PACS 42.50.–p; 42.65.–k; 71.35.–y

Особенности двухфотонной оптической нутации в системе биэкситонов в полупроводниках с учётом упругих межчастичных взаимодействий

П.И.Хаджи, В.В.Васильев

Изучены особенности двухфотонной нутации в системе когерентных биэкситонов в полупроводниках типа CuCl с учётом упругого биэкситон-биэкситоного взаимодействия. Показано, что в зависимости от значений параметров системы оптическая нутация представляет собой процесс периодического превращения пар фотонов в биэкситоны и обратно. Предсказана возможность фазового контроля процесса оптической нутации.

***Ключевые слова**: двухфотонная оптическая нутация, биэкситоны в полупроводниках, упругие межчастичные взаимодействия.*

1. Введение

Оптическая нутация представляет собой периодическое изменение начального состояния системы под влиянием поля внешней электромагнитной волны, приводящее к соответствующей модуляции излучения среды [1, 2]. В [3] представлена теория оптической нутации в системе двухуровневых атомов, взаимодействующих с конечным числом фотонов в резонаторе. Теория оптической нутации в экситонной области спектра построена в [4 – 9]. Показано, что при низких уровнях возбуждения среды частота нутации определяется константой экситон-фотонного взаимодействия, а при высоких уровнях возбуждения она начинает зависеть от плотности экситонов. Исследована также нутация в системе когерентных экситонов, фотонов и биэкситонов в области M-полосы люминесценции [7 – 10]. Показано, что в пределе заданной плотности фотонов (экситонов) частота нутации пропорциональна амплитуде электромагнитной (материальной) волны.

В [8 – 14] построена теория двухфотонной нутации в системе когерентных биэкситонов. В [13, 14] показано, что частота нутации даже без учёта межчастичного взаимодействия существенно зависит от плотности фотонов и биэкситонов. Предсказано, что протекание нутационного процесса определяется начальной разностью фаз фотонов и биэкситонов, что свидетельствует о возможности фазового контроля двухфотонной нутации. Однако возникает естественный вопрос о влиянии межчастичных взаимодействий на динамику нутации. Этот вопрос особенно актуален при высоких уровнях возбуждения, когда плотность биэкситонов достаточно велика и актуальными оказываются процессы упругих биэкситон-биэкситонных взаимодействий. В связи с этим в настоящей работе изучены особенности двухфотонной нутации в системе когерентных биэкситонов с учётом упругих межчастичных взаимодействий.

П.И.Хаджи. Институт прикладной физики АНМ, Молдавия, MD2800 Кишинёв, ул. Академией, 5
В.В.Васильев. Приднестровский государственный университет, Молдавия, MD3300 Тирасполь, ул. 25 Октября, 128; e-mail: vasscorp@mail.ru

Поступила в редакцию 14 июля 2010 г.

2. Основные уравнения теории двухфотонной нутации

Изучим явление двухфотонной оптической нутации в системе когерентных фотонов и биэкситонов в полупроводниках под действием ультракоротких импульсов резонансного лазерного излучения. Предполагается, что длительность импульсов τ_p намного меньше времени релаксации τ_{rel} биэкситонов ($\tau_p \ll \tau_{rel}$). В этом случае процессами релаксации биэкситонов можно пренебречь, т. к. они не успевают срабатывать за время действия импульса. По этой причине в дальнейшем учитываются только процессы вынужденного излучения и поглощения света с участием биэкситонов. Предполагая, что спектральная ширина импульсов много меньше энергии связи биэкситонов (в кристалле CuCl она составляет 30 – 40 мэВ [15 – 17]), можно пренебречь оптической экситон-биэкситонной конверсией и экситон-фотонным взаимодействием, поскольку указанные процессы характеризуются огромной расстройкой своей резонансной энергии с энергией фотонов, обеспечивающих двухфотонную генерацию биэкситонов. Рассматриваемое нами явление оптической нутации состоит в попарном превращении одинаковых фотонов в биэкситоны и в излучательной рекомбинации биэкситонов с образованием пар фотонов (рис.1). Гамильтониан взаимодействия

$$H_{\rm int} = h\mu\left(\hat{b}^{+}\hat{c}\hat{c} + \hat{c}^{+}\hat{c}^{+}\hat{b}\right) + \frac{1}{2}\,h\nu\hat{b}^{+}\hat{b}^{+}\hat{b}\hat{b}, \tag{1}$$

где $\hat{b}$ ($\hat{b}^{+}$) и $\hat{c}$ ($\hat{c}^{+}$) – операторы уничтожения (рождения) биэкситона и фотона соответственно; μ – константа двухфотонного возбуждения биэкситона из основного состояния кристалла; ν – константа упругого биэкситон-биэкситонного взаимодействия.

Используем приближение среднего поля (mean field approximation), в котором среднее значение операторов отлично от нуля: $\langle\hat{b}\rangle = b \neq 0$, $\langle\hat{c}\rangle = c \neq 0$. Здесь b и c считаются комплексными амплитудами материального и

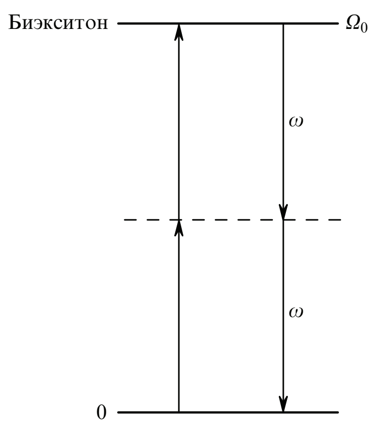


Рис.1. Схема квантовых переходов из основного состояния кристалла в биэкситонное.

