

Плотность вероятности сильных флуктуаций интенсивности лазерного излучения в слабо поглощающей случайной среде

Р.Х.Алмаев, А.А.Суворов

Исходя из параболического уравнения квазиоптики, аналитически получено выражение для плотности вероятности сильных флуктуаций интенсивности излучения, распространяющегося в случайной ослабляющей среде. Проведено сравнение этой плотности вероятности с полученной экспериментально. Показано, что согласие между теорией и экспериментом во всём диапазоне изменения интенсивности излучения достигается посредством совместного учёта влияния малого случайного ослабления на распространение излучения и действия шумов на приёмник излучения при его регистрации.

Ключевые слова: распространение лазерного излучения, случайное ослабление, сильные флуктуации, распределение вероятностей.

1. Введение

Проблема распространения лазерного излучения в случайно-неоднородных средах является одной из важнейших с точки зрения применения оптических систем, в которых лазеры используются в качестве источников когерентного излучения, для работы в условиях реальной атмосферы. Наличие случайных неоднородностей в среде приводит к значительным изменениям амплитудно-фазового распределения поля лазерного пучка, величина и характер которых существенно зависят от параметров среды и протяжённости трассы. Уже в первых экспериментах по распространению лазерных пучков на протяжённых трассах в турбулентной атмосфере обнаружилась немонотонная зависимость относительной дисперсии σ_I^2 флуктуаций интенсивности от длины трассы: вначале σ_I^2 ведёт себя естественным образом – увеличивается, а затем, достигнув максимума, монотонно убывает и стремится к предельному значению, равному единице [1, 2]. Область изменения параметров задачи, при которых относительная дисперсия флуктуаций интенсивности стремится к предельному значению, получила название области насыщения или области сильных флуктуаций интенсивности.

Детальные теоретические исследования [3–5] эффекта насыщения, проведённые в рамках приближения марковского случайного процесса с использованием стохастического параболического уравнения для комплексной амплитуды волны, показали достаточно хорошее согласие с экспериментальными данными (см., напр., [6, 7]). Однако обнаружили и некоторые расхождения [4] теории и эксперимента для высших статистических момен-

тов и плотности вероятности интенсивности излучения. Так, оказалось, что теоретическая функция распределения вероятностей флуктуаций интенсивности $W(I)$ не совпадает с получаемой экспериментально. Возник парадокс, известный в литературе как логнормальный [8, 9]. Действительно, результаты экспериментальных измерений дают распределение $W(I)$, близкое к логарифмически нормальному [6, 10–12], тогда как из теории следует, что в области насыщения распределение вероятностей должно асимптотически стремиться к рэлеевскому [5]. Попытки разрешить этот парадокс путём аппроксимации распределения $W(I)$ кусочной функцией [13], К-распределением [14], в рамках эвристической модели [15], с помощью других представлений (см., напр., [6]) и при численном моделировании распространения лазерного пучка в турбулентной атмосфере (см., напр., [16–20]) в конечном итоге не привели к удовлетворительному результату, поскольку все указанные распределения при увеличении длины трассы достаточно быстро стремятся к рэлеевскому распределению.

В работах [21–23] предложен новый механизм формирования флуктуаций интенсивности лазерного излучения в области насыщения, основанный на учёте влияния относительно малых пульсаций мнимой составляющей диэлектрической проницаемости случайной среды на статистику излучения, который позволяет разрешить логнормальный парадокс.

В данной работе получены выражения для статистических моментов и плотности вероятности интенсивности лазерного излучения, распространяющегося в случайной среде с флуктуациями как действительной, так и относительно малой мнимой части диэлектрической проницаемости. Проводится сравнение полученного распределения вероятностей с экспериментальными данными во всём диапазоне изменения интенсивности излучения.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать распространение пучка лазерного излучения в случайной среде с флуктуациями ком-

Р.Х.Алмаев. Обнинский государственный технический университет атомной энергетики, Россия, Калужская обл., 249040 Обнинск, Студгородок, 1

А.А.Суворов. ГНЦ РФ – Физико-энергетический институт им. А.И.Лейпунского, Россия, Калужская обл., 249033 Обнинск, пл. Бондаренко, 1; e-mail: suvorov@ippe.ru

плексной диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}_R + i\tilde{\epsilon}_I$ (где $\tilde{\epsilon}_R$ и $\tilde{\epsilon}_I$ – действительная и мнимая части случайных изменений диэлектрической проницаемости соответственно) на трассе значительной протяжённости, для которой выполняется условие насыщения флуктуаций интенсивности излучения:

$$\beta_{RR}^2 = 0.31 C_{RR}^2 k^{7/6} z^{11/6} \gg 1, \quad (1)$$

где β_{RR}^2 – относительная дисперсия флуктуаций интенсивности плоской волны в приближении метода плавных возмущений для прозрачной турбулентной среды; z – длина трассы; k – волновое число; C_{RR}^2 – структурная характеристика флуктуаций действительной составляющей диэлектрической проницаемости. В неравенстве (1) выражение для β_{RR}^2 соответствует случаю распространения излучения в случайной среде с колмогоровским спектром флуктуаций диэлектрической проницаемости (см., напр., [3]).

