

Генерация второй гармоники и тока увлечения быстро греющей металл s-поляризованной волной

С.Г.Бежанов, С.А.Урюпин

Установлены зависимости эффективности генерации второй гармоники и тока увлечения от частот столкновений электронов, изменяющихся в процессе быстрого нагрева электронов и решетки металла при поглощении s-поляризованного фемтосекундного излучения.

Ключевые слова: генерация второй гармоники, фемтосекундный импульс, ток увлечения, нелинейный отклик металла.

1. Введение

Генерация гармоник лазерного излучения электронами проводимости является эффективным методом исследования электронных свойств металлов [1, 2]. Наряду с широко используемыми методами определения физических характеристик электронов по измерениям коэффициента поглощения [3] либо поляризационных свойств отраженного излучения [4], изучение закономерностей генерации гармоник основной частоты позволяет получить дополнительную информацию о частотах столкновений электронов. Возможности такого подхода применительно к определению частоты электрон-электронных столкновений с перебросом квазиимпульса продемонстрированы в работе [5], где дано теоретическое описание генерации третьей гармоники при нагреве электронов металла фемтосекундным лазерным импульсом. С целью дальнейшей демонстрации возможностей исследования неравновесных состояний металлов по их нелинейно-оптическому отклику в настоящей работе представлено сравнительно простое модельное описание влияния столкновений электронов на эффективность генерации второй гармоники и величину тока увлечения, порождаемых греющей электроны s-поляризованной волной.

В условиях, когда влиянием столкновений электронов можно пренебречь, генерация второй гармоники изучена как в металлах [6, 7], так и в плазме [8]. В [9] указано на необходимость учета межзонных переходов при изучении генерации второй гармоники с достаточно высокой частотой. При этом влияние столкновений электронов считалось несущественным. Такое рассмотрение оправдано тем, что эффективность генерации гармоник видимого излучения в чистых металлах при температурах, меньших комнатной, практически не зависит от небольшой частоты столкновений электронов.

Ситуация изменяется при взаимодействии металлов с греющими электроны фемтосекундными лазерными

импульсами. Нагрев электронов за время, меньшее или порядка ста фемтосекунд, когда передача энергии от электронов к решетке еще мала, приводит к установлению неравновесного состояния, в котором температура электронов T хотя и меньше энергии Ферми, но много больше температуры решетки T_{lat} . При этом значительно увеличивается частота ν_{ee} электрон-электронных столкновений, в том числе происходящих с перебросом квазиимпульса. Уже при температуре электронов, превышающей несколько тысяч градусов, и комнатной температуре решетки частота ν_{ee} сравнима с частотой электрон-фононных столкновений ν_{eph} или больше ее. Если же T порядка одного электронвольта, то ν_{ee} сравнима и с частотой видимого излучения ω . В таких условиях влияние столкновений на слабонелинейный отклик металла становится доминирующим и возникает необходимость в теории, адекватно описывающей нелинейно-оптические свойства неравновесного металла.

Отметим, что при столь высоких частотах столкновений в видимом диапазоне частот для типичных металлов можно ограничиться изучением режимов нормального и высокочастотного скин-эффектов. Ниже дан вывод учитывающих столкновения электронов основных соотношений для эффективности генерации второй гармоники s-поляризованной волны и порождаемого ею тока увлечения. На основе уравнений для температур электронов и решетки показано, как по мере нагрева металла происходит уменьшение эффективности генерации излучения на частоте 2ω . Напротив, охлаждение электронов из-за выноса тепла из скин-слоя сопровождается увеличением эффективности генерации второй гармоники. Аналогичные зависимости установлены и для тока увлечения как функции изменяющихся температур электронов и решетки. Демонстрировано, в какой мере эффективность генерации второй гармоники зависит от подлежащих определению констант, характеризующих влияние процессов переброса на частоту электрон-электронных столкновений, определяющих как теплопроводность, так и проводимость металла.

2. Основные уравнения. Поле на основной частоте

Рассмотрим взаимодействие s-поляризованной электромагнитной волны с металлом, занимающим полупро-

С.Г.Бежанов, С.А.Урюпин. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: bezhanov@sci.lebedev.ru, uryupin@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 19 мая 2009 г., после доработки – 26 октября 2009 г.

странство $z > 0$. Электрическое поле падающей на металл волны представим в виде

$$E_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} E_L \exp(-i\omega t + ikx \sin \theta + ikz \cos \theta) + \text{компл. сопр.}, \quad (1)$$

где $E_L = \{0, E_L, 0\}$ – слабо изменяющаяся на расстоянии $2\pi/k$ и за время $2\pi/\omega$ напряженность электрического поля; ω – частота; $k = \omega/c$ – волновое число; c – скорость света; θ – угол между направлением распространения волны и вектором нормали к поверхности металла. Магнитное поле падающей волны $B_L = E_L \{-\cos \theta, 0, \sin \theta\}$ и имеет ту же зависимость (1) от времени и координат.

Для описания отклика металла на воздействие поля (1) воспользуемся гидродинамическими уравнениями для концентрации n и скорости \mathbf{u} электронов:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{u}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{nm}\nabla p - \nu\mathbf{u} + \frac{e}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}, \mathbf{B}]\right), \quad (3)$$

где $\nu(n, T)$ – характерная частота столкновений, зависящая от концентрации и температуры T электронов; e и m – заряд и масса электрона; $p = p(n, T)$ – давление электронов; $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ – электрическое и магнитное поля в металле. Эти поля описываются уравнениями Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{enu}, \quad (5)$$

где ε – статическая диэлектрическая проницаемость, обусловленная связанными электронами и решеткой. Принимая во внимание периодическое изменение во времени поля падающей волны (1), решение уравнений (2)–(5) естественно искать в виде

$$F = F_0 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} [F_s \exp(-is\omega t) + \text{компл. сопр.}], \quad (6)$$

где F обозначает n , T либо одну из компонент векторов \mathbf{u} , \mathbf{E} или \mathbf{B} . В формуле (6) функции F_0 и F_s зависят от x и z и медленно меняются во времени:

$$\left| \frac{\partial \ln F_0}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial \ln F_s}{\partial t} \right| \ll s\omega, \quad s = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Приближенный учет такой зависимости F_0 и F_s от времени позволяет, в частности, описывать медленные включение и выключение поля E_L , обусловленные конечной длительностью лазерного импульса, а также изменение параметров металла. Ограничимся рассмотрением приближенного решения уравнений (2)–(5) с точностью до поправок, квадратичных по напряженности поля E_L (1). В таком приближении в разложении (6) достаточно удерживать лишь слагаемые с $s \leq 2$. При этом, интересуясь гармониками с $s = 1$, можно не учитывать квадратичные по полю возмущения температуры и концентрации элект-

ронов, а также обусловленные ими возмущения давления p и частоты ν . Несущественным оказывается и влияние квазистационарного поля E_0 , которое пропорционально E_L^2 .

