НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

PACS 42.65.An

Определение координатной зависимости некоторых компонент тензора кубической восприимчивости $\hat{\chi}^{(3)}(z,\omega,-\omega,\omega,\omega)$ одномерно неоднородной поглощающей пластинки при произвольной частотной дисперсии

А.А.Голубков, В.А.Макаров

Впервые доказана возможность и предложен алгоритм однозначного восстановления пространственного профиля компоненты $\hat{\chi}^{(3)}_{yyyy}(z,\omega,-\omega,\omega,\omega)$ тензора кубической нелинейной восприимчивости одномерно неоднородной пластинки, среда которой обладает плоскостью симметрии m_y, перпендикулярной ее поверхности. Такое восстановление можно провести по измеренным в некотором диапазоне углов падения амплитудным комплексным коэффициентам отражения и прохождения, а также преобразования в две новые волны, распространяющиеся по обе стороны от пластинки, s-поляризованной плоской сигнальной монохроматической волны. Эти две волны возникают в результате нелинейного взаимодействия сигнальной волны с мощной плоской волной, падающей на пластинку вдоль нормали к ее поверхности. Все рассматриваемые волны имеют одинаковую частоту ω, меняя которую можно исследовать частотную дисперсию компоненты $\hat{\chi}^{(3)}_{yyyy}(z,\omega,-\omega,\omega,\omega)$ тензора кубической нелинейной восприимчивости. Для сред, обладающих дополнительно осью симметрии 2_z, 4_z, 6_z или ∞_z, перпендикулярной поверхности пластинки, предлагаемым способом может быть восстановлен профиль и исследована частотная дисперсия около трети всех независимых комплексных компонент тензора $\hat{\chi}^{(3)}$.

Ключевые слова: *диэлектрическая проницаемость, коэффициент отражения, коэффициент прохождения, кубическая восприимчивость, обратная задача, одномерно неоднородная среда.*

Определение и контроль диэлектрических свойств одномерно неоднородных структур, в том числе многослойных систем, становятся все более востребованной практической задачей [1]. Для линейных сред существуют различные методы ее решения [1–8]. Однако подавляющее большинство этих методов либо, по разным причинам, неприменимо в оптике (пренебрежение поглощением [2] или частотной дисперсией в широком диапазоне частот [3], использование слишком простых моделей такой дисперсии [4] и др.), либо может быть использовано только для слабо неоднородных сред [1, 5]. Для нелинейных сред решение таких задач находится только в начальной стадии [9–14].

В работах [6, 7] была предложена и апробирована для линейных сред методика определения координатной зависимости комплексных компонент тензора диэлектрической проницаемости одномерно неоднородной пластины, свободная от перечисленных выше недостатков. В настоящей работе она впервые обобщается на нелинейные среды. При этом основное внимание уделено методике однозначного восстановления координатной зависимости некоторых компонент комплексного тензора кубической восприимчивости $\hat{\chi}^{(3)}(z,\omega,-\omega,\omega,\omega)$ нелинейной среды, диэлектрические свойства которой изменяются вдоль оси z, перпендикулярной двум ее параллельным плоским поверхностям, и произвольным образом зависят от частоты.

Пусть вдоль плоскостей $z = z_1$ и $z = z_2$ ($z_2 > z_1$) слой такой среды граничит с однородными изотропными линейными непоглощающими средами с вещественной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0(\omega)$. Будем считать, что точечная группа симметрии среды, образующей пластинку, такова, что одним из ее элементов симметрии является плоскость симметрии, перпендикулярная поверхности пластинки. Направим вдоль этой плоскости ось $x \perp z$ и будем считать, что на эту пластинку под ненулевым углом α падает s-поляризованная плоская сигнальная волна с малой интенсивностью, распространяющаяся в положительном или отрицательном направлении оси z. В первом случае напряженность ее электрического поля равна $E_+\boldsymbol{e}_y\exp\{\mathrm{i}[\omega t - k_x x - k_z(z - z_1)]\}$ + компл. сопр. (при $z < z_1$), а во втором – $E_-\boldsymbol{e}_y\exp\{\mathrm{i}[\omega t - k_x x + k_z(z - z_2)]\}$ + компл. сопр. (при $z > z_2$). Здесь $\boldsymbol{e}_y$ – перпендикулярный плоскости симметрии среды единичный вектор; ω – частота волны; $k_x = k_0\sin\alpha$; $k_z = k_0\cos\alpha$; $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0}/c$; c – скорость света в вакууме. Пусть, кроме того, на пластинку перпендикулярно ее поверхности в положительном направлении оси z падает плоская мощная волна основного излучения, напряженность электрического поля которой при $z < z_1$ равна $E_0\boldsymbol{e}_y\exp\{\mathrm{i}[\omega t - k_0(z - z_1)]\}$ + компл. сопр. Иными словами, в статье параллельно рассматриваются две независимые задачи. В первой задаче мощная и сигнальная волны падают на одну и ту же сторону исследуемой пластинки (используется нижний индекс «плюс»), а во второй – на противоположные стороны (используется нижний индекс «минус»).

Предположим, что из-за нарушения условий фазового синхронизма в пластинке не происходит генерации гармоник, и поэтому возможно эффективное взаимодействие

В.А.Макаров. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова и Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vamakarov@phys.msu.ru, andrej2501@yandex.ru
А.А.Голубков. Специализированный учебно-научный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 121357 Москва, ул. Кременчугская, 11

Поступила в редакцию 19 апреля 2010 г, после доработки – 27 сентября 2010 г.

