973).
7. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. *Основы электродинамики плазмы* (М.: Высшая школа, 1988).
8. Кадомцев Б.Б. *Коллективные явления в плазме* (М.: Наука, 1976).
9. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. *Электродинамика плотных электронных пучков в плазме* (М.: Наука, 1990).
10. Вильгельмссон Х., Вейланд Я. *Нелинейное когерентное взаимодействие волн в плазме* (М.: Энергоиздат, 1981).