Получим далее выражение для функции распределения вероятностей сильных (насыщенных) флуктуаций интенсивности лазерного излучения при его распространении в слабо поглощающей случайной среде, в которой пульсации действительной части диэлектрической проницаемости значительно превышают пульсации её мнимой составляющей: $\langle |\tilde{\epsilon}_R| \rangle \gg \langle |\tilde{\epsilon}_I| \rangle$. Для вычисления плотности вероятностей флуктуаций интенсивности воспользуемся соотношением

$$W(I) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega F_I(\Omega) \exp(-i\Omega I), \quad (2)$$

связывающим $W(I)$ с характеристической функцией $F_I(\Omega)$, которая, в свою очередь, полностью определяется статистическими моментами $\langle I^N \rangle$ интенсивности излучения:

$$F_I(\Omega) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(i\Omega)^N}{N!} \langle I^N \rangle. \quad (3)$$

Соотношения (2), (3) следуют непосредственно из определения характеристической функции (см., напр., [24]). Согласно этим соотношениям для восстановления распределения вероятностей интенсивности необходимо знать все статистические моменты интенсивности излучения.

3. Статистические моменты интенсивности

В общем виде выражение для N -го момента интенсивности в рамках приближений квазиоптики и марковского случайного процесса (см., напр., [3]) для флуктуаций комплексной диэлектрической проницаемости с привлечением представления комплексной амплитуды волны в форме интеграла Гюйенса – Кирхгофа, а также с использованием фейнмановского интеграла по траекториям для функции Грина параболического уравнения [5, 23] при распространении излучения в слабо поглощающей случайной среде можно представить следующим образом:

$$\langle I^N \rangle(\mathbf{R}) = \langle I(\mathbf{R}) \rangle^N \exp \left[\frac{N(N-1)}{2} \sigma_\tau^2(z) \right] \times \hat{L}^{(N)} \exp \left[-\frac{k^2}{8} \int_0^z d\xi \psi'_{NN}(\xi) \right], \quad (4)$$

где

$$\hat{L}^{(N)} = \left(\frac{c}{8\pi} \right)^N \frac{\exp [N\sigma_\tau^2(z)/2]}{\langle I(\mathbf{R}) \rangle^N} \prod_{j=1}^N \iint d^2 \rho'_{2j-1} d^2 \rho'_{2j} \times U_0(\mathbf{R}'_{2j-1}) U_0^*(\mathbf{R}'_{2j}) G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}'_{2j-1}) G_0^*(\mathbf{R}, \mathbf{R}'_{2j-1}) \times |C|^{2N} \prod_{j=1}^N \iint D^2 v_{2j-1}(\xi) D^2 v_{2j}(\xi) \times \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^z d\xi [\dot{v}_{2j-1}^2(\xi) - \dot{v}_{2j}^2(\xi)] - \frac{k^2}{4} \int_0^z d\xi \tilde{\psi}_{NN}(\xi) \right\} \quad (5)$$

– интегральный оператор, причём $\hat{L}^{(N)} \cdot 1$; $U_0(\mathbf{R}'_j)$ – комплексная амплитуда волны на входе (при $z=0$) в среду; $\mathbf{R}'_j = \{\rho'_j, 0\}$ – радиус-вектор в плоскости источника; $\mathbf{R} = \{\rho, z\}$ – радиус-вектор точки наблюдения; C – нормировочная постоянная; $\int D^2 v(\xi)$ означает функциональное интегрирование по всем траекториям $v(\xi)$, начинающимся в точке $(\rho', 0)$ и заканчивающимся в точке (ρ, z) ; $\dot{v} = dv/d\xi$; $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = [k/(2\pi iz)] \exp(ik|\rho - \rho'|^2/z)$ – функция Грина параболического уравнения для комплексной амплитуды волны в среде без флуктуаций диэлектрической проницаемости;

$$\tilde{\psi}_{NN}(\xi) = \sum_{j=1}^N D_+(\rho_{2j-1}^{(0)}(\xi) - \rho_{2j}^{(0)}(\xi) + v_{2j-1}(\xi) - v_{2j}(\xi)); \quad (6)$$

$$\psi'_{NN}(\xi) = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N [2(1 - \delta_{jl}) D_-(\rho_{2j-1}^{(0)}(\xi) - \rho_{2l}^{(0)}(\xi) + v_{2j-1}(\xi) - v_{2l}(\xi)) - D_-(\rho_{2j-1}^{(0)}(\xi) - \rho_{2l-1}^{(0)}(\xi) + v_{2j-1}(\xi) - v_{2l-1}(\xi)) - D_-(\rho_{2j}^{(0)}(\xi) - \rho_{2l}^{(0)}(\xi) + v_{2j}(\xi) - v_{2l}(\xi))] + 2i \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N [D_{RI}(\rho_{2j}^{(0)}(\xi) - \rho_{2l}^{(0)}(\xi) + v_{2j}(\xi) - v_{2l}(\xi)) - D_{RI}(\rho_{2j-1}^{(0)}(\xi) - \rho_{2l-1}^{(0)}(\xi) + v_{2j-1}(\xi) - v_{2l-1}(\xi))] + 4 \sum_{j \neq l}^N \sum_{l=1}^N D_{II}(\rho_{2j-1}^{(0)}(\xi) - \rho_{2l}^{(0)}(\xi) + v_{2j-1}(\xi) - v_{2l}(\xi));$$

$\rho_j^{(0)} = [\rho \xi + \rho'_j(z - \xi)]/z$; δ_{ij} – символ Кронекера; $D_{\alpha\alpha'}(\rho) = A_{\alpha\alpha'}(0) - A_{\alpha\alpha'}(\rho)$ – структурные функции флуктуаций действительной ($\alpha = \alpha' = R$) и мнимой ($\alpha = \alpha' = I$) частей диэлектрической проницаемости, а также их корреляций ($\alpha = R, \alpha' = I$); $\Phi_{\alpha\alpha'}(\mathbf{q})$ – соответствующие им спектры; $A_{\alpha\alpha'}(\rho) = 2\pi \int d^2 q \Phi_{\alpha\alpha'}(\mathbf{q}) \cos(\mathbf{q}\rho)$; $\sigma_\tau^2(z) = k^2 A_{II}(0)z$ – средний квадрат флуктуаций оптической толщины трассы τ протяжённостью z ; $D_\pm(\rho) = D_{RR}(\rho) \pm D_{II}(\rho)$.