только трех волн, каждая из которых имеет частоту ω, а именно одной мощной ($E_{\rm f}(z)\boldsymbol{e}_y\exp(\mathrm{i}\omega t)$ + компл. сопр.) и двух слабых: исходной сигнальной ($E_{\rm s\pm}(z)\boldsymbol{e}_y\exp[\mathrm{i}(\omega t - k_x x)]$ + компл. сопр.) и новой ($E_{\rm g\pm}(z)\boldsymbol{e}_y\exp[\mathrm{i}(\omega t + k_x x)]$ + компл. сопр.), формируемой в нелинейной среде волны. Из-за неоднородности среды каждая из этих волн в пластинке представляет собой суперпозицию двух бегущих в противоположных направлениях волн с изменяющимися амплитудами. Для описания процесса их распространения можно использовать как систему шести точных уравнений первого порядка для амплитуд бегущих волн, так и систему из трех волновых уравнений второго порядка для полного электрического поля каждой из волн. Для рассматриваемой задачи использование уравнений второго порядка представляется более предпочтительным, т. к. позволяет упростить изложение.

Новая волна $E_{\rm g\pm}(z)\boldsymbol{e}_y\exp[\mathrm{i}(\omega t + k_x x)]$ + компл. сопр. возникает в результате нелинейного взаимодействия мощной и сигнальной волн и, в свою очередь, может влиять на распространение последней. Это нелинейное взаимодействие происходит из-за того, что среда пластинки обладает нелинейностью, которая характеризуется симметричным по перестановке последних двух индексов тензором кубической восприимчивости $\hat{\chi}^{(3)}(z,\omega,-\omega,\omega,\omega)$. Из-за наличия у среды плоскости локальной симметрии m_y, перпендикулярной оси y, для выбранной поляризации падающих волн выражение для вектора электрической индукции в пластинке на частоте ω может быть записано в виде [15]

$$\boldsymbol{D}_\pm(x,z,t) = \varepsilon_{yy}(z)\boldsymbol{E}_{0\pm} + 4\pi\chi^{(3)}_{yyyy}(z)(\boldsymbol{E}^*_{0\pm}\boldsymbol{E}_{0\pm})\boldsymbol{E}_{0\pm} + \text{компл. сопр.} \quad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{E}_{0\pm}(x,z,t) = [E_{\rm f}(z) + E_{\rm s\pm}(z)\exp(-\mathrm{i}k_x x) + E_{\rm g\pm}(z)\exp(\mathrm{i}k_x x)] \times\boldsymbol{e}_y\exp(\mathrm{i}\omega t)$ – спектральная компонента напряженности электрического поля в нелинейной среде на частоте ω; $\varepsilon_{yy}(z)$ – компонента тензора линейной диэлектрической проницаемости рассматриваемой среды. В (1) и в некоторых последующих формулах частотные аргументы у компонент тензоров $\hat{\varepsilon}(z,\omega)$ и $\hat{\chi}^{(3)}(z,\omega,-\omega,\omega,\omega)$ для краткости опущены.

Для достаточно слабой сигнальной волны в (1) можно ограничиться слагаемыми, линейными по $E_{\rm s\pm}(z)$ и $E_{\rm g\pm}(z)$. В этом случае

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_\pm = \{&\varepsilon_{yy}(z)[E_{\rm f} + E_{\rm s\pm}\exp(-\mathrm{i}k_x x) + E_{\rm g\pm}\exp(\mathrm{i}k_x x)] \\ &+ 4\pi\chi^{(3)}_{yyyy}(z)[|E_{\rm f}|^2E_{\rm f} + (2|E_{\rm f}|^2E_{\rm s\pm} + E_{\rm f}^2E^*_{\rm g\pm}) \\ &\times\exp(-\mathrm{i}k_x x) + (2|E_{\rm f}|^2E_{\rm g\pm} + E_{\rm f}^2E^*_{\rm s\pm})\exp(-\mathrm{i}k_x x)]\} \\ &\times\boldsymbol{e}_y\exp(\mathrm{i}\omega t) + \text{компл. сопр.}\end{aligned} \quad (2)$$

Из (1) следует, что в используемой геометрии из-за наличия у среды плоскости симметрии m_y все рассматриваемые волны являются поперечными. Используя (2), нетрудно получить уравнения распространения этих волн:

$$\mathrm{d}^2E_{\rm f}/\mathrm{d}z^2 + 0.5\omega^2[\varepsilon_{yy}(z) + \varepsilon_{\rm n}(z)]E_{\rm f}/c^2 = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}^2E_{\rm s\pm}/\mathrm{d}z^2 + [\omega^2\varepsilon_{\rm n}(z)/c^2 - \lambda]E_{\rm s\pm} + r(z)E^*_{\rm g\pm} = 0, \\ &\mathrm{d}^2E^*_{\rm g\pm}/\mathrm{d}z^2 + [\omega^2\varepsilon^*_{\rm n}(z)/c^2 - \lambda]E^*_{\rm g\pm} + r^*(z)E_{\rm s\pm} = 0,\end{aligned} \quad (4)$$

где $\lambda = k_x^2$; $\varepsilon_{\rm n}(z) = \varepsilon_{yy}(z) + 8\pi\chi^{(3)}_{yyyy}(z)\left|E_f(z)\right|^2$; $r(z) = 4\pi\omega^2\times \chi^{(3)}_{yyyy}(z)E_{\rm f}^2(z)/c^2$.