В таком приближении для определения гармоник с $s = 1$ имеем систему линейных уравнений. В линейном приближении пропорциональное внешнему полю E_L поле E_1 можно представить в виде $E_1 = E_1(z) \times \exp(ikx \sin \theta)$, где $E_1(z) = \{0, E_1(z), 0\}$. Отсюда следует, что $\text{div } E_1 = 4\pi en_1 = 0$, т. е. $n_1 = 0$, а также что $p_1 = 0$ и $\nu_1 = 0$. В итоге из линеаризованного уравнения (3), пренебрегая слабым изменением скорости \mathbf{u}_1 , находим

$$\mathbf{u}_1 = \frac{e}{m} E_1 \frac{i}{\omega + i\nu_0}, \quad (8)$$

где ν_0 зависит от n_0 и T_0 – медленно меняющихся во времени концентрации и температуры электронов. Имея в виду неравенство (7) и соотношение (8), из (4) и (5) получаем следующее уравнение для функции $E_1(z)$:

$$\frac{d^2 E_1(z)}{dz^2} + k^2 [\varepsilon(\omega) - \sin^2 \theta] E_1(z) = 0, \quad (9)$$

где $\varepsilon(s\omega) = \varepsilon'(s\omega) + i\varepsilon''(s\omega)$ – диэлектрическая проницаемость на частоте $s\omega$; $s = 1, 2, \dots$;

$$\varepsilon'(s\omega) = \varepsilon - \frac{\omega_L^2}{(s\omega)^2 + \nu_0^2}; \quad (10)$$

$$\varepsilon''(s\omega) = \frac{\nu_0 \omega_L^2}{s\omega[(s\omega)^2 + \nu_0^2]}; \quad (11)$$

$\omega_L = (4\pi e^2 n_0 / m)^{1/2}$ – плазменная частота электронов. При $\omega_L^2 > (\omega^2 + \nu_0^2)(\varepsilon - \sin^2 \theta)$, когда $\varepsilon'(\omega) < \sin^2 \theta$, убывающее в глубь металла решение уравнения (9) имеет вид

$$E_1(z) = E_1(0) \exp[-\kappa(\omega)z], \quad (12)$$

где величина $\kappa(\omega)$ описывается соотношениями

$$\kappa(s\omega) = \kappa_1(s\omega) + i\kappa_2(s\omega) \text{sgn}[\varepsilon'(s\omega) - \sin^2 \theta], \quad (13)$$

$$\kappa_l(s\omega) = \frac{s\omega}{c\sqrt{2}} \left[\sqrt{[\varepsilon'(s\omega) - \sin^2 \theta]^2 + [\varepsilon''(s\omega)]^2} - (-1)^l |\varepsilon'(s\omega) - \sin^2 \theta| \right]^{1/2}, \quad l = 1, 2. \quad (14)$$

Решение вида (12), (13) имеет место, если изменением $\varepsilon(\omega)$ на расстояниях $\kappa_l^{-1}(\omega)$ можно пренебречь (подробнее см. в [4]). В соответствии с уравнением (4) магнитное поле в металле имеет две компоненты: $B_x(x, z, t)$ и $B_z(x, z, t)$. Для используемой далее функции $B_x(x, z, t)$ в линейном приближении по полю E_L с учетом (7) из (4) и (12) получаем выражение

$$B_x(x, z, t) = \frac{\kappa(\omega)}{2ik} E_1(z) \exp(-i\omega t + ikx \sin \theta) + \text{компл. сопр.} \quad (15)$$

Излучение с частотой ω частично отражается от металла. В линейном по E_L приближении поле отраженной s -поляризованной волны имеет вид

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} E_L R \exp(-i\omega t + ikx \sin \theta - ikz \cos \theta) + \text{компл. сопр.}, \quad (16)$$

где R – комплексный коэффициент отражения. Для вектора напряженности магнитного поля отраженной волны из (4) и (16) имеем выражение $RE_L \{\cos \theta, 0, \sin \theta\}$. Используя соотношения (1), (12), (16), а также отвечающие им выражения для магнитного поля, из условий непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на поверхности металла находим связь $E_1(0)$ с E_L и комплексный коэффициент отражения:

$$E_1(0) = \frac{2k \cos \theta}{k \cos \theta + i\kappa(\omega)} E_L, \quad (17)$$

$$R = \frac{k \cos \theta - i\kappa(\omega)}{k \cos \theta + i\kappa(\omega)}. \quad (18)$$

Соотношения (6), (12) и (17) полностью определяют поле в металле на частоте ω .

При получении соотношений (17), (18) в соответствии с неравенством (7) предполагалось, что изменение поля E_L и параметров металла за время $2\pi/\omega$ пренебрежимо мало. При этом не делалось никаких предположений о соотношении между характерным временем изменения E_L и временами изменения величин, определяющих диэлектрическую проницаемость металла. Отсутствие указанных ограничений позволяет использовать соотношения (17), (18) для описания воздействия на металл лазерных импульсов с конечной длительностью порядка $\tau_p \gg 2\pi/\omega$, приводящего к слабому изменению параметров металла за время $2\pi/\omega$. Несущественность эффектов включения и выключения поля при $\tau_p \gg 2\pi/\omega$ для соотношений (17), (18) продемонстрирована ранее в работе [10].

3. Генерация второй гармоники

Перейдем к рассмотрению поля на частоте второй гармоники 2ω . Учитывая малость производной по времени $|\partial \ln u_2 / \partial t|$ (см. (7)), из (3) и (6) находим

$$(v_0 - 2i\omega) \mathbf{u}_2 = \frac{e}{m} \mathbf{E}_2 + \frac{e}{2mc} [\mathbf{u}_1, \mathbf{B}_1] - \frac{1}{2} (\mathbf{u}_1 \nabla) \mathbf{u}_1 - \frac{1}{n_0 m} \nabla p_2. \quad (19)$$