электромагнитного полей. Усредняя гайзенберговские уравнения движения для операторов $\hat{b}$ и $\hat{c}$, в этом приближении получаем уравнения движения для соответствующих амплитуд b и c. Считаем, что все фотоны являются когерентными. Они имеют одну и ту же частоту, волновой вектор и поляризацию, причём эти характеристики не меняются за время действия импульса. Образующиеся биэкситоны также являются когерентными. Тогда в условиях полной когерентности системы можно факторизовать среднее значение от произведения нескольких операторов в виде произведения средних значений каждого из операторов. Получающаяся таким образом с использованием гамильтониана (1) система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая временную эволюцию амплитуд материального и электромагнитного полей, имеет вид

$$\mathrm{i}\dot{b} = \Omega_0 b + \mu cc + \nu b^* bb, \tag{2}$$

$$\mathrm{i}\dot{c} = \omega c + 2\mu c^* b, \tag{3}$$

где Ω_0 – собственная частота биэкситона; ω – частота фотона. Поскольку состояния фотонов и биэкситонов являются когерентными и макрозаполненными, параметры b и c будем считать функциями времени. Систему уравнений (2), (3) дополним начальными условиями

$$b|_{t=0} = b_0 \exp(\mathrm{i}\varphi_0), \quad c|_{t=0} = c_0 \exp(\mathrm{i}\psi_0), \tag{4}$$

где каждая переменная характеризуется своей начальной амплитудой (b_0, c_0) и фазой (φ_0, ψ_0).

Далее введём в рассмотрение плотности частиц $N = |b|^2$, $f = |c|^2$ и компоненты «поляризации» $Q = \mathrm{i}(b^* cc - c^* c^* b)$ и $R = b^* cc + c^* c^* b$. Используя (2) и (3), легко получить следующую систему нелинейных эволюционных уравнений для введённых функций:

$$\dot{N} = -\mu Q, \quad \dot{f} = 2\mu Q, \tag{5}$$

$$\dot{Q} = (\varDelta - \nu N)R + 2\mu f(4N - f), \tag{6}$$

$$\dot{R} = -(\varDelta - \nu N)Q, \tag{7}$$

где $\varDelta = 2\omega - \Omega_0$ – расстройка резонанса. Используя (4), можно получить начальные условия для плотностей частиц и поляризаций:

$$N|_{t=0} \equiv N_0 = |b_0|^2, \quad f|_{t=0} \equiv f_0 = |c_0|^2,$$
$$Q|_{t=0} \equiv Q_0 = 2f_0\sqrt{N_0}\sin\Theta_0, \tag{8}$$
$$R|_{t=0} \equiv R_0 = 2f_0\sqrt{N_0}\cos\Theta_0,$$

где $\Theta_0 = \varphi_0 - 2\psi_0$ – начальная разность фаз.

Решая систему (5)–(7) с учётом (8), получаем интеграл движения для плотности частиц

$$2N + f = 2N_0 + f_0 \tag{9}$$

и выражение для Q:

$$Q^2 = 4N(2N_0 + f_0 - 2N)^2$$
$$-\left[\frac{\varDelta}{\mu}(N - N_0) - \frac{\nu}{2\mu}\left(N^2 - N_0^2\right) + 2f_0\sqrt{N_0}\cos\Theta_0\right]^2. \tag{10}$$

Выражение (9) представляет собой закон сохранения числа частиц в системе. Используя далее уравнение $\dot{N} = -\mu Q$ из (5) и выражение (10) для Q, можно получить решение для функции $N(t)$. Далее будем интересоваться временной эволюцией плотности биэкситонов $N(t)$ при различных значениях параметров системы. Временную эволюцию плотности фотонов $f(t)$ легко найти, используя (9).

Из (5) и (10) следует, что если в начальный момент времени в системе отсутствуют фотоны ($f_0 = 0$, $N_0 \neq 0$), то $N(t) = N_0 = \mathrm{const}$ и, следовательно, процесс двухфотонного распада биэкситонов невозможен. Это обусловлено тем, что в (2), (3) учтены только индуцированные переходы. Напротив, если в начальный момент времени в системе отсутствуют биэкситоны ($N_0 = 0$, $f_0 \neq 0$), то система эволюционирует во времени.

Дальнейшее исследование удобней провести для нормированных параметров

$$y = \frac{2N}{2N_0 + f_0}, \quad x = \frac{f}{2N_0 + f_0}, \quad y_0 = \frac{2N_0}{2N_0 + f_0},$$

$$x_0 = \frac{f_0}{2N_0 + f_0}, \quad \tau = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau_0^{-1} = 2\mu[2(2N_0 + f_0)]^{1/2}, \tag{11}$$

$$\alpha = \frac{\nu(2N_0 + f_0)^{1/2}}{8\sqrt{2}\mu}, \quad \beta = \Delta\tau_0.$$

Тогда интеграл движения (9) приводится к виду

$$x + y = x_0 + y_0 = 1, \tag{12}$$

а основное уравнение временной эволюции нормированной плотности биэкситонов $y(\tau)$ можно записать в форме

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + W(y) = 0, \tag{13}$$

где

$$W(y) = -y(1 - y)^2 + \big[\beta(y - y_0) - \alpha\big(y^2 - y_0^2\big)$$
$$+ x_0\sqrt{y_0}\cos\Theta_0\big]^2. \tag{14}$$