В силу максвелловских граничных условий на поверхностях слоя имеем

$$\begin{aligned}&E_{\rm f}(z_1) = (1+R)E_0,\ \mathrm{d}E_{\rm f}/\mathrm{d}z\,|_{z=z_1} = -\mathrm{i}k_0(1-R)E_0, \\ &E_{\rm f}(z_2) = TE_0,\ \mathrm{d}E_{\rm f}/\mathrm{d}z\,|_{z=z_2} = -\mathrm{i}k_0TE_0,\end{aligned} \quad (5)$$

где R и T – амплитудные комплексные коэффициенты отражения пластиной мощной световой волны и прохождения через нее соответственно. Кроме того,

$$\begin{aligned}&E_{\rm s+}(z_1) = (1+R_+)E_+,\ \mathrm{d}E_{\rm s+}/\mathrm{d}z\,|_{z=z_1} = -\mathrm{i}k_z(1-R_+)E_+, \\ &E_{\rm s+}(z_2) = T_+E_+,\ \mathrm{d}E_{\rm s+}/\mathrm{d}z\,|_{z=z_2} = -\mathrm{i}k_zT_+E_+, \\ &E_{\rm s-}(z_2) = (1+R_-)E_-,\ \mathrm{d}E_{\rm s-}/\mathrm{d}z\,|_{z=z_2} = \mathrm{i}k_z(1-R_-)E_-, \\ &E_{\rm s-}(z_1) = T_-E_-,\ \mathrm{d}E_{\rm s-}/\mathrm{d}z\,|_{z=z_1} = \mathrm{i}k_zT_-E_-.\end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $R_\pm$ – амплитудные комплексные коэффициенты отражения пластинкой сигнальных волн, распространяющихся соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси z, а $T_\pm$ – амплитудные комплексные коэффициенты прохождения соответствующих волн через пластинку. Напомним, что нижний индекс «плюс» относится к ситуации, когда мощная и сигнальная волны падают на одну сторону исследуемой пластинки, а нижний индекс «минус» – к ситуации, когда эти волны падают на противоположные стороны пластинки. В эксперименте можно использовать любую из этих схем измерений, а при необходимости получения результатов повышенной точности – обе схемы одновременно.

Новая волна $E_{\rm g\pm}(z)$, возникающая в пластинке в результате нелинейного взаимодействия, продолжает распространяться в граничащих с нелинейной средой однородных линейных средах в виде волны $E_{\rm g1\pm}\boldsymbol{e}_y\exp\{\mathrm{i}[\omega t + k_x x + k_z(z-z_1)]\}$ + компл. сопр. в области $z < z_1$ и в виде волны $E_{\rm g2\pm}\boldsymbol{e}_y\exp\{\mathrm{i}[\omega t + k_x x - k_z(z-z_2)]\}$ + компл. сопр. в области $z > z_2$. При этом $E_{\rm g1\pm}$, $E_{\rm g2\pm}$ и $E_{\rm g\pm}(z)$ удовлетворяют максвелловским граничным условиям

$$\begin{aligned}&E_{\rm g\pm}(z_1) = E_{\rm g1\pm},\ \mathrm{d}E_{\rm g\pm}/dz\,|_{z=z_1} = \mathrm{i}k_zE_{\rm g1\pm}, \\ &E_{\rm g\pm}(z_2) = E_{\rm g2\pm},\ \mathrm{d}E_{\rm g\pm}/dz\,|_{z=z_2} = -\mathrm{i}k_zE_{\rm g2\pm}.\end{aligned} \quad (7)$$

Из уравнений (4), (6) и (7) следует, что для данных $\varepsilon_{\rm n}(z)$ и $r(z)$ величины $E^*_{\rm g1\pm}$ и $E^*_{\rm g2\pm}$ пропорциональны $E_\pm$. Это означает, что можно ввести не зависящие от $E_\pm$ коэффициенты преобразования сигнальной волны $G^{(1)}_\pm = E^*_{\rm g1\pm}/E_\pm$ и $G^{(2)}_\pm = E^*_{\rm g2\pm}/E_\pm$, характеризующие эффективность преобразования пластинкой падающей на нее сигнальной волны в волны с той же частотой, распространяющиеся от пластинки. При этом направления распространения последних отличны от направлений распространения отраженной и прошедшей сигнальных волн. С помощью этих коэффициентов граничные условия (7) удобно переписать в виде

$$\begin{aligned}&E^*_{\rm g\pm}(z_1) = G^{(1)}_\pm E_\pm,\ \mathrm{d}E^*_{\rm g\pm}/dz\,|_{z=z_1} = -\mathrm{i}k_zG^{(1)}_\pm E_\pm, \\ &E^*_{\rm g\pm}(z_2) = G^{(2)}_\pm E_\pm,\ \mathrm{d}E^*_{\rm g\pm}/dz\,|_{z=z_2} = \mathrm{i}k_zG^{(2)}_\pm E_\pm.\end{aligned} \quad (8)$$

Если зависимости $\varepsilon_{\mathrm{n}}(z)$ и $r(z)$ известны, то, решив уравнения (4), (6), (8), можно однозначно рассчитать величины $R_{\pm}$, $T_{\pm}$, $G_{\pm}^{(1)}$, $G_{\pm}^{(2)}$ для любых углов падения плоской сигнальной волны.