Обобщив результаты [23] на случай вычисления высших статистических моментов интенсивности излучения и используя асимптотический метод [5, 6] анализа сильных флуктуаций интенсивности и «кумулянтный» метод вычисления интегралов [25], из (4) получим для N -го момента интенсивности следующее выражение:

$$\langle I^N \rangle(\mathbf{R}) = N! \langle I(\mathbf{R}) \rangle^N \exp \left[\frac{N(N-1)}{2} \gamma(\mathbf{R}) \right], \quad (7)$$

где

$$\gamma(\mathbf{R}) = k^2 A_{II}(0)z + K_1^{(2,2)}(\mathbf{R}) = \sigma_{\tau}^2(z) + K_1^{(2,2)}(\mathbf{R}); \quad (8)$$

$$K_1^{(2,2)}(\mathbf{R}) = -\frac{k^2}{8} \hat{L}^{(2)} \int_0^z d\xi \psi'_{2,2}(\xi)$$

– «кумулянт» первого порядка (см., напр., [23]). Как видно из определения (5) интегрального оператора $\hat{L}^{(N)}$, «кумулянт» $K_1^{(2,2)}$ зависит от распределения $U_0(\mathbf{R}')$ комплексной амплитуды поля излучения на входе в среду. Поскольку в большинстве экспериментальных работ по изучению статистики сильных флуктуаций интенсивности лазерного излучения реализовывались условия распространения лазерного пучка в режиме плоской волны, приведём выражение для $K_1^{(2,2)}$, соответствующее этому случаю:

$$K_1^{(2,2)}(\mathbf{R}) = \pi k^2 z \int_0^1 d\xi \iint d^2 q \left\{ \Phi_{-}(\mathbf{q}) \left[1 - \cos\left(\frac{q^2 z}{k} \xi\right) \right] - 2\Phi_{RI}(\mathbf{q}) \sin\left(\frac{q^2 z}{k} \xi\right) \right\} \exp\left[-\frac{k^2 z}{2} D_{+}\left(\frac{\mathbf{q}z}{k} \xi\right)\right] \quad (9)$$

$$- 2\pi k^2 z \int_0^1 d\xi \iint d^2 q \Phi_{II}(\mathbf{q}) \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{k^2 z}{2} D_{+}\left(\frac{\mathbf{q}z}{k} \xi\right)\right] \right\},$$

где $\Phi_{-}(\mathbf{q}) = \Phi_{RR}(\mathbf{q}) - \Phi_{II}(\mathbf{q})$.

Выражение (7) совместно с выражением для «кумулянта» $K_1^{(2,2)}$ отражает основные особенности поведения статистических моментов интенсивности лазерного излучения при распространении в слабо поглощающей случайной среде на трассе значительной протяжённости. Его вывод основан на том факте, что в области сильных флуктуаций интенсивности ($\beta_{RR}(z) \gg 1$), где существенны эффекты многократного рассеяния излучения на неоднородностях диэлектрической проницаемости среды, корреляционная функция флуктуаций интенсивности характеризуется двумя масштабами изменения. Первый из них – радиус когерентности ρ_c волны – выделяет область, в которой достигается наибольшая корреляция флуктуаций интенсивности. Вторым – $r_c/(k\rho_c)$ (в рассматриваемом случае $r_c/\rho_c = z/(k\rho_c^2) \sim \beta_{RR}^{6/5} \gg 1$) – определяет поведение корреляционной функции в области крупных масштабов («хвост» корреляционной функции). В итоге комплексная амплитуда волны представляет собой суперпозицию полей, подчиняющихся рэлеевской и логнормальной статистикам. Рэлеевская составляющая обусловлена многократным рассеянием волн на турбулентных вихрях, масштабы которых не превышают r_c . Логнормальная компонента возникает вследствие рассеяния рэлеевской составляющей на вихрях атмосферной турбулентности, масштабы которых лежат в диапазоне $r_c \ll r \ll L_0$, где L_0 – внешний масштаб турбулентности. Флуктуации же мнимой части диэлектрической проницаемости, как следует из (7) и (9), оказывают на моменты интенсивности двойное влияние. С одной стороны, бугеровский множитель $\exp \sigma_{\tau}^2$ определяется вкладом всего спектра флуктуаций мнимой части диэлектрической проницаемости. При этом наибольший вклад вносят крупномасштабные, порядка внешнего масштаба L_0 , турбулентные вихри. С другой стороны, через структурные функции D_{II} и D_{RI} на величину $\langle I^N \rangle$ также влияют и флуктуации ослабления, соответствующие инерционно-

му и вязкому интервалам турбулентности. Всё это приводит к тому, что изменение амплитуды волны из-за многократного рассеяния излучения на турбулентных вихрях, масштабы которых лежат в диапазоне $l_0 \ll r \ll r_c$ (где l_0 – внутренний масштаб турбулентности), не подчиняется закону Бугера. Кроме того, в момент $\langle I^N \rangle$ вносят вклад корреляционные эффекты, определяемые D_{RI} . Таким образом, из-за наличия случайного ослабления зависимость моментов интенсивности излучения в области насыщения (в результате конкуренции двух механизмов) от параметров задачи будет иметь принципиально различный характер для разных величин $\tilde{q}_0 = r_c/L_0$. С этим обстоятельством, в частности, связано различие условий применимости выражений (7), которые имеют вид

$$|\gamma(\mathbf{R}) - k^2 A_{II}(0)z| \ll 1 \text{ при } \tilde{q}_0 < 1,$$

$$|\gamma(\mathbf{R})| \ll 1 \text{ при } \tilde{q}_0 \gg 1.$$

Отметим, что впервые зависимость вида (7) для статистических моментов интенсивности излучения от порядка момента N в случае многократного рассеяния излучения в прозрачной случайной среде была установлена в работе [26] при выяснении условий применимости К-распределения для описания функции распределения сильных флуктуаций интенсивности. Независимо от работы [26] выражение вида (7) было получено на основе вариационного принципа в [21] при исследовании распределения вероятностей сильных флуктуаций интенсивности излучения в слабо поглощающей случайной среде. Однако только использование разработанного в [25] «кумулянтного» метода даёт возможность проводить последовательное вычисление статистических моментов с требуемой точностью. Это продемонстрировано в [23] при анализе дисперсии сильных флуктуаций интенсивности, а также в настоящей работе при выводе соотношения (7).