Выражение (13) можно рассматривать как уравнение колебаний нелинейного осциллятора, где $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau)^2$ и $W(y)$ – кинетическая и потенциальная энергии осциллятора соответственно. Качественно поведение функции $y(\tau)$ можно установить, изучая зависимость потенциальной энергии W нелинейного осциллятора от y при различных значениях параметров. Функция $y(\tau)$ может изменяться в той области значений y, где $W(y) \leqslant 0$, и из (5), (8) можно получить начальное условие для скорости изменения этой функции. Знак производной $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau)|_{\tau=0}$ определяется только начальной разностью фаз Θ_0. При $\pi(2k+1) \leqslant \Theta_0 \leqslant 2\pi(k+1)$ получаем $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau)|_{\tau=0} > 0$, а при $2\pi k \leqslant \Theta_0 \leqslant \pi(2k+1), k = 0, 1, 2, \ldots$, имеем $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau)|_{\tau=0} < 0$. Видно также, что эволюция системы определяется начальными плотностями частиц x_0 и y_0, начальной разностью фаз Θ_0, нормированной расстройкой резонанса β и параметром нелинейности α. Случай $\alpha = 0$ был изучен ранее в [13]. Рассмотрим особенности временной эволюции системы при $\alpha \neq 0$ в условиях точного резонанса $\beta = 0$. Вид решения $y(t)$ определяется значениями параметров α и y_0. В отличие от случая $\alpha = 0$ [13], здесь потенциальная энергия $W(y)$ нелинейного осциллятора содержит, кроме слагаемого $-y(1-y)^2$, ещё и положительно определённое слагаемое $[\alpha(y^2 - y_0^2) - x_0\sqrt{y_0}\cos\Theta_0]^2$, наличие которого существенно меняет поведение потенциальной энергии. Это слагаемое имеет минимум в точке $y = (y_0^2 + x_0\sqrt{y_0}\alpha^{-1}\cos\Theta_0)^{1/2}$, где оно обращается в нуль, и приводит к тому, что при $\alpha = 0$ двукратный корень $y = 1$ уравнения $W(y) = 0$, ответственный за движение фазовой точки вдоль сепаратрисы, расщепляется при $\alpha \neq 0$ на два различных корня, обеспечивая тем самым осцилляционный режим эволюции. Таким образом, можно утверждать, что учёт упругих межчастичных взаимодействий в системе приводит к снятию апериодических режимов эволюции и к замене их периодическими.

3. Основные результаты

Рассмотрим сначала случай, когда начальная разность фаз $\Theta_0 = \pi/2$. При малых значениях α и фиксированных y_0 уравнение $W(y) = 0$ имеет четыре действительных положительных корня $y_{\min} \leqslant y_{\max} < y_3 < y_4$, причем $y_{\min} < y_0, y_0 < y_{\max} < 1, y_4 > y_3 \gg 1$. При $\alpha \to 0$ получаем $y_{\min} = \alpha^2 y_0^4$, $y_{\max} = 1 - \alpha(1 - y_0^2)$, $y_3 = 1 + \alpha(1 - y_0^2)$, $y_4 = \alpha^{-2}$. С ростом α корень y_3 растёт, а y_4 убывает, и оказывается, что

$$y_3 = y_4 \equiv y_c = 1 + \sqrt[3]{1 - y_0^2}\left(\sqrt[3]{1 + y_0} + \sqrt[3]{1 - y_0}\right)$$

при критическом значении параметра нелинейности $\alpha = \alpha_c$, которое определяется параметром y_0:

$$\alpha_c^2 = 4\left[(1 + y_0)^{4/3} + (1 - y_0)^{4/3} + (1 - y_0^2)^{2/3}\right]^{-3}.$$

Далее с ростом α остаются только два действительных корня, $y_{\min}$ и $y_{\max}$, а корни y_3 и y_4 оказываются комплексно-сопряжёнными: $y_{3,4} = u \pm iz$. В случае, когда $\alpha^2 < \alpha_c^2$, т. е. когда все четыре корня уравнения $W(y) = 0$ являются действительными, решение уравнения (13) имеет следующий вид:

$$y = \frac{y_{\min}(y_4 - y_{\max}) + y_4(y_{\max} - y_{\min})\mathrm{sn}^2\varphi}{y_4 - y_{\max} + (y_{\max} - y_{\min})\mathrm{sn}^2\varphi}, \qquad (15)$$

где

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\alpha[(y_4 - y_{\max})(y_3 - y_{\min})]^{1/2}\tau \pm F(\varphi_0, k);$$

$$\varphi_0 = \arcsin\left[\frac{(y_4 - y_{\max})(y_0 - y_{\min})}{(y_{\max} - y_{\min})(y_4 - y_0)}\right]^{1/2};$$

$$k^2 = \frac{(y_{\max} - y_{\min})(y_4 - y_3)}{(y_4 - y_{\max})(y_3 - y_{\min})};$$

$\mathrm{sn}\varphi$ – эллиптическая функция Якоби [18, 19]; $F(\varphi_0, k)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем k [18, 19]. Амплитуда A и период T колебаний функции $y(\tau)$ определяются выражениями

$$A = y_{\max} - y_{\min}, \quad \frac{T}{\tau_0} = \frac{4K(k)}{\alpha[(y_4 - y_{\max})(y_3 - y_{\min})]^{1/2}}, \qquad (16)$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k [18, 19]. В пределе $\alpha \to 0$ из (15) получаем $y = \tanh^2(\tau/2 \pm \operatorname{arctanh}\sqrt{y_0})$. При критическом значении параметра нелинейности $\alpha = \alpha_c$ решение (15) приводится к виду

$$y = \frac{y_{\min}(y_c - y_{\max}) + y_c(y_{\max} - y_{\min})\sin^2\varphi}{(y_c - y_{\max}) + (y_{\max} - y_{\min})\sin^2\varphi}, \qquad (17)$$

где

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\alpha[(y_c - y_{\min})(y_c - y_{\max})]^{1/2}\tau \pm \varphi_0;$$

$$\varphi_0 = \arcsin\left[\frac{(y_c - y_{\max})(y_0 - y_{\min})}{(y_{\max} - y_{\min})(y_c - y_0)}\right]^{1/2},$$

а период колебаний T функции $y(\tau)$ есть

$$\frac{T}{\tau_0} = \frac{2\pi}{\alpha_c[(y_c - y_{\min})(y_c - y_{\max})]^{1/2}}. \qquad (18)$$