В Приложении 1 впервые показано, что справедливо и обратное утверждение, а именно если в некотором интервале углов падения плоской сигнальной волны измерены амплитудные комплексные коэффициенты ее прохождения, отражения и преобразования в присутствии мощной волны основного излучения (T_+, R_+, $G_+^{(1),(2)}$ или T_-, R_-, $G_-^{(1),(2)}$), то по этим данным зависимости $\varepsilon_{\mathrm{n}}(z)$ и $r(z)$ для слоя заданной толщины определяются однозначно. Профиль линейной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{yy}(z)$ также может быть однозначно восстановлен, следуя работам [6, 7], по амплитудным коэффициентам отражения и прохождения сигнальной волны в отсутствие мощной волны основного излучения.

Если зависимости $\varepsilon_{\mathrm{n}}(z)$, $r(z)$ и $\varepsilon_{yy}(z)$ определены, то $\chi_{yyyy}^{(3)}(z,\omega,-\omega,\omega,\omega)$ можно однозначно восстановить по одной из двух равнозначных формул:

$$\chi_{yyyy}^{(3)}(z,\omega,-\omega,\omega,\omega) = [\varepsilon_{\mathrm{n}}(z) - \varepsilon_{yy}(z)]/[8\pi|E_{\mathrm{f}}(z)|^2]$$
$$= c^2 r(z)/[4\pi\omega^2 E_{\mathrm{f}}^2(z)], \tag{9}$$

следующих из приведенных после системы уравнений (4) определений величин $\varepsilon_{\mathrm{n}}(z)$ и $r(z)$. Входящая в (9) напряженность $E_{\mathrm{f}}(z)$ однозначно находится из линейного дифференциального уравнения (3) с теперь уже известными коэффициентами и граничными условиями

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}E_{\mathrm{f}}/\mathrm{d}z\,|_{z=z_1} - \mathrm{i}k_0 E_{\mathrm{f}}(z_1) = -2\mathrm{i}k_0 E_0, \\ &\mathrm{d}E_{\mathrm{f}}/\mathrm{d}z\,|_{z=z_2} + \mathrm{i}k_0 E_{\mathrm{f}}(z_2) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

непосредственно следующими из (5).

Итак, мы получили следующий результат. Пусть известен профиль линейной диэлектрической проницаемости пластинки $\varepsilon_{yy}(z,\omega)$ и измерены, в некотором интервале углов падения плоской сигнальной волны, амплитудные коэффициенты прохождения, отражения и преобразования этой волны (T_+, R_+, $G_+^{(1),(2)}$ или T_-, R_-, $G_-^{(1),(2)}$) в присутствии мощной волны основного излучения с известной амплитудой E_0. Этого оказывается достаточно для однозначного нахождения кубической нелинейной восприимчивости $\chi_{yyyy}^{(3)}(z,\omega,-\omega,\omega,\omega)$ исследуемой пластинки.

На практике восстановление $\chi_{yyyy}^{(3)}(z,\omega,-\omega,\omega,\omega)$ может быть проведено, в частности, с помощью алгоритма, обобщающего предложенную в [6] и реализованную в численном эксперименте [7] методику нахождения координатной зависимости компонент тензора диэлектрической проницаемости линейной среды на нелинейные среды. Эта методика опирается на определение единственного нулевого минимума специальным образом построенного функционала от пробных функций, описывающих координатную зависимость диэлектрических свойств исследуемой пластинки [6, 7]. Возможны разные способы построения этого функционала, но главное требование к нему состоит в том, чтобы он обращался в нуль только для такого пробного профиля линейной диэлектрической проницаемости, которому в некотором заданном интервале углов падения соответствуют известные из эксперимента или рассчитанные на его основе коэффициенты прохождения и отражения сигнальной волны.

Основные принципы построения функционала, который мы предлагаем использовать для однозначного нахождения $\chi_{yyyy}^{(3)}(z,\omega,-\omega,\omega,\omega)$, а для более симметричных сред, рассмотренных ниже, и других компонент тензора кубической нелинейной восприимчивости исследуемой пластинки, не претерпевают принципиальных изменений по сравнению с изложенными в [6, 7] и заключаются в следующем. Заменив в уравнении (3) $\varepsilon_{\mathrm{n}}(z)$ на произвольный пробный профиль $q(z)$ и решив получившееся уравнение с граничными условиями (10), найдем распределение электрического поля мощной волны $E_{\mathrm{f}q}(z)$, соответствующее выбранному пробному профилю. Зная амплитудные коэффициенты прохождения, отражения и преобразования сигнальной волны, мы, в силу максвелловских граничных условий (6), (8), определим значения напряженности электрического поля и ее первой производной на обеих поверхностях пластинки для двух слабых волн, распространяющихся внутри нее. Возьмем эти значения на одной из поверхностей пластинки в качестве граничных условий и решим систему (4), описывающую изменение электрического поля слабых волн внутри пластинки, заменив в ней $\varepsilon_{\mathrm{n}}(z)$ на $q(z)$, а $r(z)$ на $q_1(z) = \omega^2[q(z) - \varepsilon_{yy}(z)] \times E_{\mathrm{f}q}^2(z)/[2c^2|E_{\mathrm{f}q}(z)|^2]$.

