

# Особенности тепловых режимов лазерных активных элементов в форме прямоугольной пластины при стационарной накачке

А.Н.Алпатьев, В.А.Смирнов, И.А.Щербаков

*Продолжено исследование совокупности явлений, связанных со сглаживанием температурного профиля в активном элементе в форме прямоугольной пластины и возрастанием порога ее разрушения под действием оптической накачки при изменении ее оптической плотности (эффект сглаживания термооптических неоднородностей – СТОН-эффект). Показано, что СТОН-эффект существует не только при увеличении, но и при уменьшении оптической плотности, если оно происходит за счет уменьшения толщины образца. Приведена расчетная зависимость максимального перепада температур внутри пластины от оптической плотности в момент термического разрушения пластины. Показано, что изменение оптической плотности вследствие изменения как коэффициента поглощения, так и геометрического размера пластины по-разному влияет на очередность наступления одного из двух нежелательных событий – разрушения пластины или закипания охлаждающей воды – по мере увеличения накачки. Рассчитанные соотношения образуют две зоны оптической плотности, различающиеся очередностью наступления этих событий. Оценены допустимые значения максимальных температур в каждой из зон.*

**Ключевые слова:** тепловые режимы, лазерные активные элементы.

## 1. Введение

Одной из основных проблем, возникающих при создании лазеров большой средней мощности, является нагрев активного элемента (АЭ), который ограничивает эффективность генерации вследствие ухудшения спектроскопических параметров среды, наводит термлинзу, ведет к терморазрушению АЭ и т. д. Применение АЭ в форме прямоугольной пластины позволяет, как известно, увеличивать теплосъем посредством увеличения площади поверхностей, контактирующих с охлаждающей средой.

В работах [1–4] было показано, что рост оптической плотности АЭ на длинах волн излучения накачки ведет к эффекту сглаживания термооптических неоднородностей (СТОН-эффект), который проявляется в уменьшении расходимости излучения лазера и в увеличении порога термического разрушения.

В настоящей работе рассмотрены предельные возможности АЭ в форме прямоугольной пластины при стационарной накачке, увеличение которой ведет либо к термическому разрушению АЭ, либо к достижению такой его температуры, при которой произойдет нарушение нормального режима охлаждения: например, в случае охлаждения водой – ее закипание. Определены зависимости предельных интенсивностей излучения накачки не только от оптической плотности  $D$  ( $D = kh$ ), но и от коэффициента поглощения излучения накачки  $k$ , а также от толщины пластины  $h$ . Вычислены предельно допустимые интенсивности накачки, при которых катастро-

фические события еще не наступают. Определена очередность событий, т. е. найден такой набор значений  $k$  и  $h$ , при которых, по мере увеличения накачки, первым начинается либо разрушение АЭ, либо закипание воды. Показано, что СТОН-эффект возможен не только при увеличении, но и при уменьшении оптической плотности, если оно происходит за счет уменьшения толщины пластины.

## 2. Схема поперечной накачки. Функция источников тепловыделения

На рис. 1 представлена оптическая схема накачки АЭ. Стационарная селективная накачка осуществляется с двух сторон пластины вдоль оси  $z$ . Интенсивность накачки с каждой стороны равна половине общей интенсивности  $I_0$  (двухсторонняя симметричная) и равномерно распределена в направлениях осей  $x$  и  $y$ . Зеркала осветительной системы с коэффициентом отражения  $R$  на длине волны накачки возвращают обратно в АЭ не полностью поглощенное за каждый проход излучение накачки. Коэффициент поглощения излучения накачки  $k$  в АЭ одинаков по всей толщине  $h$  пластины, что возможно при интенсивности накачки выше или равной пороговой. Таким образом, можно записать выражение для суммарной интен-

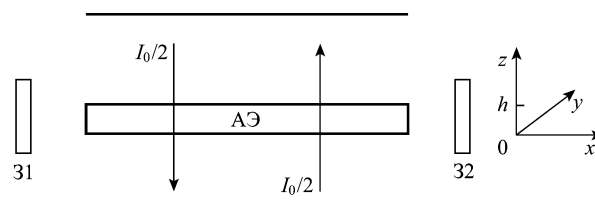


Рис. 1. Оптическая схема поперечной накачки АЭ в резонаторе (31, 32 – зеркала резонатора).

А.Н.Алпатьев, В.А.Смирнов, И.А.Щербаков. Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: lisdenis@mail.ru

Поступила в редакцию 3 июля 2009 г.