В (19) возмущение давления пропорционально возмущениям концентрации n_2 и температуры T_2 электронов, которые зависят от E_1^2 – квадрата поля на частоте ω . Величина E_1^2 связана с u_1^2 соотношениями (8), (12), (17). Если выразить p_2 через u_1^2 , то можно усмотреть, что в обсуждаемых нами условиях нормального или высоко-частотного скин-эффекта слагаемое, содержащее ∇p_2 , мало по сравнению со слагаемым, зависящим от $[\mathbf{u}_1, \mathbf{B}_1]$. Тогда, пренебрегая ∇p_2 и используя соотношение (8) и связь \mathbf{B}_1 с \mathbf{E}_1 , даваемую уравнением (4), из (19) имеем

$$\mathbf{u}_2 = \frac{ie}{m(2\omega + iv_0)} \mathbf{E}_2 + \frac{ie^2}{4m^2\omega(\omega + iv_0)(2\omega + iv_0)} \nabla E_1^2, \quad (20)$$

где учтено, что $(\mathbf{E}_1 \nabla) \mathbf{E}_1 = 0$. Согласно (20) градиент плотности энергии поля на основной частоте ∇E_1^2 приво-

дит к движению электронов вдоль осей x и z . Вследствие этого электромагнитное поле на частоте 2ω имеет две компоненты электрического поля $\mathbf{E}_2 = \{E_{2x}, 0, E_{2z}\}$ и одну компоненту магнитного поля $\mathbf{B}_2 = \{0, B_{2y}, 0\}$. Такая конфигурация отвечает р-поляризованному полю на частоте 2ω . При этом для определения $B_{2y} = B_{2y}(z) \times \exp(i2kx \sin \theta)$ из (4)–(6), (20) имеем уравнение

$$\frac{d^2 B_{2y}(z)}{dz^2} + 4k^2 [\varepsilon(2\omega) - \sin^2 \theta] B_{2y}(z) = 0. \quad (21)$$

Если выполнено условие

$$\omega_L^2 > (4\omega^2 + v_0^2)(\varepsilon - \sin^2 \theta), \quad (22)$$

то убывающее при $z \rightarrow \infty$ решение уравнения (21) имеет вид

$$B_{2y}(z) = B_{2y}(0) \exp[-\kappa(2\omega)z], \quad (23)$$

где $\kappa(2\omega) = \kappa_1(2\omega) - i\kappa_2(2\omega)$ дается формулами (13), (14) при $s = 2$. При выводе (23) учтено неравенство (7). Отметим, что согласно (13) $\kappa_1(2\omega) > \kappa_2(2\omega) > 0$. Величина $\kappa_1^{-1}(2\omega)$ определяет глубину проникновения магнитного поля второй гармоники в металл. При условии (22) решение вида (23) отвечает неоднородной электромагнитной волне. Ее амплитуда убывает пропорционально $\exp[-\kappa_1(2\omega)z]$, а волновой вектор $\{2k \sin \theta, 0, \kappa_2(2\omega)\}$ направлен под углом к поверхности металла. Если влияние столкновений несущественно, то $\kappa_2(2\omega) = 0$ и волна распространяется вдоль поверхности. Далее, принимая во внимание неравенство (7) и соотношение (20), из (5), (6) и (23) находим компоненты электрического поля в металле:

$$E_{2x}(z) = \frac{i}{2k\varepsilon(2\omega)} \left[\kappa(2\omega) B_{2y}(0) e^{-\kappa(2\omega)z} + \frac{\omega_L^2}{c^2} \frac{eE_1^2(0) \sin \theta}{2m(\omega + iv_0)(2\omega + iv_0)} e^{-2\kappa(\omega)z} \right], \quad (24)$$

$$E_{2z}(z) = -\frac{1}{4k^2\varepsilon(2\omega)} \left[4k^2 \sin \theta B_{2y}(0) e^{-\kappa(2\omega)z} + \frac{\omega_L^2}{c^2} \frac{e\kappa(\omega)E_1^2(0)}{m(\omega + iv_0)(2\omega + iv_0)} e^{-2\kappa(\omega)z} \right], \quad (25)$$

где $E_1(0)$ связано с полем основной волны E_L соотношением (17). В отличие от магнитного поля (23), зависимость электрического поля от координаты z описывается двумя разными функциями. При этом вихревая часть электрического поля, как и магнитное поле (23), пропорциональна $\exp[-\kappa(2\omega)z]$, а его потенциальная часть пропорциональна $\exp[-2\kappa(\omega)z]$ (см. (20), (24), (25)).

Электромагнитное поле на частоте 2ω высвечивается с поверхности металла. Оно подчиняется уравнениям Максвелла в вакууме и имеет вид

$$\mathbf{B}_{2r}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{B}_2^r \exp(-2i\omega t + 2ikx \sin \theta - 2ikz \cos \theta) + \text{компл. сопр.}, \quad (26)$$

где $\mathbf{B}_2^r = \{0, B_{2y}^r, 0\}$. Электрическое поле имеет такую же зависимость от координат и времени, а его напряжен-

ность $E_z^r = -B_{2y}^r \{\cos \theta, 0, \sin \theta\}$. Тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей непрерывны на поверхности металла:

$$B_{2y}(0) = B_{2y}^r, \quad E_{2x}(0) = E_{2x}^r = -B_{2y}^r \cos \theta. \quad (27)$$

Из соотношений (24), (27) находим магнитное поле волны на частоте 2ω :

$$B_{2y}^r = B_{2y}(0) = -\frac{k^2 [k \cos \theta + i\kappa(\omega)]^{-2}}{2k\varepsilon(2\omega) \cos \theta + i\kappa(2\omega)} \times \frac{2i\omega_L^2 e E_L^2}{mc^2(\omega + iv_0)(2\omega + iv_0)} \sin \theta \cos^2 \theta. \quad (28)$$

При записи соотношения (28) использовалась связь $E_1(0)$ с E_L (17). В соответствии с соотношениями (23)–(27) магнитное поле (28) полностью определяет электромагнитное поле в металле и вакууме. Отметим, что согласно соотношениям (25), (28) и $E_{2z}^r = -B_{2y}^r \sin \theta$ нормальная к поверхности металла составляющая электрической индукции εE_{2z} изменяется скачком при $z = 0$. Кроме того, согласно (20), (25) и (28) z -компонента плотности тока $j_{2z} = en_0 u_{2z} \neq 0$ при $z = 0$. Появление таких нефизических свойств является следствием использования выражения (20) для u_{2z} , полученного посредством решения гидродинамических уравнений (2), (3). Однако эти неточности гидродинамического описания не приводят к изменению формулы (28), при получении которой использовалось лишь выражение для скорости u_{2x} (20), которое следует и из строгого кинетического рассмотрения в обсуждаемых нами условиях нормального и высокочастотного скин-эффектов, когда можно не учитывать поправки, обусловленные тепловым движением электронов.