В результате найдем значения напряженностей электрического поля слабых волн и их первых производных на противоположной поверхности пластинки. В общем случае они, естественно, будут отличаться от тех, которые нам известны из измеренных коэффициентов прохождения, отражения и преобразования сигнальной волны. Функционал $G_{\mathrm{n}}[q(z)]$ строится таким образом, чтобы он являлся мерой отличия этих рассчитанных значений напряженности электрического поля и ее производных от тех, которые нам известны из измеренных коэффициентов прохождения, отражения и преобразования сигнальной волны. В Приложении 2 приведен конкретный пример такого функционала. Нахождение его единственного нулевого минимума позволяет однозначно восстановить не только $\chi_{yyyy}^{(3)}(z,\omega,-\omega,\omega,\omega)$, но и соответствующее распределение напряженности электрического поля мощной волны $E_{\mathrm{f}0}(z)$ внутри пластинки.

До сих пор мы считали, что образующая слой среда имеет только плоскость симметрии m_y, перпендикулярную его поверхностям. Рассмотрим теперь кратко среды, имеющие также ось симметрии 2_z, 4_z, 6_z или ∞_z. Не меняя поляризации мощной волны основного излучения, повернем на 90° плоскость падения и вектор поляризации сигнальной волны. Тогда последняя будет задаваться одной из двух формул: $E_+\boldsymbol{e}_x\exp\{\mathrm{i}[\omega t - k_x y - k_z(z - z_1)]\}$ + компл. сопр. при падении мощной и сигнальной волн на одну и ту же сторону исследуемой пластинки в положительном направлении оси z или $E_-\boldsymbol{e}_x\exp\{\mathrm{i}[\omega t - k_y y + k_z(z - z_2)]\}$ + компл. сопр. при падении этих волн на противоположные стороны пластинки. Здесь $k_y = k_0\sin\alpha$, а $\boldsymbol{e}_x$ – единичный вектор, направленный вдоль оси x. При этом выражения для ненулевых компонент вектора электрической индукции в использованных ранее приближениях будут иметь следующий вид [15]:

$$D_{\pm x} = \{\{[\varepsilon_{xx}(z) + 8\pi\chi_{xyxy}^{(3)}(z)|E_{\mathrm{f}}|^2]E_{\mathrm{s}\pm} + 4\pi\chi_{xxyy}^{(3)}(z)E_{\mathrm{f}}^2E_{\mathrm{g}\pm}^*\}$$
$$\times\exp(-\mathrm{i}k_y y) + \{[\varepsilon_{xx}(z) + 8\pi\chi_{xyxy}^{(3)}(z)|E_{\mathrm{f}}|^2]E_{\mathrm{g}\pm}$$
$$+ 4\pi\chi_{xxyy}^{(3)}(z)E_{\mathrm{f}}^2E_{\mathrm{s}\pm}^*\}\exp(\mathrm{i}k_y y)\}\exp(\mathrm{i}\omega t) + \text{компл. сопр.}$$

$$D_{\pm y} = [\varepsilon_{yy}(z) + 4\pi\chi^{(3)}_{yyyy}(z)|E_{\rm f}|^2]E_{\rm f}\exp(i\omega t) + \text{компл. сопр.}$$

Напомним, что используемый нами тензор $\hat{\chi}^{(3)}$ симметричен по перестановке последних двух индексов. При такой же, как и ранее, мощной волне основного излучения уравнение (3), граничные условия (10) и найденная выше зависимость $E_{\rm f0}(z)$ не изменятся, а система уравнений для $E_{\rm s\pm}$ и $E^*_{\rm g\pm}$ сохранит вид (4) с точностью до замены параметра λ на $\bar{\lambda} = k_y^2$, а функций $\varepsilon_{\rm n}(z)$ и $r(z)$ соответственно на

$$\bar{\varepsilon}_{\rm n}(z) = \varepsilon_{xx}(z) + 8\pi\chi^{(3)}_{xyxy}(z)|E_{\rm f0}(z)|^2,$$
$$\bar{r}(z) = 4\pi\omega^2\chi^{(3)}_{xxyy}(z)E^2_{\rm f0}(z)/c^2. \qquad (11)$$

Поскольку система уравнений для $E_{\rm s\pm}$ и $E^*_{\rm g\pm}$ сохраняет вид (4), то к ней можно применить все результаты, полученные в Приложениях 1 и 2. В частности, зная значения четырех новых коэффициентов прохождения, отражения и преобразования сигнальной волны в некотором интервале углов падения, можно однозначно восстановить профили $\bar{\varepsilon}_{\rm n}(z)$ и $\bar{r}(z)$ в исследуемой среде. С этой целью надо найти единственный нулевой минимум функционала $G[q(z), q_1(z)]$, построение которого аналогично описанному в Приложении 2 построению функционала $G_{\rm n}[q(z)]$. Единственное отличие заключается в том, что теперь функции $q(z)$ и $q_1(z)$, являющиеся пробными для профилей $\bar{\varepsilon}_{\rm n}(z)$ и $\bar{r}(z)$ соответственно и входящие во вспомогательные уравнения (П2.1), никак не связаны между собой. Функция $E_{\rm f0}(z)$ нам уже известна, а зависимость $\varepsilon_{xx}(z,\omega)$ либо известна ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$ для всех рассматриваемых сред, кроме тех, которые имеют класс симметрии mm2), либо может быть восстановлена [6, 7]. Поэтому, найдя функции $\bar{q}(z)$ и $\bar{q}_1(z)$, соответствующие единственному нулевому минимуму функционала $G[q(z), q_1(z)]$ и, следовательно, совпадающие с искомыми функциями $\bar{\varepsilon}_{\rm n}(z)$ и $\bar{r}(z)$, можно определить пространственные профили двух новых компонент тензора кубической нелинейности по формулам