Для сравнения результатов, полученных с помощью выражения (7), с данными измерений статистических моментов интенсивности лазерного излучения, распространяющегося в турбулентной атмосфере, на рис.1 показаны зависимости $J_N(J_2)$ нормированных моментов $J_N = \langle I^N \rangle / \langle I \rangle^N$, рассчитанных по следующей из (7) формуле

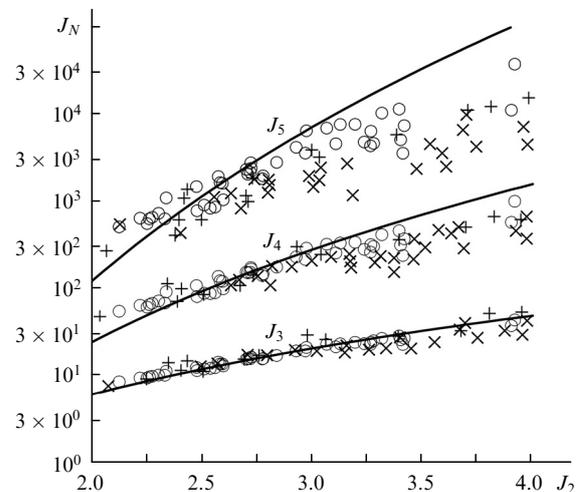


Рис.1. Зависимости N -го момента интенсивности лазерного излучения от второго момента. Точки – эксперимент [27] (+), [28] (×) и [29] (○). Сплошные кривые – расчёт по формуле (10).

$$J_N = N!(J_2/2)^{N(N-1)/2}, \quad (10)$$

а также аналогичные зависимости, соответствующие экспериментальным данным работ [27–29]. Прежде всего рис.1 демонстрирует хорошее согласие расчётных и эмпирических данных для третьего момента интенсивности излучения. Из него также видно, что с ростом порядка статистического момента увеличивается расхождение как между теорией и экспериментом, так и между экспериментальными данными разных авторов. В работах [30, 31] (см. также [6]) показано, что причиной такого расхождения является ограниченность диапазона регистрируемых в эксперименте значений интенсивности излучения, которая приводит к росту погрешности измерения моментов с увеличением N . Следствием этого является, с одной стороны, систематическое занижение с ростом J_2 результатов измерений по сравнению с вероятностными моментами, а с другой – их завышение при $J_2 \leq 2$. В этих же работах установлено, что для корректного сравнения теоретических и экспериментальных результатов требуется использовать усечённые вероятностные моменты, рассчитываемые посредством интегрирования по конечному отрезку в пределах от минимального до максимального значения интенсивности в рассматриваемой экспериментальной реализации.

4. Функция распределения вероятностей

Найдём теперь плотность распределения вероятностей флуктуаций интенсивности излучения. Используя выражение (7) для $\langle I^N \rangle$ и связь характеристической функции (2) с функцией распределения (1), для случая $\gamma > 0$ получаем

$$W(I) = \frac{\exp \gamma(\mathbf{R})}{\sqrt{2\pi\gamma(\mathbf{R})\langle I(\mathbf{R}) \rangle}} \times \int d\tau \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{2\gamma(\mathbf{R})} - \frac{I}{\langle I(\mathbf{R}) \rangle} \exp \left[\frac{3}{2} \gamma(\mathbf{R}) + \tau \right] \right\}. \quad (11)$$

Отметим, что выражение, подобное (11), было получено в [32] в рамках эвристической модели без учёта флуктуаций ослабления излучения и в [21] с учётом случайного ослабления излучения для разрешения логнормального парадокса. Численное моделирование [17, 20] распространения лазерного пучка в прозрачной турбулентной среде даёт распределение вероятностей сильных флуктуаций интенсивности излучения, сходное с (11).

Как нетрудно убедиться, распределение (11) (при $\gamma > 0$) удовлетворяет необходимым требованиям, накладываемым на плотность вероятности. Полученное распределение при любых неотрицательных I положительно, является действительной функцией и нормировано на единицу.

Однако, в случае, когда $\gamma < 0$, требование неотрицательности для $W(I)$ нарушается. В работе [23] показано, что при определенных значениях параметров задачи возможна реализация условий, при которых относительная дисперсия σ_I^2 сильных флуктуаций интенсивности излучения в случайно поглощающей среде может принимать значения, меньшие единицы: $\sigma_I^2 < 1$. В этом случае вследствие существенного проявления компенсационных эффектов, обусловленных корреляцией $\tilde{\epsilon}_R$ и $\tilde{\epsilon}_I$, функция $\gamma(\mathbf{R})$ принимает отрицательные значения. Восстановление в