сивности накачки внутри пластины в зависимости от координаты  $z$ :

$$I(z) = A_1 \frac{I_0}{2} \{ [\exp(-kz) + R \exp(kz - 2kh)] + \exp(-kh) [\exp(kz) + R \exp(-kz)] \}, \quad (1)$$

где  $A_1 = [1 - R^n \exp(-nkh)] / [1 - R^2 \exp(-2kh)]$ ;  $n$  – число проходов излучения накачки в пластине.

При  $R = 1$  и  $n \rightarrow \infty$  выражение (1) приводится к виду

$$I(z) = \frac{I_0}{2} \frac{\cosh[k(z-h)] + \cosh(kz)}{\sinh(kh)}, \quad (2)$$

при этом излучение накачки в результате бесконечного количества проходов полностью поглощается. Распределение (2) аналогично распределению поглощенной в АЭ энергии накачки. Функция, описывающая распределение объемных источников тепловыделения, полученная из (2), имеет следующий вид:

$$q_v(z) = \frac{\xi I_0 k}{2} \frac{\cosh(kz - D/2)}{\sinh(D/2)}, \quad (3)$$

где  $\xi$  – доля поглощенной энергии накачки, перешедшая в тепло;  $D = kh$  – оптическая плотность пластины на длине волны накачки.

Выражение (3), полученное для функции тепловых источников при селективной накачке, можно обобщить на случай широкополосной ламповой накачки. В этом случае под  $I_0$  надо понимать полную интенсивность излучения лампы, а под  $k$  – средний по спектру коэффициент поглощения [1–4]. Очевидно, что и доля тепловыделения  $\xi$  в случае ламповой накачки будет отличаться от величины  $\xi$  при селективной накачке. Получившееся из (3) выражение, с учетом указанных замен, будет в точности совпадать с функцией тепловых источников, полученной в [1–4] несколько другим способом.

### 3. Уравнение теплопроводности. Распределение температуры в АЭ. Внутренние и внешние перепады температур

Рассмотрим распределение температуры в пластине при двухсторонней симметричной однородной накачке для оптической схемы, приведенной выше, когда охлаждение (например, проточной водой) тоже является симметричным, т. е. осуществляется с двух сторон при  $z = 0$  и  $z = h$ , а торцы пластины теплоизолированы.

Уравнение теплопроводности для такой схемы накачки имеет вид [5–7]

$$\frac{d^2 T(z)}{dz^2} = \frac{q_v(z)}{\lambda},$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности; граничные условия 3-го рода

$$\left. \frac{dT(z)}{dz} \right|_{z=0} = \frac{\alpha}{\lambda} [T(0) - T_f], \quad \left. \frac{dT(z)}{dz} \right|_{z=h} = -\frac{\alpha}{\lambda} [T(h) - T_f];$$

$\alpha$  – коэффициент теплообмена между пластиной и водой;  $T(0)$ ,  $T(h)$  – температуры боковых поверхностей пла-

стины при  $z = 0$  и  $z = h$ ;  $T_f$  – температура охлаждающей воды.

Поскольку задача полностью симметрична, т. е. интенсивности излучения накачки и условия охлаждения пластины одинаковы с двух сторон, то  $T(0) = T(h)$ . Тогда распределение температуры в пластине будет следующим:

$$T(z) = \frac{\xi I_0}{2\lambda k} \frac{\cosh(D/2) - \cosh(kz - D/2)}{\sinh(D/2)} + \frac{\xi I_0}{2\alpha} + T_f. \quad (4)$$

Первое слагаемое в (4) (обозначим его  $\Delta T_1(z)$ ) описывает перепад температур внутри пластины, совпадающий с полученным в [1–4], второе слагаемое в (4) (обозначим его  $\Delta T_2$ ) – перепад между температурой боковой поверхности пластины и температурой охлаждающей среды. Очевидно, что если сумма перепада температур  $\Delta T_2$  и температуры охлаждающей воды достигнет  $100^\circ\text{C}$ , то вода закипит. Это приведет к парообразованию и резкому уменьшению теплообмена, что, в свою очередь, увеличит температуру боковой поверхности и внутренний перепад температур и в конечном итоге приведет к катастрофическому ухудшению режима охлаждения. Тогда ведущая к закипанию критическая интенсивность накачки

$$I_0^{\text{cr}} = \frac{2\alpha}{\xi} \Delta T_2^{\text{cr}}. \quad (5)$$

Представляет интерес рассмотреть зависимость перепада температур от параметров  $h$  и  $D$  и  $k$  и  $D$ . Поэтому далее выражение для  $\Delta T_1(z)$  мы будем записывать двойкой, чтобы иметь возможность анализировать температурные свойства пластины при вариации параметров.