Согласно соотношениям (16) и (26) отраженная с частотой ω и генерируемая с частотой 2ω волны распространяются в одном и том же направлении, задаваемом единичным вектором $\mathbf{n} = \{\sin \theta, 0, -\cos \theta\}$. Средний за период π/ω вектор Пойнтинга, описывающий излучение на частоте 2ω , имеет вид $\mathbf{S}(2\omega) = \mathbf{n}I(2\omega)$, где $I(2\omega) = (c/8\pi)|B_{2y}^r|^2$ – плотность потока излучения. Отношение $I(2\omega)$ к $I(\omega) = (c/8\pi)E_L^2$, плотности потока на основной частоте, дает эффективность генерации второй гармоники: $\eta(2\omega) = I(2\omega)/I(\omega)$. В соответствии с таким определением $\eta(2\omega)$ из (28) находим

$$\eta(2\omega) = \left(\frac{2eE_L}{mc\omega}\right)^2 \frac{\omega_L^4 k^6 \sin^2 \theta \cos^4 \theta}{(\omega^2 + v_0^2)(4\omega^2 + v_0^2)} \times \{[k \cos \theta + \kappa_2(\omega)]^2 + \kappa_1^2(\omega)\}^{-2} \times \{[2k\varepsilon'(2\omega) \cos \theta + \kappa_2(2\omega)]^2 + [2k\varepsilon''(2\omega) \cos \theta + \kappa_1(2\omega)]^2\}^{-1}. \quad (29)$$

Если столкновения несущественны и $v_0 = 0$, эффективность (29) в четыре раза меньше приведенной в работе [6]. Такое отличие обусловлено использованием в [6] нестандартного определения напряженности поля. При $v_0 = 0$ результаты работы [6] следуют из определяющих поле излучения на частоте 2ω соотношений работы [8].

При $\omega \gg v_0$ соотношение (29) допускает обобщение на случай, когда необходимо учитывать межзонные переходы.

Согласно работе [7] в (29) и определяющих $\kappa_i(s\omega)$ формулах (13), (14) следует заменить $\varepsilon(s\omega)$ на $\varepsilon(s\omega) + \delta\varepsilon(s\omega)$, где

$$\delta\varepsilon(s\omega) = -\frac{\omega_L^2}{nms^2\omega^2} \sum_{k,b,b'} \frac{\langle b\mathbf{k}|\mathbf{p}|b'\mathbf{k}\rangle \langle b'\mathbf{k}|\mathbf{p}|b\mathbf{k}\rangle}{(E_{b'k} - E_{bk} - \hbar s\omega - i\delta)} \times [f_F(E_{b'k}) - f_F(E_{bk})]; \quad (30)$$

$|b\mathbf{k}\rangle$ – функция Блоха; \mathbf{p} – оператор импульса; \mathbf{k} – квазиимпульс; \hbar – постоянная Планка; E_{bk} – энергия электрона в зоне b ; $f_F(E_{bk})$ – распределение Ферми; $\delta > 0$ – малая поправка, определяющая обход полюса. Кроме того, не обходимо [7] домножить выражение (29) на $|\varepsilon(2\omega) + \delta\varepsilon(2\omega) - 1|[\varepsilon(2\omega) - 1]^{-1}$.

Обсудим особенности генерации второй гармоники в условиях, когда выполнено обратное (22) неравенство

$$\omega_L^2 < (4\omega^2 + v_0^2)(\varepsilon - \sin^2 \theta), \quad (31)$$

но, по-прежнему, $\omega_L^2 > (\omega^2 + v_0^2)(\varepsilon - \sin^2 \theta)$. В этих условиях $\varepsilon'(2\omega) > \sin^2 \theta$ и решение уравнения (21) имеет вид (ср. с (23))

$$B_{2y} = B_{2y}(0) \exp[i\kappa_1(2\omega)z - \kappa_2(2\omega)z]. \quad (32)$$

В отсутствие диссипации из-за столкновений электронов $\kappa_2(2\omega) = 0$, и такое решение отвечает волне с частотой 2ω и волновым вектором $\{2k \sin \theta, 0, \kappa_1(2\omega)\}$, распространяющейся в глубь металла. Из-за обусловленной столкновениями диссипации эта волна затухает на расстоянии $\sim \kappa_2^{-1}(2\omega)$, а ее электрическое поле (32) имеет две компоненты, которые описываются формулами (24), (25), если в них заменить $\kappa(2\omega)$ на $-i\kappa_2(2\omega)$. Как и ранее, такая волна частично высвечивается в вакуум. Поле в вакууме находится из условий непрерывности тангенциальных компонент (27). При этом магнитное поле в вакууме и на поверхности металла описывается выражением (28), в котором следует заменить $\kappa(2\omega)$ на $-i\kappa_2(2\omega)$. Как и в случае более низких частот (см. (22)), при условии (31) в вакууме излучение на частоте 2ω распространяется вдоль вектора \mathbf{n} , а эффективность его генерации дается соотношением (ср. с (29))

$$\eta(2\omega) = \left(\frac{2eE_L}{mc\omega}\right)^2 \frac{\omega_L^4 k^6 \sin^2 \theta \cos^4 \theta}{(\omega^2 + v_0^2)(4\omega^2 + v_0^2)} \times \{[k \cos \theta + \kappa_2(\omega)]^2 + \kappa_1^2(\omega)\}^{-2} \times \{[2k\varepsilon'(2\omega) \cos \theta + \kappa_1(2\omega)]^2 + [2k\varepsilon''(2\omega) \cos \theta + \kappa_2(2\omega)]^2\}^{-1}. \quad (33)$$

При $\varepsilon'(2\omega) = \sin^2 \theta$, $\kappa_1(2\omega) = \kappa_2(2\omega)$ соотношения (29) и (33) совпадают. Если $\varepsilon'(2\omega) > \sin^2 \theta$, то содержащиеся функции $\kappa_1(2\omega)$ и $\kappa_2(2\omega)$ знаменатели в формулах (29) и (33) различаются на величину $4k[\kappa_1(2\omega) - \kappa_2(2\omega)][\varepsilon'(2\omega) - \varepsilon''(2\omega) \cos \theta]$. Поскольку $\kappa_1(2\omega) > \kappa_2(2\omega)$, то знаменатель в (33) больше, если $\varepsilon'(2\omega) > \varepsilon''(2\omega)$, и, наоборот, меньше, если $\varepsilon'(2\omega) < \varepsilon''(2\omega)$. В частности, при сравнительно малой диссипации из-за столкновений, когда $\varepsilon'(2\omega) > \varepsilon''(2\omega)$, из сопоставления выражений (33) и (29) следует вывод об относительном уменьшении эффективности генерации излучения в вакуум на частоте 2ω . Последнее обуслов-

лено тем, что при $\varepsilon'(2\omega) > \sin^2\theta$ распространяющаяся в глубь металла волна уносит больше энергии основной волны, чем при $\varepsilon'(2\omega) < \sin^2\theta$ уносит волна, локализованная у поверхности (см. (22), (23)). Если $\omega \gg v_0$, то подобно (29) выражение (33) также допускает обобщение на случай, когда существенны межзонные переходы. Для этого, согласно работе [7], достаточно внести в (33) те же изменения, что и в выражение (29).