соответствии с (1), (2) и (7) функции распределения сильных флуктуаций при $\gamma = -\Gamma < 0$ даёт для неё следующее интегральное представление:

$$W(I) = \frac{\exp(\Gamma/2)}{\sqrt{2\pi\Gamma\langle I \rangle}} \int d\tau \exp \left(-\frac{\tau^2}{2\Gamma} - \frac{I}{\langle I \rangle} e^{\Gamma/2 \cos \tau} \right) \times \cos \left(\tau - \frac{I}{\langle I \rangle} e^{\Gamma/2 \sin \tau} \right). \quad (12)$$

Невыполнимость условия $W(I) \geq 0$ при некоторых значениях I в этом случае можно обнаружить и из формулы (7) для $\langle I^N \rangle$. Действительно, помимо неотрицательности σ_I^2 , должно выполняться и более общее условие неотрицательности величины $S_I^{2N} = \langle (I^N / \langle I^N \rangle - 1)^2 \rangle$, которая при $N = 1$ совпадает с относительной дисперсией флуктуаций случайной величины ($S_I^2 = \sigma_I^2$). Как следует из соотношений (7), при любых отрицательных значениях γ , начиная с некоторого $N = N^{(-)}$, условие $S_I^{(2N)} \geq 0$ не выполняется. Нарушение этого условия означает, что при определенных значениях аргумента (тем меньших, чем больше $|\gamma|$, и наоборот) функция распределения может принимать отрицательные значения. Следовательно, при $\gamma < 0$ приближение первых «кумулянтов», использованное при получении формулы (7) для статистических моментов интенсивности излучения, при восстановлении функции распределения является недостаточным. (Следует отметить, что такая же проблема имеет место и в теории вероятностей при анализе негауссовых случайных процессов с помощью ограниченного набора истинных (вероятностных) кумулянтов [24]). Завершая обсуждение случая $\gamma < 0$, заметим, что функция распределения (12) принимает отрицательные значения (имеет осциллирующий характер около нуля) в области выбросов интенсивности, вероятность которых чрезвычайно мала, тогда как в существенной области определения она и в этом случае положительна.

Наглядное представление о поведении функции распределения вероятностей интенсивности в случае сильных флуктуаций при различных параметрах γ даёт рис.2. Видно, что с ростом параметра γ увеличивается вероятность так называемых замираний сигнала и его выбросов. Вместе с тем на определённом интервале (0.5, 3)

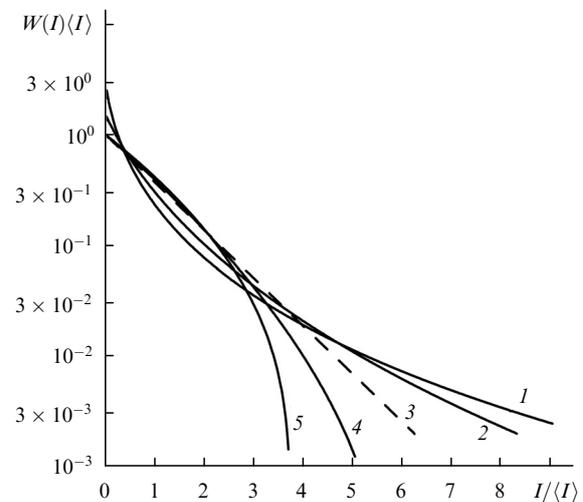


Рис.2. Поведение нормированной плотности распределения вероятностей сильных флуктуаций интенсивности излучения при $\gamma = 1.0$ (1), 0.4 (2), $\gamma \rightarrow 0$ (3), $\gamma = -0.1$ (4) и -0.2 (5).

значений нормированной интенсивности излучения функция распределения с увеличением γ убывает.

Обратимся далее к анализу распределения (12), соответствующему случаю $\gamma(\mathbf{R}) > 0$. Прежде всего укажем на некоторые особенности асимптотического поведения функции $W(I)$ при различных параметрах γ . Так, при $\gamma \rightarrow 0$ функция $W(I)$ стремится к рэлеевскому экспоненциальному распределению. В обратном случае, когда $\gamma \gg 1$ (формально при $\gamma \rightarrow \infty$, а как показывают результаты численного расчёта, уже при $\gamma \geq 3$), распределение (12) при $I \exp(\gamma/2)/\langle I \rangle > 1$ близко к логарифмически-нормальному. Описание распределения (12) в широких пределах изменения интенсивности и параметра γ с хорошей точностью даётся следующим выражением:

$$W(I) \approx \frac{e^\gamma}{\sqrt{1+T(J)}} \exp \left[-\frac{T^2(J) + 2T(J)}{2\gamma} \right], \quad (13)$$

где $T(J)$ – корень уравнения $T = \gamma J \exp(-T)$; $J = I \times \exp(3/2\gamma)/\langle I \rangle$. Выражение (13) получается в результате вычисления интеграла в распределении (11) методом перевала.

Проведем сопоставление распределения (11) с некоторыми экспериментальными функциями распределения, полученными при изучении распространения пучка лазерного излучения в турбулентной атмосфере [10, 11]. В рассматриваемых экспериментах изучалось распространение лазерного пучка в режиме плоской волны в условиях насыщения флуктуаций интенсивности. В этом случае зависимость параметра γ от условий задачи определяется следующей формулой [23]:

$$\gamma(z) = k^2 A_{\Pi}(0)z + 0.43\beta_{RR}^{-4/5}(z). \quad (14)$$

На рис.3 представлены результаты расчётов функции $W(I)$, полученные с помощью выражения (11), и обработанные экспериментальные данные работ [10, 11].