$$\chi^{(3)}_{xyxy}(z) = [\bar{q}(z) - \varepsilon_{xx}(z)]/[8\pi|E_{\rm f0}(z)|^2],$$

$$\chi^{(3)}_{xxyy}(z) = c^2\bar{q}_1(z)/[4\pi\omega^2E^2_{\rm f0}(z)],$$

следующим из (11).

Для сред с осью симметрии 2_z кроме указанных выше трех компонент можно также найти зависимости компонент $\chi^{(3)}_{xxxx}$, $\chi^{(3)}_{yxyx}$ и $\chi^{(3)}_{yyxx}$ тензора $\hat{\chi}^{(3)}(z,\omega,-\omega,\omega,\omega)$ от координаты z. Чтобы сделать это, нужно полностью повторить все описанные в данной статье измерения, повернув пластину на 90° вокруг оси z, после чего заново провести все расчеты. Для сред с осью симметрии 4_z, 6_z или ∞_z такие дополнительные измерения и расчеты не обязательны, поскольку в этих средах $\chi^{(3)}_{xxxx} = \chi^{(3)}_{yyyy}$, $\chi^{(3)}_{yxyx} = \chi^{(3)}_{xyxy}$ и $\chi^{(3)}_{xxyy} = \chi^{(3)}_{yyxx}$ [15]. Кроме того, в средах с осью симметрии 6_z или ∞_z справедливо равенство $\chi^{(3)}_{yyyy} = \chi^{(3)}_{xxyy} + 2\chi^{(3)}_{xyxy}$ [15].

Как известно, свойства приповерхностного слоя любой среды могут заметно отличаться от ее свойств в объеме. Приповерхностный слой, в частности, не может иметь трехмерного центра инверсии, а также плоскости симметрии, параллельной поверхности, т.е. не может быть трехмерно изотропным. Однако плоская граница между однородными средами – это частный случай одномерно неоднородной системы. Поэтому одномерно неоднородная среда, строго говоря, также не может быть изотропной. У нее не может быть трехмерного центра инверсии и плоскости симметрии, перпендикулярной направлению, в котором имеет место неоднородность свойств. В результате из 32 классов и 7 предельных групп симметрии, возможных для однородных сред [15], в случае одномерно неоднородных сред, строго говоря, возможны только 10 классов (1, 2, m, mm2, 3, 4, 6, 3m, 4mm, 6mm) и 2 предельные группы (∞, ∞m), в которых отсутствуют упомянутые выше центр инверсии и плоскость симметрии, перпендикулярная направлению неоднородности.

Табл.1. Число независимых компонент тензоров $\hat{\chi}^{(3)}(z,\omega,-\omega,\omega,\omega)$ и $\hat{\varepsilon}(z,\omega)$ одномерно неоднородных сред различных классов симметрии и их компоненты, пространственные профили которых можно восстановить с помощью предлагаемой методики.

Класс симметрии	Тензор $\hat{\varepsilon}$		Тензор $\hat{\chi}^{(3)}$	
	Число независимых компонент	Восстанавливаемые компоненты	Число независимых компонент	Восстанавливаемые компоненты
m (m$_y$)	4	ε_{yy}	28	$\chi^{(3)}_{yyyy}$
mm2	3	$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	15	$\chi^{(3)}_{yyyy}, \chi^{(3)}_{xyxy}, \chi^{(3)}_{xxyy}, \chi^{(3)}_{xxxx}, \chi^{(3)}_{yxyx}, \chi^{(3)}_{yyxx}$
3m			10	$\chi^{(3)}_{yyyy}$
4mm	2	$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}$	8	$\chi^{(3)}_{yyyy}, \chi^{(3)}_{xyxy}, \chi^{(3)}_{xxyy}$
6mm, ∞m			7	$\chi^{(3)}_{yyyy}, \chi^{(3)}_{xxyy}$

Симметрия конкретной одномерно неоднородной пластинки зависит как от среды, из которой она сделана, так и от ориентации ее поверхностей, перпендикулярных направлению неоднородности, относительно кристаллофизических осей X_1, X_2, X_3 [15] этой среды. К сожалению, наша методика не позволяет определять и контролировать кубическую нелинейность одномерно неоднородных сред, имеющих классы симметрии 1, 2, 3, 4, 6 и ∞. Для оставшихся 6 классов симметрии одномерно неоднородных сред возможности предлагаемой методики иллюстрирует табл.1. В частности, при исследовании неоднородных пластин, среды которых имеют класс симметрии mm2, можно восстановить шесть из пятнадцати независимых компонент тензора $\hat{\chi}^{(3)}(z,\omega,-\omega,\omega,\omega)$ и все три компоненты тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(z,\omega)$ (восстановление профиля компоненты $\varepsilon_{zz}(z,\omega)$ для классов mm2, 3, 3m, 4, 4mm, 6, ∞, 6mm, ∞m может быть осуществлено на основе результатов работы [8]).