4. Ток увлечения

В квадратичном по напряженности поля E_L (1) приближении наряду с генерацией второй гармоники возникает направленное движение электронов со скоростью u_0 , медленно изменяющейся за время $2\pi/\omega$. Используя соотношения (6), (8), (12), (14), (17) и уравнения (3), (4), получаем уравнение, описывающее медленную эволюцию скорости u_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} + v_0 u_0 &= \frac{e}{m} E_0 + \frac{2e^2 E_L^2}{m^2(\omega^2 + v_0^2)} \\ &\times \frac{k^2 \cos^2 \theta}{[k \cos \theta + \varkappa_2(\omega)]^2 + \varkappa_1^2(\omega)} \\ &\times \left\{ \left[\varkappa_1(\omega) + \frac{v_0}{\omega} \varkappa_2(\omega) \right] e_z + \left(k \frac{v_0}{\omega} \sin \theta \right) e_x \right\} \\ &\times \exp[-2\varkappa_1(\omega)z], \end{aligned} \quad (34)$$

где e_x и e_z – единичные векторы вдоль осей x и z . По истечении времени порядка обратной частоты столкновений электронов ($\sim v_0^{-1}$) устанавливается квазистационарная скорость u_0 . Наличие тока вдоль нормали к поверхности металла привело бы к накоплению заряда. Поэтому должно выполняться равенство $j_z = en_0 u_{0z} = 0$. Обращение в нуль скорости u_{0z} обеспечивается возникновением z -компоненты квазистационарного поля

$$\begin{aligned} E_{0z} &= -\frac{2eE_L^2}{m(\omega^2 + v_0^2)} \frac{k^2 \cos^2 \theta [\varkappa_1(\omega) + \varkappa_2(\omega)v_0/\omega]}{[k \cos \theta + \varkappa_2(\omega)]^2 + \varkappa_1^2(\omega)} \\ &\times \exp[-2\varkappa_1(\omega)z]. \end{aligned} \quad (35)$$

Напротив, вдоль поверхности металла плотность тока $j_0 = en_0 u_{0x} e_x$ не равна нулю. При $v_0 t \gg 1$ из (34) находим u_{0x} и $j_0 = \{j_0, 0, 0\}$, где $j_0 = \sigma_0 E_{0x} + j_d$:

$$\begin{aligned} j_d &= \frac{eE_L^2 k^2}{2\pi m c} \frac{\omega_L^2}{\omega^2 + v_0^2} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{[k \cos \theta + \varkappa_2(\omega)]^2 + \varkappa_1^2(\omega)} \\ &\times \exp[-2\varkappa_1(\omega)z] \end{aligned} \quad (36)$$

– плотность тока увлечения; $\sigma_0 = \omega_L^2/(4\pi v_0)$ – проводимость. Если $E_{0x} = 0$, то $j_0 = j_d$. Ток увлечения (36) порождает квазистационарное магнитное поле, которое направлено вдоль поверхности металла: $B_0 = \{0, B_0, 0\}$, где

$$\begin{aligned} B_0(z) &= \frac{eE_L^2 k^2}{m c^2 \varkappa_1(\omega)} \frac{\omega_L^2}{\omega^2 + v_0^2} \\ &\times \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{[k \cos \theta + \varkappa_2(\omega)]^2 + \varkappa_1^2(\omega)} \exp[-2\varkappa_1(\omega)z]. \end{aligned} \quad (37)$$

Вне металла магнитное поле однородно и равно $B_0(z = 0)$. Выражения для плотности тока увлечения и напряженности квазистационарного магнитного поля имеют особенно простой вид при $\omega_L \gg \sqrt{\varepsilon}\omega$ и $\omega \gg v_0$, когда $j_d \simeq [4eI/(mc^2)] \sin \theta \cos^2 \theta$, $B_0(z = 0) \simeq [8\pi eI/(\omega_L mc^2)] \sin \theta \cos^2 \theta$, где $I = cE_L^2/8\pi$ – плотность потока энергии падающей волны. Полагая $E_{0x} = 0$, приведем оценку скорости дрейфового движения u_{0x} и напряженности магнитного поля для золота, когда $n_0 \simeq 5.9 \times 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $m \simeq 10^{-27} \text{ г}$, $\omega_L \simeq 1.4 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$. Тогда при плотности потока излучения $I \simeq 10^{13} \text{ Вт/см}^2$ находим $u_{0x} \simeq 8 \times 10^3 \text{ см/с}$, $B_0(z = 0) \simeq 80 \text{ Гс}$.

5. Нагрев электронов и решетки

Характерная частота столкновений электронов $v_0 = v_0(n_0, T_0)$, определяющая поле в скин-слое (12)–(13), (17), эффективность генерации второй гармоники (29), (33) и плотность тока увлечения (36), зависит от их концентрации n_0 и температуры T_0 . Обычно в нормальных металлах частота столкновений v_0 равна сумме частот столкновений электронов с примесями (v_{ei}), с фононами (v_{eph}) и между собой (v_{ee}): $v_0 = v_{ei} + v_{eph} + v_{ee}$. Слабой зависимостью v_{ei} от температуры электронов будем пренебрегать. При температурах выше температуры Дебая Θ_D частота электрон-фононных столкновений пропорциональна температуре T_{lat} решетки: $v_{eph} \sim k_B T_{lat}/\hbar$, где k_B – постоянная Больцмана. Напротив, частота электрон-электронных столкновений зависит от температуры T_0 , которая при нагреве электронов фемтосекундным лазерным импульсом может быть существенно больше T_{lat} . В условиях сильно вырожденного распределения электронов имеем [11, 12]

$$v_{ee} = a(k_B T_0)^2 / (\hbar \varepsilon_F), \quad (38)$$

где ε_F – энергия Ферми; a – численный множитель, зависящий от вида зонной структуры металла. Соотношение (38) имеет место и в том случае, когда существенны процессы переброса [11]. При описании быстропеременных процессов, для которых $\hbar\omega \gtrsim 2\pi k_B T_0$, следует учитывать увеличение частоты электрон-электронных столкновений в $1 + [\hbar\omega/(2\pi k_B T_0)]^2$ раз [13]. Пропорциональное ω^2 слагаемое входит аддитивно в измененную формулу (38) и в рассматриваемом приближении не зависит от температуры электронов. Это позволяет считать, что слагаемое, содержащее ω^2 , приводит к аддитивному вкладу в v_{ei} , и использовать для v_{ee} при высоких частотах выражение (38). Например, для золота с $\varepsilon_F \simeq 5.5 \text{ эВ}$ при $\omega \simeq 1.5 \times 10^{15} \text{ с}^{-1}$ аддитивный вклад в v_{ei} составляет $\sim 10^{13} \text{ с}^{-1}$, если $a \sim 1$. Отметим, что этот вклад на порядок меньше частоты электрон-фононных столкновений v_{eph} , которая при комнатной температуре решетки равна $\sim 0.93 \times 10^{14} \text{ с}^{-1}$.