Тогда максимальный перепад температур (при  $z = h/2$ ) по отношению к температуре поверхности пластины (при  $z = 0$  или  $z = h$ ) при произвольной накачке

$$\Delta T_1^{\text{max}} = \begin{cases} AI_0 h \frac{\Theta(D)}{D}, \\ AI_0 \frac{1}{k} \Theta(D), \end{cases} \quad (6)$$

где  $A = \xi/(2\lambda)$ ;  $\Theta(D) = \tanh(D/4)$ .

Введя переменную  $\chi$ , определяемую из соотношения  $z = h(\chi + 1)/2$ , выражение для  $\Delta T_1(z)$  можно записать так:

$$\Delta T_1(z) = \Delta T_1(\chi) = \Delta T_1^{\text{max}} f(\chi, D),$$

где  $\chi = z/(h/2) - 1$ ;

$$f(\chi, D) = \frac{\cosh(D/2) - \cosh(\chi D/2)}{\cosh(D/2) - 1}$$

– выражение, описывающее профиль распределения перепада температур внутри образца по  $\chi$ , нормированного на  $\Delta T_1^{\text{max}}$ ; величина  $D/2$  характеризует степень сглаживания функции  $f(\chi, D)$ . Зависимость  $f(\chi, D)$ , представленная на рис.2, при уменьшении  $D$  переходит в параболическую, а при увеличении  $D$  – в распределение типа «полки»:

$$f(\chi, D) = \begin{cases} 1 - \chi^2, & D \rightarrow 0, \\ 1, & D \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Таким образом, сглаживание термооптических неоднородностей внутри пластины характеризуется двумя

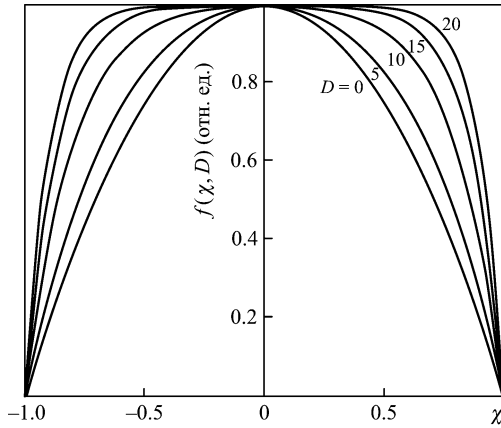


Рис.2. Профиль распределения внутреннего перепада температур в пластине, нормированного на  $\Delta T_1^{\max}$ , при различных значениях оптической плотности.

главными параметрами – максимальным перепадом температур  $\Delta T_1^{\max}$  и нормированной функцией распределения температуры по толщине пластины  $f(\chi, D)$ .

На рис.3 представлены результаты расчета максимального внутреннего перепада температур  $\Delta T_1^{\max} = \Delta T_1^{\text{cr}}$  в кристалле в зависимости от оптической плотности при критической накачке  $I_0^{\text{cr}}$  в момент закипания охлаждающей воды. Необходимые для расчетов параметры здесь и ниже соответствуют кристаллу ИАГ : Nd,  $\lambda = 0.13 \text{ Вт}\cdot\text{см}^{-1}\cdot\text{К}^{-1}$ ,  $\xi = 0.24$  (для селективной накачки на длине волны  $\sim 808 \text{ нм}$ );  $\alpha = 1 \text{ Вт}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$  [8, 9].