Наконец, при $\alpha > \alpha_c$ получаем решение вида

$$y = \frac{y_{\max}n''(1 - \mathrm{cn}\varphi) + y_{\min}n'(1 + \mathrm{cn}\varphi)}{n' + n'' + (n' - n'')\mathrm{cn}\varphi}, \qquad (19)$$

где

$$\varphi = \alpha\left\{\left[(u - y_{\min})(u - y_{\max}) + z^2\right]^2 + z^2(y_{\max} - y_{\min})^2\right\}^{1/4}\tau + F(\varphi_0, k);$$

$$k^2 = \frac{1}{2}\times \left\{1 - \frac{(u - y_{\min})(u - y_{\max})}{\left\{\left[(u - y_{\min})(u - y_{\max}) + z^2\right]^2 + z^2(y_{\max} - y_{\min})^2\right\}^{1/2}}\right\};$$

$$\varphi_0 = \arccos\frac{n''(y_{\max} - y_0) - n'(y_0 - y_{\min})}{n''(y_{\max} - y_0) + n'(y_0 - y_{\min})};$$

$$n' = \left[(u - y_{\max})^2 + z^2\right]^{1/2}; \quad n'' = \left[(u - y_{\min})^2 + z^2\right]^{1/2};$$

u и z – действительная и мнимая части двух комплексно-сопряжённых корней. Период T колебаний определяется выражением

$$T = \frac{4K(k)}{\alpha\left\{\left[(u - y_{\min})(u - y_{\max}) + z^2\right]^2 + z^2(y_{\max} - y_{\min})^2\right\}^{1/4}}. \qquad (20)$$

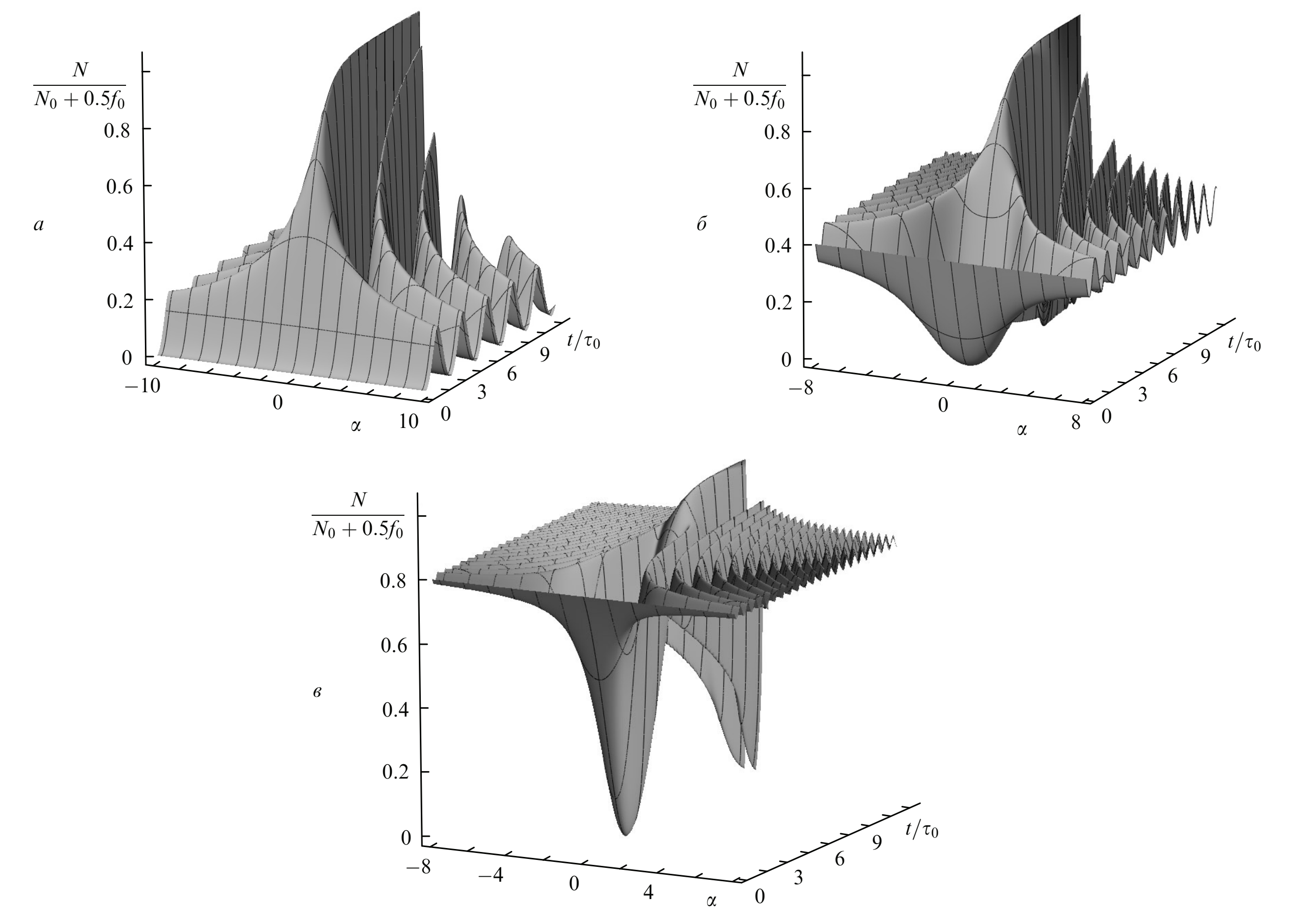
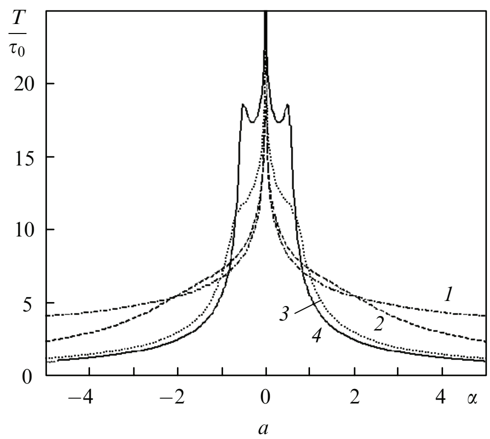


Рис.2. Временная эволюция плотности биэкситонов $N(t)$ в зависимости от параметра α при $\Theta_0 = (\pi/2)(2k+1)$ ($k = \pm 0, 1, 2, \ldots$) и $y_0 = 0$ (*а*), 0.4 (*б*) и 0.8 (*в*).