Столкновения электронов приводят к диссипации высокочастотного поля в скин-слое. Мощность поглощения определяется джоулевым теплом Q , выделяемым в единицу времени в единице объема электронной подсистемы:

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{\omega_L^2 v_0}{8\pi \omega^2 + v_0^2} |E_1|^2 = \frac{4}{c} I \frac{v_0 \omega_L^2}{\omega^2 + v_0^2} \\ &\times \frac{k^2 \cos^2 \theta \exp[-2\varkappa_1(\omega)z]}{[k \cos \theta + \varkappa_2(\omega)]^2 + \varkappa_1^2(\omega)}. \end{aligned} \quad (39)$$

Поглощение поля в скин-слое является причиной неоднородного нагрева электронов. На начальной стадии нагрева пространственный масштаб неоднородности температуры сравним с размерами скин-слоя, и, строго говоря, использованные выше формулы для поля на частотах ω и 2ω нуждаются в пересмотре, подобном представленному в работе [4] для формул Френеля. Вместе с тем в начале нагрева отличие T_0 от T_{lat} невелико и неоднородная частота v_{ee} мала по сравнению с практически однородной частотой электрон-фононных столкновений. Поэтому до тех пор, пока $v_{\text{eph}} \gtrsim v_{\text{ee}}$, неоднородность можно приближенно не учитывать при описании полей в скин-слое. Если $v_{\text{ee}} \gtrsim v_{\text{eph}}$, но $v_0 \simeq v_{\text{ee}} < \omega$, то формула (39) дает достаточную точность и в том случае, когда определяющая v_0 частота v_{ee} изменяется на толщине скин-слоя. Такое свойство формулы (39) обусловлено тем, что изменение эффективной толщины скин-слоя при нагреве, пропорциональное $\kappa_1^{-1}(\omega)$, сравнительно мало, если v_{ee} в два-три раза меньше ω . В дальнейшем выражение (39) используется именно в тех условиях, когда квадратичными по $v_0/\omega \sim v_{\text{ee}}/\omega$ поправками в выражении для $\varepsilon(\omega)$ можно пренебречь. Охлаждение электронов обусловлено выносом тепла из скин-слоя и передачей энергии решетке. Учитывающее указанные процессы уравнение для температуры имеет вид [14–16]

$$C_e \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} = Q(z) - G(T_0 - T_{\text{lat}}), \quad (40)$$

где $C_e = \pi^2 k_B^2 n_0 T_0 / (2\varepsilon_F)$ – теплоемкость электронов; G – константа связи электронов с решеткой. Заметим, что использование уравнения для температуры оправданно на временах, больших времени релаксации энергии электронов, которое при комнатной температуре составляет порядка пикосекунды. Поэтому на начальной стадии нагрева оно неприменимо. Однако на малых временах $v_{\text{ee}} < v_{\text{eph}}$ и погрешности, возникающие при использовании уравнения (40), не оказывают существенного влияния на нелинейно-оптические свойства металла. К моменту времени, когда $v_{\text{ee}} \gtrsim v_{\text{eph}}$, время релаксации энергии электронов составляет не более 10 фс, и уравнение (40) вполне пригодно для описания последующей более медленной эволюции температур. Плотность переносимого электронами потока тепла q пропорциональна градиенту температуры:

$$q = -\lambda \frac{\partial T_0}{\partial z}, \quad (41)$$

а коэффициент теплопроводности $\lambda = C_e v_F^2 / (3v_\lambda)$, где v_F – скорость Ферми, зависит от суммарной частоты v_λ столкновений электронов с примесями ($v_{\lambda\text{ei}}$), фононами ($v_{\lambda\text{eph}}$) и между собой ($v_{\lambda\text{ee}}$): $v_\lambda = v_{\lambda\text{ei}} + v_{\lambda\text{eph}} + v_{\lambda\text{ee}}$. Определяющие теплопроводность эффективные частоты столкновений отличаются от тех, которые отвечают за высокочастотную и квазистатическую проводимости. Отметим, что в использованном выше модельном описании проводимости металла и эффективности генерации второй гармоники пренебрегалось различие частот, определяющих высокочастотную и квазистатическую проводимости. При необходимости такое различие можно учесть, введя в теорию дополнительные параметры, определяющие отличие характерных частот от v_{ei} , v_{eph} и v_{ee} , например при $\omega < v_0$. Возвращаясь к обсуждению частот, опре-

деляющих коэффициент теплопроводности, заметим, что для $v_{\lambda\text{eph}}$ и $v_{\lambda\text{ee}}$ имеют место те же зависимости от температуры решетки и электронов, а именно: $v_{\lambda\text{eph}} \sim k_B T_{\text{lat}} / \hbar$ и $v_{\lambda\text{ee}} = b(k_B T_0)^2 / (\hbar \varepsilon_F)$, где $b \neq a$. Изменение температуры решетки описывается уравнением [14–16]

$$C_{\text{lat}} \frac{\partial T_{\text{lat}}}{\partial t} = G(T_0 - T_{\text{lat}}), \quad (42)$$

где C_{lat} – теплоемкость решетки, для которой при $T_{\text{lat}} > \Theta_D$ возможна оценка $C_{\text{lat}} \simeq 3k_B N$; N – концентрация атомов решетки. Система уравнений (40)–(42) позволяет изучить влияние сравнительно медленной эволюции температур электронов и решетки на эффективность генерации второй гармоники.