Согласие теоретических значений функции распределения (11) с данными эксперимента [10] демонстрирует рис.3,а. В эксперименте [10] исследовалось распространение лазерного пучка в режиме плоской волны на трассе длиной $z = 1.75$ км при $\beta_{RR} = 5$, $k \approx 10^5$ см⁻¹ и квадрате относительной дисперсии флуктуаций интенсивности $\sigma_I^2 = 1.46$. Из этого рисунка прежде всего видно, что теоретическое распределение с параметром $\gamma = 0.22$ (кривая 1) хорошо описывает экспериментальные данные на всём интервале измерений, тогда как кривая 2, построенная без учёта влияния на распространение излучения случайного ослабления, описывает их гораздо хуже. Для условий рассматриваемого эксперимента вклад в статистику интенсивности лазерного излучения флуктуаций показателя преломления и коэффициента поглощения примерно одинаков: $0.43\beta_{RR}^{-4/5}(z) = 0.12$ и, в соответствии с формулой (14), $k^2 A_{\Pi}(0)z = 0.10$. Используя последнее соотношение, получаем, что условиям эксперимента [10] соответствует параметр $A_{\Pi}(0) = 5.7 \times 10^{-17}$ см.

Соответствие распределения (11) экспериментальным данным, взятым из работы [11], иллюстрирует рис.3,б. В эксперименте [11] исследовалось распространение лазерного пучка в режиме плоской волны на естественной трассе длиной $z = 2.5$ км при $\beta_{RR} = 11.5$ и $k = 10^5$ см⁻¹. Наилучшее совпадение экспериментальной и теоретической кривых достигается так же, как и в эксперименте [10],

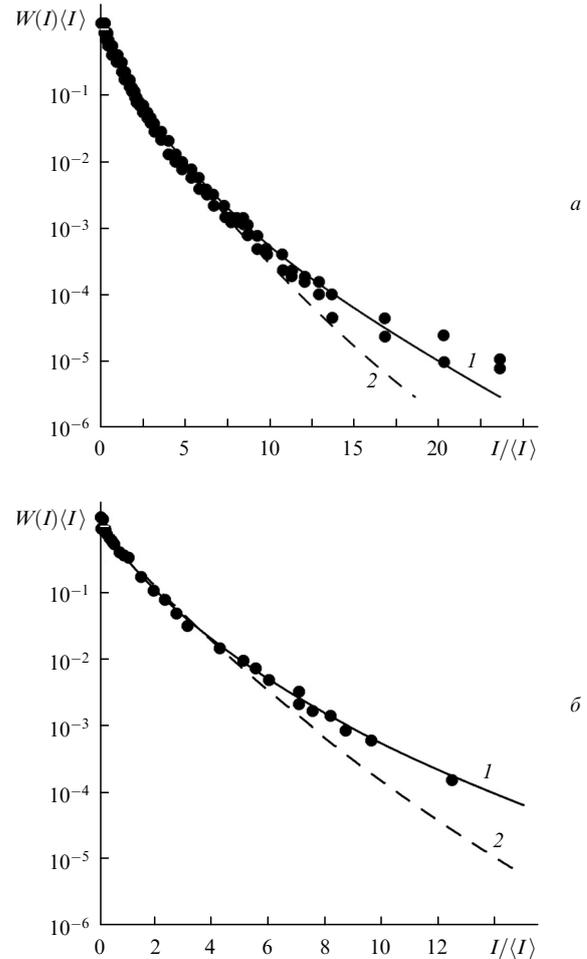


Рис.3. Нормированные распределения вероятностей флуктуаций интенсивности в области насыщения. Точки – эксперимент [10] (а) и [11] (б). Кривые 1 – расчёт по формуле (11) при $\gamma = 0.22$, кривые 2 – расчёт по формуле (11) без учёта флуктуаций ослабления при $\gamma = 0.12$ (а) и 0.06 (б).

при $\gamma = 0.22$, которому отвечает $A_{\Pi}(0) = 6.4 \times 10^{-17}$ см. В отличие от [10] в условиях эксперимента [11] доминирующий вклад в флуктуации интенсивности излучения давали случайные изменения ослабления, поскольку в этом случае вклад $0.43\beta_{RR}^{-4/5}(z) = 0.06$ примерно в три раза меньше вклада $k^2 A_{\Pi}(0)z = 0.16$. Из рис.3,б видно, что кривая 1, построенная с учётом флуктуаций ослабления, описывает всю совокупность экспериментальных данных [11], тогда как кривая 2, построенная без учёта флуктуаций ослабления, согласуется с результатами измерений лишь на весьма ограниченном интервале интенсивностей.

Как уже отмечалось, традиционно в теоретических исследованиях прохождения лазерного пучка в турбулентной атмосфере влиянием на распространение излучения флуктуаций ослабления пренебрегалось в силу их относительной малости. Поэтому не проводилось специальных исследований ни механизма их возникновения, ни их величины. Между тем проведённый анализ показал, что распределение вероятностей сильных флуктуаций интенсивности очень чувствительно к стохастизации излучения, обусловленной относительно слабыми пульсациями мнимой части диэлектрической проницаемости. Измерения функции $W(I)$ позволяют получить только интегральную характеристику случайных изменений мнимой

части диэлектрической проницаемости – параметр $A_{II}(0)$. Для более детального изучения характеристик случайного поля $\tilde{\epsilon}_j$ можно использовать следующий комбинированный подход. Прежде всего, в результате исследования фазовых флуктуаций отраженной ОВФ-зеркалом волны (свойства которых рассмотрены в [25]) можно установить закономерности поведения флуктуаций мнимой части диэлектрической проницаемости в области высоких пространственных частот. Согласование этих закономерностей с поведением флуктуаций ослабления в низкочастотной области может быть достигнуто последующим исследованием статистики излучения в области сильных флуктуаций интенсивности. На основании результатов таких измерений можно будет сделать определённые выводы как о величине параметров, характеризующих случайные изменения ослабления в турбулентной атмосфере в целом, так и о наиболее вероятной причине их возникновения.