Заметим также, что, меняя частоту ω мощной и сигнальной волн, можно восстанавливать профили указанных в табл.1 компонент тензора кубической нелинейной восприимчивости на разных частотах и исследовать частотную дисперсию кубической нелинейности среды.

Авторы выражают глубокую благодарность С.Г.Гречину за ценные критические замечания и конструктивные предложения, высказанные при обсуждении полученных результатов.

Приложение 1

Система уравнений (4) и граничные условия (6), (8) получены нами и имеют физический смысл при действительных значениях $k_z \in (0, k_0)$ (значение $k_z = k_0$ соответствует нормальному падению сигнальной волны, при котором сигнальная и мощная волны физически неразличимы). Однако формально уравнения (4), (6), (8) и входящие в них величины можно рассматривать при любых, в том числе комплексных, значениях k_z и $\lambda \equiv k_x^2 = k_0^2 - k_z^2$, что и делается в данном приложении.

Напомним, что для достаточно широкого класса функций $\varepsilon_n(z)$ и $r(z)$ (кусочно-непрерывных и ограниченных или даже только интегрируемых [16]) система (4) имеет непрерывно дифференцируемые решения, которые мы будем иногда для краткости записывать в виде столбца:

$$\overleftrightarrow{\varphi}(z) = \begin{pmatrix} \varphi_s(z) \\ \varphi_g(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s(z) \\ E_g^*(z) \end{pmatrix}.$$

Пусть столбцы $\overleftrightarrow{\varphi}_m(z,\lambda)$, где $m = 1,2,3,4$, являются такими решениями системы (4) с граничными условиями

$$\overleftrightarrow{\varphi}_1(z_1,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{d}\overleftrightarrow{\varphi}_1(z,\lambda)/\mathrm{d}z\,|_{z=z_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\overleftrightarrow{\varphi}_2(z_1,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{d}\overleftrightarrow{\varphi}_2(z,\lambda)/\mathrm{d}z\,|_{z=z_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (\Pi1.1)$$
$$\overleftrightarrow{\varphi}_3(z_1,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{d}\overleftrightarrow{\varphi}_3(z,\lambda)/\mathrm{d}z\,|_{z=z_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\overleftrightarrow{\varphi}_4(z_1,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{d}\overleftrightarrow{\varphi}_4(z,\lambda)/\mathrm{d}z\,|_{z=z_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\overleftrightarrow{\varphi}_m(z,\lambda)$ при любом, в том числе комплексном, значении λ образуют фундаментальную систему решений системы (4) и общее решение задачи (4), (6), (8) можно представить в виде

$$\overleftrightarrow{\varphi}_\pm(z,\lambda) = [C_{1\pm}\overleftrightarrow{\varphi}_1(z,\lambda) + C_{2\pm}\overleftrightarrow{\varphi}_2(z,\lambda) + C_{3\pm}\overleftrightarrow{\varphi}_3(z,\lambda) + C_{4\pm}\overleftrightarrow{\varphi}_4(z,\lambda)]E_\pm. \qquad (\Pi1.2)$$

Заметим, что в силу симметрии системы (4) и граничных условий (П1.1) элементы столбцов $\overleftrightarrow{\varphi}_m(z,\lambda)$ при действительных значениях λ связаны соотношениями

$$\varphi_{s2}(z,\lambda) = \varphi_{g1}^*(z,\lambda), \quad \varphi_{g2}(z,\lambda) = \varphi_{s1}^*(z,\lambda),$$
$$\varphi_{s4}(z,\lambda) = \varphi_{g3}^*(z,\lambda), \quad \varphi_{g4}(z,\lambda) = \varphi_{s3}^*(z,\lambda). \qquad (\Pi1.3)$$

Подставляя при действительных значениях λ соотношения для функций $\overleftrightarrow{\varphi}_\pm(z,\lambda)$ из (П1.2) в (6), (8) и учитывая граничные условия (П1.1) и равенства (П1.3), получаем следующие выражения для коэффициентов $C_{m\pm}$:

$$C_{1+} = 1 + R_+,\ C_{1-} = T_-,\ C_{2\pm} = G_\pm^{(1)},$$
$$C_{3+} = -\mathrm{i}k_z(1 - R_+),\ C_{3-} = \mathrm{i}k_zT_-,\ C_{4\pm} = -\mathrm{i}k_zG_\pm^{(1)},$$

а также восемь линейных уравнений, связывающих элементы столбцов $\overleftrightarrow{\varphi}_m(z,\lambda)$ и их производные в точке $z = z_2$ с коэффициентами $R_\pm$, $T_\pm$, $G_\pm^{(1)}$ и $G_\pm^{(2)}$:

$$T_- f_1(k_z) + G_-^{(1)} f_2(k_z) = 1 + R_-,$$
$$G_-^{(1)*} f_1(k_z) + T_-^* f_2(k_z) = G_-^{(2)*}, \qquad (\Pi1.4)$$

$$T_- f_3(k_z) + G_-^{(1)} f_4(k_z) = \mathrm{i}k_z(1 - R_-),$$
$$G_-^{(1)*} f_3(k_z) + T_-^* f_4(k_z) = -\mathrm{i}k_z G_-^{(2)*}, \qquad (\Pi1.5)$$

$$R_+ f_1(k_z) + G_+^{(1)} f_2(k_z) + f_5(k_z) = T_+,$$
$$G_+^{(1)*} f_1(k_z) + R_+^* f_2(k_z) + f_6(k_z) = G_+^{(2)*},$$
$$R_+ f_3(k_z) + G_+^{(1)} f_4(k_z) + f_7(k_z) = -\mathrm{i}k_z T_+,$$
$$G_+^{(1)*} f_3(k_z) + R_+^* f_4(k_z) + f_8(k_z) = -\mathrm{i}k_z G_+^{(2)*}. \qquad (\Pi1.6)$$