6. Численное решение уравнений для температур

Рассмотрим закономерности слабонелинейного отклика металла на воздействие греющего электроны фемто-секундного импульса. Примем, что плотность потока лазерного излучения изменяется во времени по закону $I(t) = I \exp(-t^2/\tau_p^2)$, где характеризующее длительность импульса время τ_p много больше периода $2\pi/\omega$, отвечающего основной частоте импульса: $\tau_p \gg 2\pi/\omega$. В качестве примера рассмотрим эволюцию температур электронов и решетки и обусловленную изменением T_0 и T_{lat} эволюцию эффективности генерации второй гармоники в чистом золоте, для которого $\varepsilon_F \simeq 5.5$ эВ, $n_0 \simeq N \simeq 5.9 \times 10^{22}$ см $^{-3}$, $\omega_L \simeq 1.4 \times 10^{16}$ с $^{-1}$, $v_{\text{eph}} \simeq 0.93 \times 10^{14}$ с $^{-1}$, $v_{\lambda\text{eph}} \simeq 3.7 \times 10^{13}$ с $^{-1}$, $G = 3.5 \times 10^{10}$ Вт·К $^{-1}$ ·см $^{-3}$, $C_{\text{lat}} \simeq 2.4 \times 10^7$ эрг·К $^{-1}$, а рассеянием электронов на примесях можно пренебречь. Начальные температуры электронов и решетки одинаковы: $T_0 = T_{\text{lat}} = 300$ К. Именно такой температуре T_{lat} отвечают приведенные значения v_{eph} и $v_{\lambda\text{eph}}$. Использовались следующие параметры лазерного импульса: $\omega = 1.5 \times 10^{15}$ с $^{-1}$, $\tau_p \simeq 60$ фс, $I \simeq 10^{13}$ Вт/см 2 . Такие значения τ_p и I типичны для эксперимента. Отметим, что при данных параметрах импульса и металла характерная скорость электронов в поле лазерного импульса мала по сравнению с их тепловой скоростью, что позволяет использовать теорию, изложенную выше, в которой влияние переменного поля учитывается в квадратичном по напряженности поля приближении.

Полученное при указанных параметрах численное решение уравнений (40), (42) приведено на рис.1–3. На рис.1 показаны зависимости температуры электронов $T_0(z=0, t)$ на поверхности металла от времени. Функция $T_0(z=0, t)$ сначала возрастает, достигает максимума,

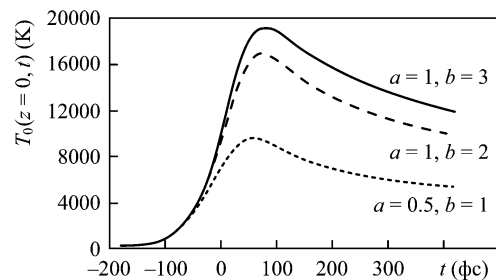


Рис.1. Изменение во времени температуры электронов на поверхности золота. Расчеты выполнены для лазерного импульса с частотой $\omega = 1.5 \times 10^{15}$ с $^{-1}$, плотностью потока 10^{13} Вт/см 2 и характерным временем включения $\tau_p = 60$ фс.

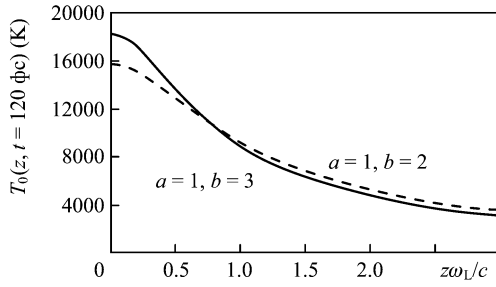


Рис.2. Профиль температуры электронов в момент времени $t = 120$ фс.

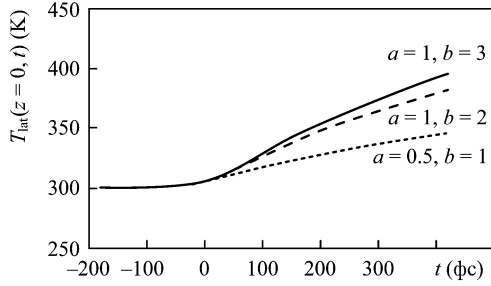


Рис.3. Зависимость от времени температуры решетки на поверхности золота. Параметры расчетов те же, что и для рис.1 и 2.

а затем монотонно убывает. Вид функции $T_0(z = 0, t)$ существенно зависит от параметров a и b , определяющих частоты ν_{ee} и $\nu_{\lambda\text{ee}}$ соответственно. Чем больше a , тем сильнее нагрев электронов. Увеличение b ведет к уменьшению коэффициента теплопроводности и замедлению охлаждения электронов в скин-слое. Последнее отчетливо видно из рис.2, где приведен профиль температуры $T_0(z, t)$ в момент времени $t = 120$ фс. При $t = 120$ фс температура T_0 близка к максимальным значениям, равным $\sim 2 \times 10^4$ К (см. рис.1). При этом она неоднородна по толщине скин-слоя. Однако максимальное отличие толщины скин-слоя $\kappa_1^{-1}(\omega)$ от c/ω_L составляет не более 10% в течение всего времени действия лазерного импульса, и неоднородность T_0 не приводит к существенным изменениям поля в скин-слое.

Поведение температуры решетки на поверхности металла $T_{\text{lat}}(z = 0, t)$ иллюстрирует рис.3 для тех же параметров a и b . Видно, что при небольших t имеет место монотонное увеличение температуры решетки. При выбранных параметрах лазерного импульса $T_{\text{lat}}(z = 0, t)$ возрастает всего на 30%, что не приводит к изменению кристаллической решетки за время действия импульса.

7. Влияние нагрева на генерацию второй гармоники и ток увлечения

Изменение во времени температуры электронов и решетки в скин-слое сопровождается изменением частот столкновений электронов с фононами и друг с другом. Вследствие изменения ν_0 изменяется эффективность генерации второй гармоники. На рис.4 приведены зависимости от времени функции $\eta(2\omega)/\eta_0 - 1$, где η_0 – эффективность генерации при $\tau_p \rightarrow \infty$ для исходных температур $T_0(t \rightarrow -\infty)$ и $T_{\text{lat}}(t \rightarrow -\infty)$. Видно, что нагрев электронов сопровождается уменьшением эффективности генерации второй гармоники, а при охлаждении функция $\eta(2\omega)/\eta_0 - 1$ монотонно возрастает. Минимум эффективности генерации имеет место в те моменты времени, ко-

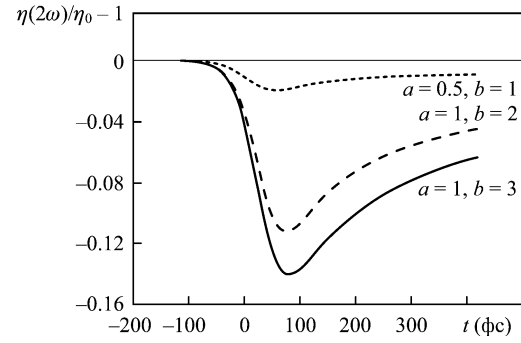


Рис.4. Эволюция во времени относительной эффективности генерации второй гармоники для золота. Параметры расчетов те же, что и для рис.1–3.