При критическом значении параметра $\alpha = \alpha_c$, когда $k = 0$, $z = 0$, а $u = y_c$, мы снова приходим к решению (17).

На рис.2 представлены зависимости временной эволюции нормированной плотности биэкситонов $y(\tau)$ от параметра нелинейности α при нескольких значениях начальной плотности биэкситонов y_0 для решений со знаком «−» в аргументе функции, т. к. решения со знаком «+» отличаются только сдвигом по фазе. Графики временной эволюции при $\beta = 0$ являются симметричными в зависимости от параметра α, т. е. $y(-\alpha) = y(\alpha)$. Из рис.2 видно, что при $\alpha = 0$ эволюция системы апериодическая. С течением времени плотность биэкситонов $y(\tau)$ быстро убывает, при $\tau = 2\operatorname{arctanh}\sqrt{y_0}$ обращается в нуль, затем растёт и при $\tau \to \infty$ асимптотически стремится к единице. (Отметим, что решение со знаком «+» только растёт со временем и при $\tau \to \infty$ также стремится к единице). Таким образом, решение $y(\tau)$ при $\alpha = 0$ на больших временах стремится к единице, что свидетельствует о том, что все фотоны превращаются в биэкситоны, чем процесс эволюции и завершается. При $\alpha \neq 0$ эволюция системы является периодической с периодом, зависящим от параметров α и y_0. Следовательно, при $\alpha \neq 0$ оптическая нутация представляет собой периодический процесс попарного превращения фотонов в биэкситоны и обратно. На рис.3 представлены периоды и амплитуды колебаний плотности биэкситонов в зависимости от параметра α при различной начальной плотности биэкситонов. С ростом $|\alpha|$ при фиксированном значении y_0 амплитуда и период колебаний плотности биэкситонов убывают, причём при малых значениях y_0 эти изменения являются медленными. Из рис.2 следует, что при больших y_0 ($y_0 \leqslant 1$) наиболее резкие изменения функции $y(\tau)$ имеют место в области малых значений параметра нелинейности $|\alpha|$. При больших $|\alpha|$ и $y_0 \leqslant 1$ амплитуда колебаний A функции $y(\tau)$ приближённо выражается формулой $A = (1 - y_0)/|\alpha|$, т. е. она уменьшается с ростом α и y_0. При $y_0 = 1$ амплитуда колебаний обращается в нуль, что означает отсутствие колебаний. Период колебаний T, бесконечный при $\alpha = 0$, с ростом параметра $|\alpha|$ медленно убывает (рис.2, 3). Таким образом, можно сделать вывод, что при $\Theta_0 = (2k+1)\pi/2$ учёт упругих биэкситон-биэкситонных взаимодействий приводит к исчезновению режима апериодической эволюции системы и к уменьшению амплитуды колебаний плотности биэкситонов с ростом параметра нелинейности α.

Рассмотрим теперь случай $\Theta_0 = 0$. При фиксированных y_0 и $\alpha < \alpha_c = (-1 + 3y_0 + 2\beta\sqrt{y_0})/(4y_0\sqrt{y_0})$ уравнение $W(y) = 0$ в этом случае имеет четыре действительных положительных корня: $y_{\min} < y_0 < y_3 < y_4$. При $\alpha_c < \alpha < \alpha_d$ это уравнение имеет четыре вещественных корня: $y_0 < y_{\max} < y_3 < y_4$. Отметим, что параметр α_c определяется из условия равенства первых двух корней, $y_{\min} = y_0$, а параметр α_d – из условия равенства последних корней, т. е. $y_3 = y_4$. С дальнейшим ростом параметра α ($\alpha > \alpha_d$) уравнение имеет два действительных положительных корня ($y_0 < y_{\max}$) и два комплексно-сопряжённых корня ($y_{3,4} = u \pm \mathrm{i}z$). Далее в расчётах мы находим их значения численными методами.



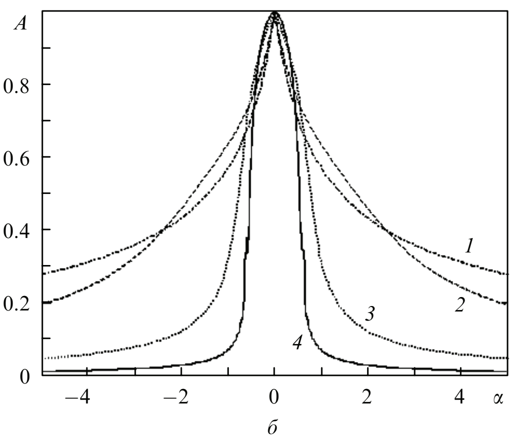


Рис.3. Зависимости периода (*а*) и амплитуды (*б*) колебаний плотности биэкситонов при $\Theta_0 = (\pi/2)(2k+1)$ $(k = 1, 3, 5, \ldots)$ от параметра α при $y_0 = 0$ (*1*), 0.4 (*2*), 0.8 (*3*) и 0.9 (*4*).