5. Функция распределения вероятностей в области замираний сигнала

В завершение затронем один важный вопрос, относящийся непосредственно к теме статьи. Различные модели функций распределения вероятностей интенсивности в теории распространения волн в турбулентной атмосфере строились, исходя из требования наилучшего описания экспериментальных данных в области больших значений интенсивности излучения ($I \geq \langle I \rangle$). В работе [11] было обращено внимание на то, что значительные расхождения между экспериментальными и теоретическими функциями распределения наблюдаются и в области замираний сигнала, при значениях аргумента функции $W(I)$, много меньших среднего значения интенсивности. Для корректной интерпретации результатов измерений при $I \ll \langle I \rangle$ следует учесть, что в общем случае регистрируемый детектором сигнал содержит шумы, эквивалентная средняя интенсивность которых значительно меньше средней интенсивности исследуемого лазерного пучка. Поэтому модельные распределения (в частности, и распределение (11)), полученные на основе предположения о том, что единственной причиной стохастизации регистрируемого излучения является его взаимодействие с атмосферной турбулентностью, не могут верно описывать измеренные распределения вероятностей во всём диапазоне интенсивностей. Существенное влияние шумов на поведение экспериментальной функции распределения продемонстрировано в работе [29].

Для адекватного описания функции распределения вероятностей флуктуаций интенсивности измеряемого сигнала в области замираний примем, что регистрируемая приемником интенсивность I_s излучения является суммой некоррелированных интенсивностей исследуемой волны I и шума I_n ($I_s = I + I_n$), причём средняя интенсивность шума значительно меньше средней интенсивности сигнала: $\delta_n = \langle I_n \rangle / \langle I \rangle \ll 1$. Функция распределения вероятностей регистрируемого излучения $W_s(I_s)$ будет представлять собой свертку (см., напр., [33])

$$W_s(I_s) = \int_0^{I_s} dI' W_n(I_s - I') W(I') \quad (15)$$

распределений вероятностей $W_n(I_n)$ и $W(I)$ интенсивностей шума и исследуемой волны соответственно.

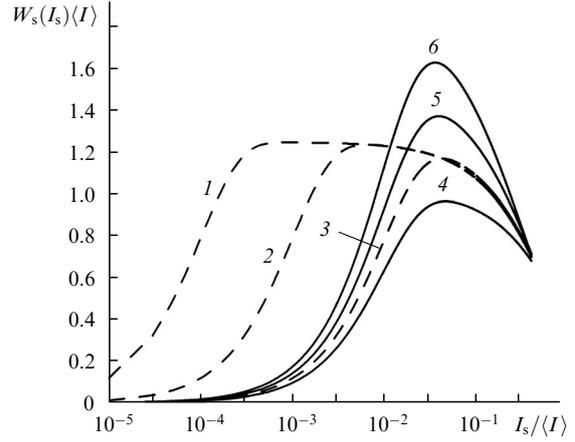


Рис.4. Нормированные распределения вероятностей интенсивности регистрируемого сигнала при $\delta_n = 10^{-4}$ (1), 10^{-3} (2), 10^{-2} (3–6) и $\gamma = 0.22$ (1–3), 0.01 (4), 0.4 (5), 0.6 (6).

В качестве примера рассмотрим случай, когда интенсивность шума подчиняется экспоненциальному рэлеевскому закону распределения:

$$W_n(I_n) = \frac{1}{\langle I_n \rangle} \exp\left(-\frac{I_n}{\langle I_n \rangle}\right). \quad (16)$$

Результаты вычисления интеграла (15) с распределениями вероятностей интенсивностей (11) и (16) исследуемого излучения и шума соответственно для различных значений параметров δ_n и γ представлены на рис.4. Видно, что распределение $W_s(I_s)$ немонотонно: возрастая на начальном участке изменения I_s , оно при значениях $I_s \approx \langle I_n \rangle$ достигает максимума, после которого убывает и при $I_s \gg \langle I_n \rangle$ стремится к распределению интенсивности исследуемой волны.

Сравнение результатов эксперимента [11] и расчёта по формулам (15), (11), (16) во всём диапазоне измерений представлено на рис.5. Из него видно, что теоретическая кривая наилучшим образом описывает экспериментальные точки при $0.05 < \delta_n \leq 0.1$. Для более точного согласования теоретической и экспериментальной функций распределения вероятностей интенсивности регистрируемого сигнала в области его замираний необходимо использовать распределение шума, соответствующее усло-

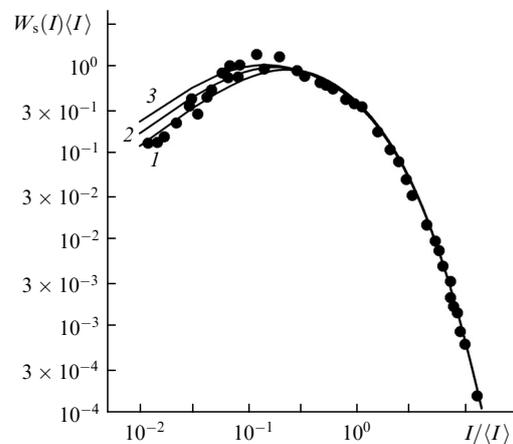


Рис.5. Сравнение рассчитанной по формуле (11) при $\gamma = 0.22$ и экспериментальной функций распределения вероятностей флуктуаций интенсивности излучения во всём диапазоне измерений для $\delta_n = 0.1$ (1), 0.07 (2) и 0.05 (3). Точки – эксперимент [11].

виям конкретных измерений. Рассмотренный пример показывает, что наблюдаемая в экспериментах немонотонность функции $W_s(I_s)$ обусловлена действием на приёмник излучения шумов и никак не связана с характером флуктуаций интенсивности излучения, вызванных турбулентностью среды.