гда температура электронов близка к максимуму. Форма кривых на рис.4 существенно зависит от величины параметров a и b . Это означает, что по измерениям плотности потока излучения на частоте 2ω в разные моменты времени, как и ранее по измерениям коэффициента отражения на основной частоте ω (подробнее см. в [1, 3]), можно получать дополнительную информацию о частоте столкновений электронов. Заметим, что при проведении численных расчетов частота излучения принята равной частоте генерации лазера на хром-форстерите. При этом энергия кванта второй гармоники $2\hbar\omega \simeq 1.8$ эВ, что меньше ширины запрещенной зоны для золота, близкой к 2.5 эВ. Согласно [17] при указанной энергии и комнатной температуре вклад в диэлектрическую проницаемость от межзонных переходов сравнительно мал. Если такое положение нарушится при высоких температурах электронов, то для повышения точности определения параметров a и b для золота придется использовать источники излучения с немного меньшими частотами. Например, эрбиевый фемтосекундный лазер, для которого $2\hbar\omega \simeq 1.4$ эВ.

При нагреве металла изменяется и плотность тока увлечения (36). В случае, когда плотность потока излучения s-поляризованной волны изменяется во времени, полученное при $\nu_0 t \gg 1$ соотношение вида (36) имеет место, если $\nu_0 \tau_p \gg 1$, а также при условии медленного изменения температур электронов и решетки за время $\sim \nu_0^{-1}$. Особенности эволюции плотности тока увлечения из-за нагрева металла иллюстрирует рис.5, где приведены функции $\Delta J(t) = j_a/j_c - 1$ (j_c – плотность тока при $\tau_p \rightarrow \infty$ и температуре металла в момент начала воздействия лазерного импульса). Видно, что при нагреве металла функция $\Delta J(t)$ сначала уменьшается, достигает минимума, а затем монотонно возрастает до нуля. Отно-

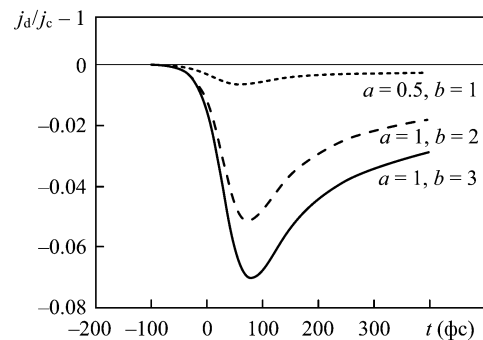


Рис.5. Относительная плотность тока увлечения на поверхности золота в зависимости от времени. Параметры расчетов те же, что и для рис.1–3.

сительное уменьшение тока увлечения обусловлено увеличением частоты столкновений электронов. При выбранных параметрах импульса и на рассмотренных временах изменение $\Delta J(t)$ в основном обусловлено эволюцией частоты электрон-электронных столкновений. Слабый нагрев решетки проявляется на последней стадии воздействия лазерного импульса и ведет к затягиванию времени релаксации плотности тока увлечения к исходному значению. Глубина провала кривой $\Delta J(t)$ тем больше, чем больше нагрев электронов. Поэтому на рис.5 кривая, отвечающая параметрам $a = 1$ и $b = 3$, лежит заметно ниже кривой для $a = 1$ и $b = 2$ и еще ниже кривой для $a = 0.5$ и $b = 1$. Из формулы (36) и рис.5 ясно, что для генерации больших токов увлечения необходимо иметь дело с чистыми металлами и минимизировать нагрев электронов и решетки.

8. Заключение

В настоящей работе представлена теория генерации второй гармоники и тока увлечения греющим металл фемтосекундным импульсом s-поляризованного излучения. Теория учитывает возможность существенного увеличения частот электрон-электронных и электрон-фоонных столкновений в скин-слое металла. Продемонстрировано, насколько важно последовательно описывать динамику изменения температур электронов и решетки для получения достоверных значений интенсивности излучения металла на удвоенной частоте и тока увлечения. Развитая теория представляет интерес для интерпретации и планирования экспериментов по взаимодействию фемтосекундных лазерных импульсов умеренной интен-

сивности с металлами и служит основой для получения информации о частотах столкновений электронов. В современных условиях полезность изложенной теории обусловлена тем, что число экспериментов, в которых изучается слабонелинейный отклик металла с температурой электронов, большей температуры решетки, продолжает увеличиваться.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-02-00696).

1. Guo C., Rodriguez G., Taylor A.J. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 1638 (2001).
2. Guo C., Rodriguez G., Hoffbauer M.A., Taylor A.J. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 3457 (2001).
3. Исаков В.А., Канавин А.П., Урюпин С.А. *Квантовая электроника*, **36**, 928 (2006).
4. Kanavin A.P., Mishchik K.N., Uryupin S.A. *J. Rus. Laser Res.*, **29**, 123 (2008).
5. Bezhanov S.G., Kanavin A.P., Uryupin S.A. *J. Rus. Laser Res.*, **29**, 219 (2008).
6. Jha S.S. *Phys. Rev.*, **140**, 2020 (1965).
7. Jha S.S., Warke C.S. *Phys. Rev.*, **153**, 751 (1967).
8. Аланакян Ю.Р. *ЖТФ*, **35**, 1552 (1965).
9. Bloembergen N., Shen Y.R. *Phys. Rev.*, **141**, 298 (1966).
10. Isakov V.A., Kanavin A.P., Uryupin S.A. *J. Rus. Laser Res.*, **25**, 397 (2004).
11. Займан Дж. *Электроны и фононы* (М.: ИЛ, 1962, гл. 7).
12. Абрикосов А.А. *Основы теории металлов* (М.: Наука, 1987).
13. Гуржи Р.Н. *ЖЭТФ*, **35**, 965 (1958).
14. Гинзбург В.Л., Шабанский В.П. *ДАН СССР*, **100**, 445 (1955).
15. Каганов М.И., Лифшиц И.М., Танатаров Л.В. *ЖЭТФ*, **31**, 232 (1956).
16. Анисимов С.И., Капелиович Б.Л., Перельман Т.Л. *ЖЭТФ*, **66**, 776 (1974).
17. Johnson P.B., Christy R.W. *Phys. Rev. B*, **6**, 4370 (1972).