Если $\alpha < \alpha_c$, то решение уравнения (13) имеет следующий вид:

$$y = \frac{y_{\min}(y_4 - y_0) + y_4(y_0 - y_{\min})\mathrm{sn}^2\varphi}{y_4 - y_0 - (y_0 - y_{\min})\mathrm{sn}^2\varphi}, \tag{21}$$

где

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\alpha\left[(y_4 - y_0)(y_3 - y_{\min})\right]^{1/2}\tau;$$

$$k^2 = \frac{(y_0 - y_{\min})(y_4 - y_3)}{(y_4 - y_0)(y_3 - y_{\min})}.$$

Амплитуда A и период T колебаний функции $y(\tau)$ определяются выражениями

$$A = y_0 - y_{\min}, \quad \frac{T}{\tau_0} = \frac{4K(k)}{\alpha\left[(y_4 - y_0)(y_3 - y_{\min})\right]^{1/2}}. \tag{22}$$

В случае, когда параметр нелинейности α лежит в интервале $\alpha_c < a < a_d$, решение уравнения (13) принимает следующий вид:

$$y = \frac{y_0(y_4 - y_{\max}) + y_4(y_{\max} - y_0)\mathrm{sn}^2\varphi}{y_4 - y_{\max} + (y_{\max} - y_0)\mathrm{sn}^2\varphi}, \tag{23}$$

где

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\alpha\left[(y_4 - y_{\max})(y_3 - y_0)\right]^{1/2}\tau;$$

$$k^2 = \frac{(y_{\max} - y_0)(y_4 - y_3)}{(y_3 - y_0)(y_4 - y_{\max})};$$

$$A = y_{\max} - y_0; \quad \frac{T}{\tau_0} = \frac{4K(k)}{\alpha\left[(y_4 - y_{\max})(y_3 - y_{\max})\right]^{1/2}}. \tag{24}$$

При $\alpha = \alpha_c$ решение основного уравнения, как следует из (21) и (23), даётся равенством $y = y_0 = \mathrm{const}$. Это означает, что в случае отличных от нуля значений начальной плотности биэкситонов и фотонов колебания плотности частиц при $\alpha = \alpha_c$ и $y = y_0$ прекращаются. При этом при переходе через критическую точку период колебаний непрерывно изменяется. На фазовой траектории этому режиму соответствует фазовый центр. С ростом α фазовая траектория, которая имеет форму эллипсоподобной замкнутой кривой, постепенно уменьшает свои размеры и при $\alpha = \alpha_c$ стягивается в точку. Затем, при $\alpha > \alpha_c$, из точки развивается новая эллипсоподобная траектория, которая увеличивается с ростом α. Таким образом, при $\alpha = \alpha_c$ система находится в покое, хотя плотности фотонов и биэкситонов в начальный момент времени отличны от нуля.

При критическом значении параметра нелинейности $\alpha = \alpha_d$, когда $y_3 = y_4$, решение основного уравнения приводится к виду

$$y = \frac{y_0(y_3 - y_{\max}) + y_3(y_{\max} - y_0)\sin^2\varphi}{y_3 - y_{\max} + (y_{\max} - y_0)\sin^2\varphi},$$

где

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\alpha\left[(y_3 - y_0)(y_3 - y_{\max})\right]^{1/2}.$$

При этом период колебаний

$$\frac{T}{\tau_0} = \frac{2\pi}{\alpha\left[(y_3 - y_{\max})(y_3 - y_0)\right]^{1/2}}.$$

Наконец, при $\alpha > \alpha_d$ получаем решение вида

$$y = \frac{y_{\max}n''(1 - \mathrm{cn}\varphi) + y_0 n'(1 + \mathrm{cn}\varphi)}{n' + n'' + (n' - n'')\mathrm{cn}\varphi}, \tag{25}$$

где

$$\varphi = \alpha\left\{\left[(u - y_0)(u - y_{\max}) + z^2\right]^2 + z^2(y_{\max} - y_0)\right\}^{1/4}\tau;$$

$$k^2 = \frac{1}{2}$$

$$\times\left\{1 - \frac{(u - y_0)(u - y_{\max}) + z^2}{\left\{\left[(u - y_0)(u - y_{\max}) + z^2\right]^2 + z^2(y_{\max} - y_0)^2\right\}^{1/2}}\right\};$$

$$n' = \left[(u - y_{\max})^2 + z^2\right]^{1/2}; \quad n'' = \left[(u - y_0)^2 + z^2\right]^{1/2};$$

u и z – действительная и мнимая части двух комплексно-сопряжённых корней. Амплитуда A и период T колебаний определяются выражениями