6. Заключение

В настоящей работе теоретически изучено распределение вероятностей сильных флуктуаций интенсивности лазерного излучения, распространяющегося в случайной ослабляющей среде. Использование «кумулянтного» метода позволило учесть эффекты многократного рассеяния рэлеевской компоненты излучения и получить аналитически, исходя из параболического уравнения квазиоптики, функцию распределения вероятностей интенсивности с учётом флуктуаций поглощения. Сравнение данной функции распределения с полученными экспериментально показало, что согласие теории с экспериментом достигается посредством учёта влияния на распространение излучения малого случайного ослабления. Пренебрежение же этим влиянием приводит к заметному различию теоретических результатов и экспериментальных данных. Кроме того, показано, что причиной наблюдаемой в экспериментах немонотонности распределения вероятностей сильных флуктуаций интенсивности является действие на приёмник излучения шумов. Совокупное влияние на измеряемый сигнал двух факторов – малого случайного ослабления и шумов – даёт экспериментальное распределение, близкое к логарифмически нормальному, тогда как теоретическое моделирование распространения лазерного пучка в турбулентной среде в пренебрежении этими факторами приводит к заметно различающимся распределениям, которые асимптотически стремятся к рэлеевскому экспоненциальному. Показано также, что совместный учёт влияния флуктуаций мнимой части диэлектрической проницаемости турбулентной среды на распространение излучения и действия шумов на приёмник излучения при его регистрации позволяет дать приемлемое объяснение логнормальному парадоксу.

Авторы благодарны А.Л.Афанасьеву, В.А.Банаху и А.П.Ростову за предоставление экспериментальных материалов работы [29].

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ и правительства Калужской области (проект № 09-02-97531).

1. Грачёва М.Е., Гурвич А.С. *Иzv. вузов. Сер. Радиофизика*, **8**, 717 (1965).
2. Грачёва М.Е. *Иzv. вузов. Сер. Радиофизика*, **10**, 775 (1967).
3. Рыгов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. *Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля* (М.: Наука, 1978).
4. Якушкин И.Г. *Иzv. вузов. Сер. Радиофизика*, **19**, 384 (1976).
5. Заворотный В.У., Клячкин В.И., Татарский В.И. *ЖЭТФ*, **73**, 481 (1977).
6. Зуев В.Е., Банах В.А., Покасов В.В. *Современные проблемы атмосферной оптики. Т. 5. Оптика турбулентной атмосферы* (Л.: Гидрометеиздат, 1988).
7. Andrews L.C., Phillips R.L., Hopen C.Y. *Laser Beam Scintillation with Applications* (Bellingham, WA: SPIE Press, 2001).
8. De Wolf D.A. *J. Opt. Soc. Am.*, **59**, 1455 (1969).
9. Wang T., Strohben J. *J. Opt. Soc. Am.*, **64**, 583 (1974).
10. Грачёва М.Е., Гурвич А.С., Ломадзе С.О., Покасов В.В. *Иzv. вузов. Сер. Радиофизика*, **17**, 105 (1974).
11. Патрушев Г.Я., Рубцова О.А. *Оптика атмосферы и океана*, **6**, 1333 (1993).
12. *Распространение лазерного пучка в атмосфере. Проблемы прикладной физики*. Под ред. Дж.Стробена (М.: Мир, 1981).
13. Гочелашвили К.С., Шишов В.И. *ЖЭТФ*, **74**, 1974 (1978).
14. Jakeman E., Pussey P.N. *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 546 (1978).
15. Churnside J.H., Clifford S.F. *J. Opt. Soc. Am. A*, **4**, 1923 (1987).
16. Flatte S.M., Bracher C., Wang G.-Y. *J. Opt. Soc. Am. A*, **11**, 2080 (1994).
17. Hill R.J., Frehlich R.G. *J. Opt. Soc. Am. A*, **14**, 1530 (1997).
18. Flatte S.M., Gerber J.S. *J. Opt. Soc. Am. A*, **17**, 1092 (2000).
19. Frehlich R. *Appl. Opt.*, **39**, 393 (2000).
20. Jakeman E., Ridley K.D. *Modeling Fluctuations in Scattered Waves* (New York – London: Taylor and Francis Group, 2006).
21. Алмаев Р.Х., Суворов А.А. *Письма в ЖЭТФ*, **52**, 718 (1990).
22. Алмаев Р.Х., Суворов А.А. *Иzv. вузов. Сер. Радиофизика*, **34**, 671 (1991).
23. Алмаев Р.Х., Суворов А.А. *Иzv. РАН. Сер. Физика атмосферы и океана*, **44**, 360 (2008).
24. Малахов А.Н. *Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований* (М.: Радио и связь, 1978).
25. Алмаев Р.Х., Суворов А.А. *Квантовая электроника*, **20**, 874 (1993).
26. Dashen R. *Opt. Lett.*, **10**, 110 (1984).
27. Патрушев Г.Я., Петров А.И., Покасов В.В. *Иzv. вузов. Сер. Радиофизика*, **26**, 823 (1983).
28. Phillips R.L., Andrews L.C. *J. Opt. Soc. Am.*, **72**, 864 (1982).
29. Афанасьев А.Л., Банах В.А., Ростов А.П. *Оптика атмосферы и океана*, **21**, 121 (2008).
30. Патрушев Г.Я., Печеркина Т.П., Ростов А.П. *Автоматрия*, № 3, 22 (1985).
31. Патрушев Г.Я., Рубцова О.А. *Оптика атмосферы и океана*, **7**, 1390 (1994).
32. Churnside J.H., Hill R.J. *J. Opt. Soc. Am. A*, **4**, 727 (1987).
33. Гудмен Дж. *Статистическая оптика* (М.: Мир, 1988).