Кривые 1, 2, 3 построены при постоянных  $h$  ( $h_i, i = 1, 2, 3$ ), а кривые 1', 2', 3' – при постоянных  $k$  ( $k_j, j = 1, 2, 3$ ), причем значения постоянных  $h$  и  $k$  выбраны такими, что  $h_i k_j = 4$  при  $i = j$ . Тогда  $\Delta T_1^{\text{cr}}|_{D \rightarrow 0} = \Delta T_1^{\text{cr}}|_{D \rightarrow \infty}$ . Из рис.3 видно, что уменьшение  $\Delta T_1^{\text{cr}}$  происходит как при увеличении, так и при уменьшении оптической плотности, а именно:  $D$  увеличивается при  $h = \text{const}$ ;  $D = \text{const}$  при уменьшении  $h$  и увеличении  $k$ ;  $D$  уменьшается при  $k = \text{const}$ . Реализация этих трех вариантов ведет к сглаживанию термооптических неоднородностей за счет уменьшения максимального внутреннего перепада температур. Однако наиболее эффективно СТОН-эффект реализуется в первом случае, т. к. помимо уменьшения  $\Delta T_1^{\max}$  сглаживается и нормированное распределение перепада темпера-

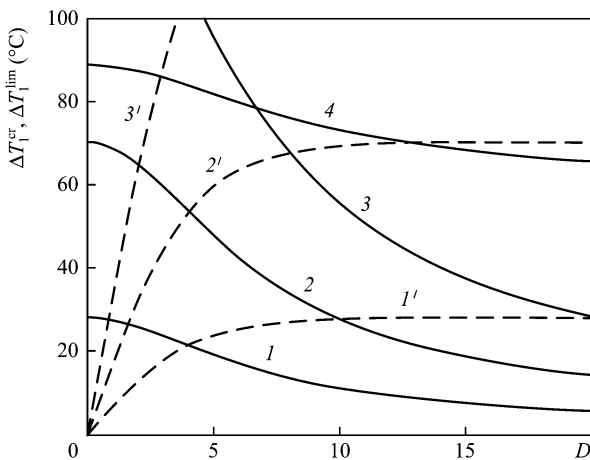


Рис.3. Расчетные зависимости критического ( $\Delta T_1^{\text{cr}}$ , 1–3, 1'–3') и предельного ( $\Delta T_1^{\text{lim}}$ , 4) внутреннего перепада температур в пластине ИАГ : Nd от оптической плотности, полученные при  $h_i = 0.2, 0.5$  и  $1 \text{ см}$  (1, 2, 3) и при  $k_j = 20, 8$  и  $4 \text{ см}^{-1}$  (1', 2', 3') соответственно. Параметры  $h_i$  и  $k_j$  связаны соотношением  $h_i k_j = 4$  при  $i = j$ .

тур  $f(\chi, D)$ . Существование СТОН-эффекта при  $h = \text{const}$  и увеличении  $D$  экспериментально подтверждено в работах [4, 10] на примере уменьшения расходимости лазерного излучения.

#### 4. Распределение термоупругих напряжений в пластине

Выражение для термоупругих напряжений в пластине при распределении температуры внутри нее  $T(z)$  получено, например, в [11, 12]:

$$\sigma(z) = \gamma \left[ -T(z) + \bar{T} + \overline{T(z)(z - h/2)} \right], \quad (7)$$

$$\sigma_{xx}(z) = \sigma_{yy}(z) = \sigma(z), \quad \sigma_{zz} = 0,$$

где

$$\bar{T} = \frac{1}{h} \int_0^h T(z) dz;$$

$$\overline{T(z) \left( z - \frac{h}{2} \right)} = \frac{12}{h^3} \left( z - \frac{h}{2} \right) \int_0^h T(z) \left( z - \frac{h}{2} \right) dz;$$

$\gamma$  – коэффициент, пропорциональный коэффициенту термического расширения и обратный коэффициенту упругих податливостей, изменяется в зависимости от ориентации пластины относительно кристаллофизических осей кристалла [4].

Подставив в выражение (7) температуру из (4), получим распределение напряжения по толщине пластины, аналогичное приведенному в [4]:

$$\sigma(z) = \gamma \frac{\xi I_0 h}{4\lambda} \frac{(D/2) \cosh(kz - D/2) - \sinh(D/2)}{(D/2)^2 \sinh(D/2)}. \quad (8)$$

Чтобы пластина не разрушилась при нагревании, должно выполняться неравенство  $\sigma(z) \leq \sigma_s$ , где  $\sigma_s$  – предельное скалывающее напряжение (для кристалла ИАГ при ориентации кристаллофизической оси  $z \parallel [100]$   $\sigma_s = 2008 \text{ кГ/см}^2$ ,  $\gamma = 33.95 \text{ кГ}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$  [4]). В напряженном состоянии пластины внутри нее существуют две симметрично расположенные плоскости разгрузки, параллельные широким поверхностям пластины. Между плоскостями разгрузки напряжение является отрицательным (сжатие), а между плоскостями разгрузки и поверхностями пластины – положительным (растяжение).