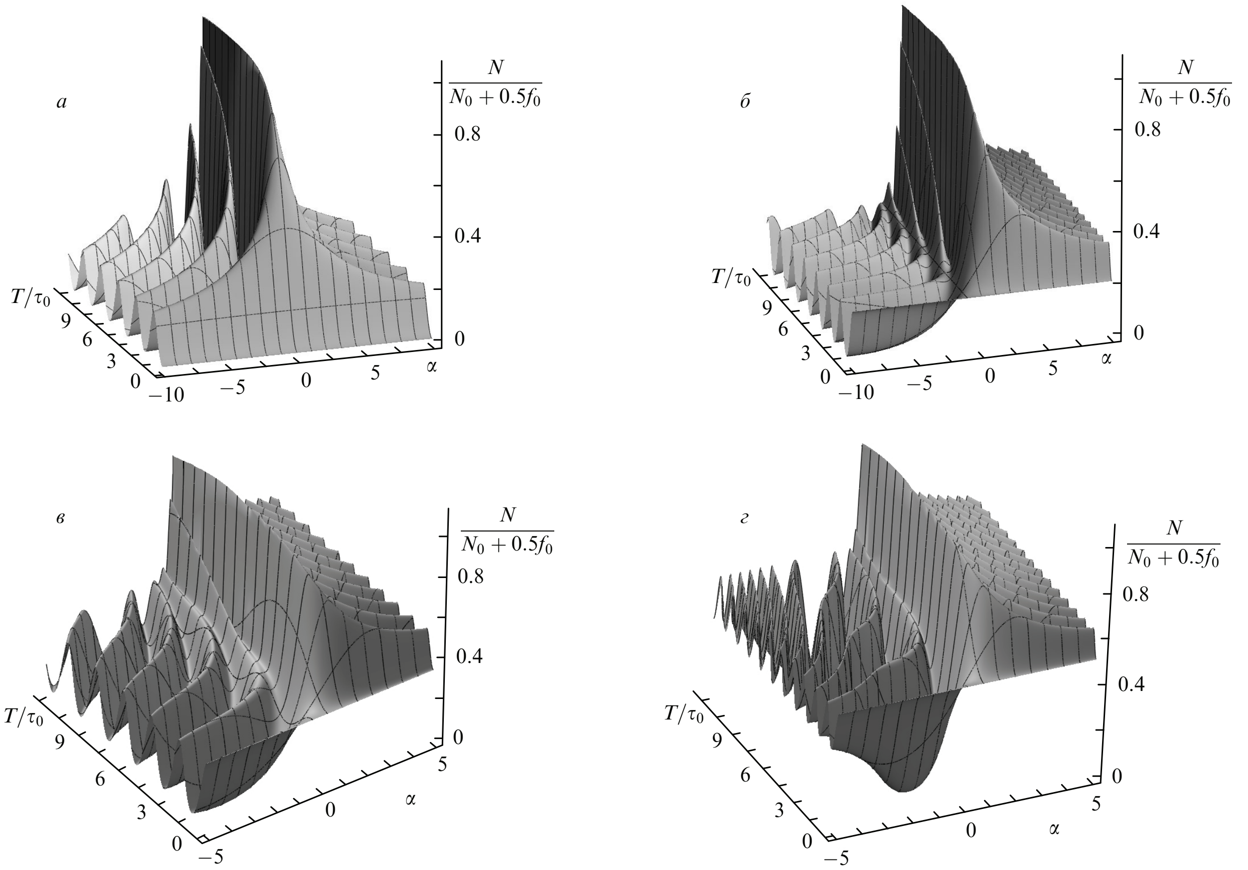


Рис.4. Временная эволюция плотности биэкситонов $N(t)$ в зависимости от параметра α при $\Theta_0 = \pi k$ ($k = \pm 0, 1, 2, \ldots$) и $y_0 = 0$ (*а*), 0.2 (*б*), 1/3 (*в*) и 0.5 (*г*).

$$A = y_{\max} - y_0,$$
$$T = \frac{4K(k)}{\alpha\left\{\left[(u-y_0)(u-y_{\max})+z^2\right]^2 + z^2(y_{\max}-y_0)\right\}^{1/4}}. \tag{26}$$

Зависимости нормированной плотности биэкситонов от времени и параметра нелинейности α при начальной разности фаз $\Theta_0 = 0$ и различной начальной плотности биэкситонов представлены на рис.4. Зависимости периода и амплитуды колебаний плотности биэкситонов от α при различных фиксированных значениях y_0 приведены на рис.5. Видно, что при $y_0 = 0$ и в отсутствие межчастичного взаимодействия ($\alpha = 0$) система эволюционирует апериодически: все фотоны превращаются в биэкситоны, чем эволюция и заканчивается (рис.4,*а*). В случае, когда $y_0 \neq 0$, апериодический режим колебаний смещён относительно нуля в сторону увеличения параметра α (рис.4,*б*–*г* и рис.5,*а*).

При отличном от нуля параметре межчастичного взаимодействия поведение системы существенно определяется как начальной плотностью фотонов, так и α. Из рис.4,*б*–*г* видно, что при $\alpha < \alpha_c$ колебания происходят ниже плоскости $y = y_0$. В этом интервале амплитуда колебаний с ростом α сначала растёт, а затем убывает, становясь равной нулю при $\alpha = \alpha_c$ (рис.5,*б*). Период колебаний при $\alpha = \alpha_c$ с ростом параметра α монотонно увеличивается (рис.5,*а*). При $\alpha = \alpha_c$ в системе наступает покой,

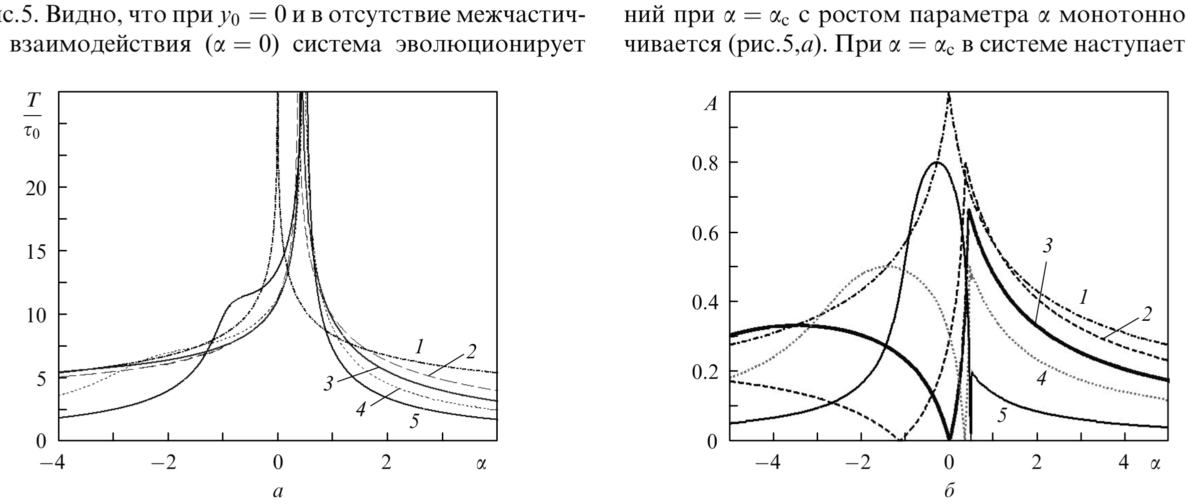


Рис.5. Зависимости периода (*а*) и амплитуды (*б*) колебаний плотности биэкситонов при $\Theta_0 = \pi k$ ($k = \pm 0, 1, 2, \ldots$) от параметра α при $y_0 = 0$ (*1*), 0.2 (*2*), 1/3 (*3*), 0.5 (*4*) и 0.8 (*5*).