Максимальные напряжения  $\sigma(z)$ , при любых значениях параметров  $k$  и  $h$ , возникают на поверхностях с  $z = 0$  и  $z = h$ . Предельная интенсивность накачки, при которой происходит разрушение пластины, оценивается как

$$I_0^{\text{lim}} = \begin{cases} BD\Omega(D)/h, \\ Bk\Omega(D), \end{cases} \quad (9)$$

где

$$B = \frac{\sigma_s \lambda}{\gamma \xi}; \quad \Omega(D) = \frac{D \sinh(D/2)}{(D/2) \cosh(D/2) - \sinh(D/2)}.$$

На рис.4 представлены результаты расчета предельной интенсивности накачки кристалла  $I_0^{\text{lim}}$  (на длине волны  $\sim 808 \text{ нм}$ ), ведущей к термическому разрушению пластины, в зависимости от оптической плотности. Для каждой из кривых 1, 2, 3 постоянна толщина  $h$  ( $h_i, i = 1, 2, 3$ ), а для

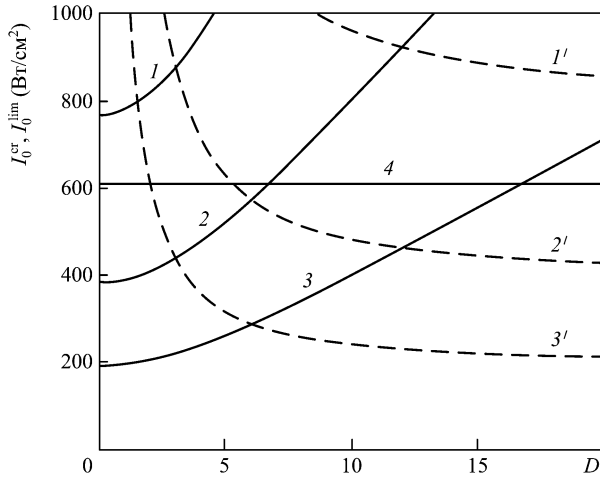


Рис.4. Расчетные зависимости предельной ( $I_0^{\text{lim}}$ , 1–3, 1'–3') и критической ( $I_0^{\text{cr}}$ , 4) интенсивностей селективной (808 нм) накачки ИАГ: Nd от оптической плотности пластины, полученные при  $h_i = 0.5, 1$  и  $2$  см (1, 2, 3) и при  $k_j = 12, 6$  и  $3$  см<sup>-1</sup> (1', 2', 3') соответственно. Параметры  $h_i$  и  $k_j$  связаны соотношением  $h_i k_j = 6$  при  $i = j$ .

каждой из кривых 1', 2', 3' постоянен коэффициент  $k$  ( $k_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ). Значения  $h_i$  и  $k_j$  выбраны такими, что  $h_i k_j = 6$  при  $i = j$ . Тогда  $I_0^{\text{lim}}|_{D \rightarrow 0} = I_0^{\text{lim}}|_{D \rightarrow \infty}$ . Из рис.4 видно, что  $I_0^{\text{lim}}$  растет как с увеличением, так и с уменьшением оптической плотности, а именно:  $D$  увеличивается при  $h = \text{const}$ ;  $D = \text{const}$  при уменьшении  $h$  и увеличении  $k$ ;  $D$  уменьшается при  $k = \text{const}$ . Во всех трех случаях увеличивается пороговая интенсивность термического разрушения пластины. Экспериментальное подтверждение такого проявления СТОН-эффекта при  $h = \text{const}$  и росте  $k$  приведено в работах [4, 10].

Предельный внутренний перепад температур в момент разрушения находится из (6) и (9):

$$\Delta T_1^{\text{lim}} = \frac{\sigma_s}{2\gamma} \Psi(D), \tag{10}$$

где

$$\Psi(D) = \Theta(D)\Omega(D) = \frac{D[\cosh(D/2) - 1]}{(D/2)\cosh(D/2) - \sinh(D/2)};$$

$$\lim_{D \rightarrow 0} \Psi(D) = 3, \quad \lim_{D \rightarrow \infty} \Psi(D) = 2.$$

Видно, что  $\Delta T_1^{\text{lim}}$ , в отличие от  $\Delta T_1^{\text{max}} = \Delta T_1^{\text{cr}}$  и  $I_0^{\text{lim}}$ , зависит только от оптической плотности.

Среднеинтегральный по толщине предельный внутренний перепад температур в момент разрушения находится из (4) и (9):

$$\overline{\Delta T_1^{\text{lim}}} = \frac{1}{h} \int_0^h \Delta T_1(z) dz = \frac{\sigma_s}{2\gamma} \bar{\Psi}, \tag{11}$$

где  $\bar{\Psi} = 2$ .

На рис.3 показан предельный внутренний перепад температур в кристалле ИАГ: Nd в момент разрушения в зависимости от оптической плотности.

Итак, мы получили зависимости максимального внутреннего перепада температур в пластине при разных интенсивностях накачки от оптической плотности, а также от каждого из параметров  $k$  и  $h$  в отдельности. Из рис.3, 4 видно, что существует некоторая очередность достиже-

ния рассчитанных величин (либо критического, либо предельного внутреннего перепада температур) по мере увеличения интенсивности накачки, которая зависит от значений параметров  $k$  и  $h$ .

### 5. Зоны оптических плотностей, в которых происходит закипание воды или разрушение АЭ

При выполнении равенства  $I_0^{\text{lim}} = I_0^{\text{cr}}$  предельный внутренний перепад температур  $\Delta T_1^{\text{lim}}$  образуется одновременно с критическим внешним перепадом температур  $\Delta T_2^{\text{cr}}$ . Это возможно только при определенном наборе значений параметров  $k$  и  $h$ , определяемых из следующего уравнения, которое находится приравниванием выражений (5) и (9):

$$\frac{D\Omega(D)}{h} = \frac{2\alpha\Delta T_2^{\text{cr}}\gamma}{\lambda\sigma_s}. \tag{12}$$

Заметим, что уравнение (12) не содержит  $\zeta$ . Поэтому параметры  $k$  и  $h$ , удовлетворяющие уравнению (12), могут быть реализованы при разных способах накачки, например как ламповой, так и селективной.

Учтем зависимость  $\lambda$  от температуры. Для этого воспользуемся данными для ИАГ, приведенными, например, в работе [13]:

$$\lambda(T) = \lambda_0 \left( \frac{204K}{T - 96K} \right)^{0.63}, \tag{13}$$

где  $\lambda_0$  – коэффициент теплопроводности при  $T = 300$  К.

Для определения  $\lambda$  будем использовать два значения температуры  $T$ , входящих в формулу (13), – максимальное предельное и среднеинтегральное по толщине предельное, при которых одновременно наступает разрушение пластины и закипание воды:

$$T_{\text{max}}^{\text{lim}}(D) = \frac{\sigma_s}{2\gamma} \Psi(D) + 100^\circ\text{C}, \tag{14}$$

$$\overline{T_{\text{max}}^{\text{lim}}} = \frac{\sigma_s}{\gamma} + 100^\circ\text{C}. \tag{15}$$

При этом коэффициент теплопроводности по всей толщине пластины будем считать постоянным. Использо-

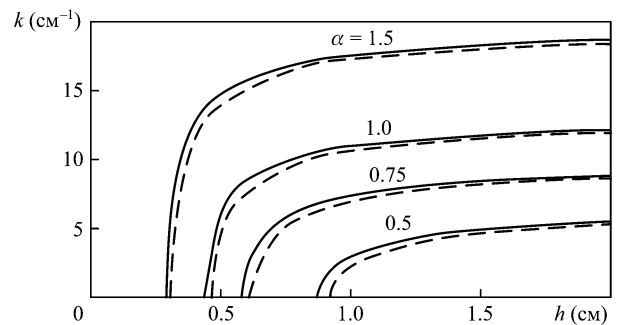


Рис.5. Линии, разделяющие плоскость ( $h, k$ ) на области приоритетов событий, которые могут наступать при увеличении интенсивности накачки: правее каждой линии – разрушение образца, левее – закипание воды. Расчет проведен для кристалла ИАГ с ориентацией  $z || [100]$ . Сплошные кривые рассчитаны для коэффициента теплопроводности  $\lambda$ , соответствующего температуре  $T_{\text{max}}$ , штриховые –  $\bar{T}_{\text{max}}$ .

ние в расчете двух максимальных температур,  $T_{\max}^{\text{lim}}$  либо  $\frac{T_{\max}^{\text{lim}}}{T_{\max}^{\text{lim}}}$ , позволит получить более достоверную оценку искомого соотношения параметров  $k$  и  $h$ .