т. е. плотность биэкситонов не изменяется со временем. При $\alpha > \alpha_c$ колебания происходят выше плоскости $y = y_0$.

При $y_0 \sim 1$ уравнение $W(y) = 0$ имеет двукратный корень $y \simeq 1$. В этом случае расходимость периода колебаний возникает при $y \sim \sqrt{y_0}/(1 + y_0)$, т. е. смещается в сторону положительных α (рис.4,*a*). При $y_0 = 1$ получаем $\alpha = 0.5$. Асимптотически к этой точке приближаются участки кривых с $T/\tau_0 \to \infty$. Следовательно, при $y_0 \neq 0$ апериодический режим смещается в сторону положительных значений α, отличных от нуля. Таким образом, при $y_0 \to 1$ происходит довольно сложная эволюция системы в окрестности $\alpha = 0$, тогда как при $|\alpha| \gg 1$ эволюция сводится к малоамплитудным колебаниям плотности биэкситонов выше либо ниже начального значения плотности f_0. Кроме того, из рис.5,*б* видно, что амплитуды колебаний при различных значениях y_0 имеют нулевые значения как при $\alpha < 0$, так и при $\alpha > 0$. Действительно, положение нуля амплитуды на оси α определяется выражением $\alpha = \alpha_c = (1 - 3y_0)/(4y_0\sqrt{y_0})$. Интерес представляет то обстоятельство, что при $y_0 = 1/3$ система находится в состоянии покоя при $\alpha = 0$, т. е. в отсутствие взаимодействия между частицами.

4. Заключение

Учёт межчастичных столкновений при двухфотонной нутации биэкситонов приводит к тому, что временная эволюция системы качественно изменяется: из апериодической при $\alpha = 0$ она превращается в периодическую при $\alpha \neq 0$, причём с ростом $|\alpha|$ амплитуда и период нутации монотонно убывают (см. рис.2). Отметим также, что с ростом $|\alpha|$ во временной эволюции системы отсутствует самозахват (self-trapping) биэкситонов. В самом деле, говорить здесь о самозахвате, характерном для эволюции плотности бозе-конденсированных атомов в двухъямном потенциале, не приходится. Однако некоторое сходство всё же можно заметить. Дело в том, что самозахват атомов в одной из ям имеет место при значениях параметра межатомного взаимодействия, больших критического. В этом случае амплитуда колебаний атомов скачкообразно уменьшается, продолжая убывать с ростом этого параметра [20, 21]. В нашем случае имеет место только монотонное изменение амплитуды колебаний с ростом $|\alpha|$, которое, по нашему мнению, родственно, но не тождественно явлению самозахвата. При этом чем больше y_0, тем быстрее (в зависимости от α) наступает режим малоамплитудных колебаний плотности системы.

1. *Нелинейная спектроскопия*. Под ред. Н.Бломбергена (М.: Мир, 1979).
2. Апанасевич П.А. *Основы теории взаимодействия света с веществом* (Минск: изд-во Наука и техника, 1977).
3. Бурштейн А.И., Пусеп А.Ю. *ЖЭТФ*, **69**, 1927 (1975).
4. Davydov A.S., Sericov A.A. *Phys. Stat. Sol. (b)*, **56**, 351 (1973).
5. Samartsev V.V., Sheibut U.E., Ivanov U.S. *Spectr. Lett.*, **9**, 57 (1976).
6. Белкин С.Н., Москаленко С.А., Ротару А.Х. и др. *ФТТ*, **22**, 1961 (1980).
7. Хаджи П.И., Москаленко С.А., Белкин С.И. *Письма в ЖЭТФ*, **29**, 223 (1979).
8. Москаленко С.А., Хаджи П.И., Ротару А.Х. *Солитоны и нутация в экситонной области спектра* (Кишинёв: Штиинца, 1980).
9. Хаджи П.И. *Нелинейные оптические процессы в системе экситонов и биэкситонов в полупроводниках* (Кишинёв: Штиинца, 1985).
10. Хаджи П.И., Москаленко С.А., Белкин С.Н. и др. *ФТТ*, **22**, 749 (1980).
11. Хаджи П.И., Белкин С.Н. *ФТТ*, **21**, 3291 (1979).
12. Хаджи П.И., Москаленко С.А., Белкин С.Н. *Укр. физ. журн.*, **25**, 361 (1980).
13. Хаджи П.И., Васильев В.В. *ЖЭТФ*, **131**, 922 (2007).
14. Хаджи П.И., Васильев В.В. *Оптика и спектроскопия*, **104**, 392 (2008).
15. Hanamura E. *Sol. State Commun.*, **12**, 951 (1973); *J. Phys. Soc. Jpn*, **39**, 1506 (1975).
16. Хаджи П.И. *Кинетика рекомбинационного излучения экситонов и биэкситонов в полупроводниках* (Кишинёв: Штиинца, 1977).
17. Бобрышева А.И. *Биэкситоны в полупроводниках* (Кишинёв: Штиинца, 1979).
18. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: ГИФМЛ, 1963).
19. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (М.: Наука, 1971).
20. Radhavan S., Smerzi A., Fantoni S., Shonoy S.R. *Phys. Rev. A*, **59**, 620 (1999).
21. Albiez M., Gati R., Folling J., Hunsmann S., Cristiani M., Oberthaler M.K. *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 010402 (2005).