На рис.5 приведены расчетные кривые, разделяющие плоскость  $(h, k)$  на области, в которых по мере увеличения интенсивности накачки сначала начинает либо закипать вода (слева от каждой кривой), либо разрушаться пластина (справа от каждой кривой). Очевидно, что на границе зон максимальная температура пластины будет определяться выражением (14), т. е. при  $D \rightarrow 0$  она составит  $\sim 190^\circ\text{C}$ , а при больших  $D$  уменьшится до  $\sim 160^\circ\text{C}$ .

## 6. Заключение

В данной работе исследованы особенности тепловых режимов АЭ в форме прямоугольной пластины, охлаждаемой водой, при стационарной накачке.

1. Показано, что при увеличении оптической плотности пластины наряду со СТОН-эффектом существует антиСТОН-эффект, который проявляет себя в зависимости от соотношения параметров  $h$  и  $k$ . Например, увеличивая оптическую плотность при  $h = \text{const}$ , получим СТОН-эффект, а увеличивая оптическую плотность при  $k = \text{const}$  – антиСТОН-эффект (за счет увеличения максимального внутреннего перепада температур и уменьшения порога термомеханического разрушения кристалла под действием оптической накачки).

2. Определена зависимость максимального внутреннего перепада температур от оптической плотности в момент разрушения пластины. Эта величина уменьшается по мере роста оптической плотности не более чем на 1/3 от ее значения при малых оптических плотностях.

3. Плоскость  $(k, h)$  разделена на две области, в каждой из которых по мере увеличения интенсивности накачки первым достигается одно из двух событий – разрушение пластины или закипание воды. Показано, что положение границы областей не зависит от доли поглощенной эне-

гии накачки, перешедшей в тепло. Таким образом, результаты расчета можно применить для любого способа накачки – как ламповой (широкополосный спектр), так и диодной (селективный узкополосный спектр).

4. Для кристалла с термомеханическими параметрами, соответствующими кристаллу ИАГ, показано, что в каждой из двух областей максимальная температура пластины не может превышать примерно  $190^\circ\text{C}$  при малых оптических плотностях и примерно  $160^\circ$  при больших оптических плотностях без ущерба для АЭ. Эти предельные температуры достигаются на границе двух областей, т. е. при таких  $k$  и  $h$ , когда разрушение пластины и закипание воды происходят одновременно.

1. Данилов А.А., Осико В.В., Прохоров А.М., Щербаков И.А. *Квантовая электроника*, **15**, 486 (1988); *Препринт ИОФАН № 23* (М., 1987).
2. Данилов А.А., Никольский М.Ю., Щербаков И.А. *Изв. АН СССР. Сер. физич.*, **51**, 1431 (1987).
3. Прохоров А.М., Щербаков И.А. *Изв. АН СССР. Сер. физич.*, **51**, 1341 (1987).
4. Алпатьев А.Н., Данилов А.А., Никольский М.Ю., Прохоров А.М., Цветков В.Б., Щербаков И.А. *Труды ИОФАН*, **26**, 107 (1990).
5. Михеев М.А. *Основы теплопередачи* (М–Л.: Госэнергоиздат, 1956).
6. Карслоу Г., Егер Д., *Теплопроводность твердых тел* (М.: Наука, 1964).
7. Лыков А.В. *Теория теплопроводности* (М.: Высшая школа, 1967).
8. Зверев Г.М., Голяев Ю.Д., Шалаев Е.А., Шокин А.А. *Лазеры на алюмоиттриевом гранате с неодимом* (М.: Радио и связь, 1985).
9. Белостоцкий Б.Р., Любавский Ю.В., Овчинников В.М. *Основы лазерной техники* (М.: Сов. радио, 1972).
10. Данилов А.А., Никольский М.Ю., Прохоров А.М., Цветков В.Б., Щербаков И.А. *Квантовая электроника*, **16**, 517 (1989).
11. Мезенов А.В., Сомс Л.Н., Степанов А.И. *Термооптика твердотельных лазеров* (Л.: Машиностроение, 1986).
12. Инденбом В.Л., Сильверстова И.М., Сиротин Ю.И. *Кристаллография*, **1**, 599 (1956).
13. Contag K., Erhard S., Giesen A., in *Trends in Optics and Photonics* (Washington, DC, Optical Society of America, 2000, v. 34, pp. 124–130).