В (П1.4)–(П1.6) использованы обозначения

$$f_{1,2}(k_z) \equiv \Psi_{s1,s2}(\lambda) \pm \mathrm{i}k_z \Psi_{s3,s4}(\lambda),$$
$$f_{3,4}(k_z) \equiv \Psi_{s1z,s2z}(\lambda) \pm \mathrm{i}k_z \Psi_{s3z,s4z}(\lambda),$$
$$f_{5,6}(k_z) \equiv \Psi_{s1,s2}(\lambda) \mp \mathrm{i}k_z \Psi_{s3,s4}(\lambda),$$
$$f_{7,8}(k_z) \equiv \Psi_{s1z,s2z}(\lambda) \mp \mathrm{i}k_z \Psi_{s3z,s4z}(\lambda), \qquad (\Pi1.7)$$

где $\Psi_{sm}(\lambda) = \varphi_{sm}(z_2,\lambda)$; $\Psi_{smz}(\lambda) = \mathrm{d}\varphi_{sm}(z,\lambda)/\mathrm{d}z\,|_{z=z_2}$. Напомним, что m принимает значения от одного до четырех. Из уравнений (П1.4)–(П1.6) и постоянства вронскиана системы (4) можно, в частности, получить, что $|T_+|^2 - |G_+^{(2)}|^2 = |T_-|^2 - |G_-^{(1)}|^2$.

Кроме того, из (П1.4), (П1.5) следует, что при $k_z \neq 0$ справедливо неравенство $|T_-| \neq |G_-^{(1)}|$. Таким образом, функции $f_1(k_z)$ и $f_2(k_z)$ могут быть найдены из уравнений (П1.4), по крайней мере для наиболее интересных с физической точки зрения значений параметра $k_z \in (0, k_0)$:

$$f_1(k_z) = \frac{T_-^*(1 + R_-) - G_-^{(1)} G_-^{(2)*}}{|T_-|^2 - |G_-^{(1)}|^2},$$
$$f_2(k_z) = \frac{T_- G_-^{(2)*} - (1 + R_-) G_-^{(1)*}}{|T_-|^2 - |G_-^{(1)}|^2}. \qquad (\Pi1.8)$$

Кроме того, как известно, при каждом фиксированном $z \in [z_1, z_2]$ величины $\varphi_{sm}(z,\lambda)$ и $\varphi_{gm}(z,\lambda)$ – однозначные аналитические функции λ без особых точек в конечной части плоскости, т.е. целые функции [16, 17]. Следовательно, $\Psi_{sm}(\lambda)$ и $\Psi_{gm}(\lambda) = \varphi_{gm}(z_2,\lambda)$ также являются целыми функциями λ, а поэтому и $k_z^2 = k_0^2 - \lambda$. Последнее равенство означает, что Ψ_{sm} и Ψ_{gm} являются четными целыми функциями k_z, а f_1 и f_2 в силу определения (П1.7) – целыми функциями k_z. Используя четность функций Ψ_{sm} относительно k_z, из (П1.7) можно получить следующие соотношения:

$$\Psi_{s1,s2}(\lambda) = [f_{1,2}(k_z) + f_{1,2}(-k_z)]/2,$$
$$\Psi_{s3,s4}(\lambda) = \pm[f_{1,2}(k_z) - f_{1,2}(-k_z)]/(2\mathrm{i}k_z). \qquad (\Pi1.9)$$

Применяя результаты [18] к системе (4), сразу получаем, что для однозначного определения $\varepsilon_n(z)$ и $r(z)$ достаточно знать $\Psi_{sm}(\lambda)$ и $\Psi_{gm}(\lambda)$ на всей комплексной плоскости λ. Пусть коэффициенты T_-, R_- и $G_-^{(1),(2)}$ известны в некотором интервале углов падения $0 < \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2 < \pi/2$. Тогда, используя (П1.8), для действительных значений $k_z \in [k_0\cos\alpha_2, k_0\cos\alpha_1] \subset (0, k_0)$ можно найти $f_1(k_z)$ и $f_2(k_z)$, которые являются целыми функциями, что достаточно для их однозначного аналитического продолжения на всю комплексную плоскость k_z [17]. Зная $f_1(k_z)$ и $f_2(k_z)$, с помощью (П1.9) можно найти $\Psi_{sm}(\lambda)$. Далее, используя (П1.3) для нахождения $\Psi_{gm}(\lambda)$ при действительных значениях λ и проводя затем однозначное аналитическое продолжение, можно также найти $\Psi_{gm}(\lambda)$ для любых комплексных значений λ, а значит и однозначно определить зависимости $\varepsilon_{\rm n}(z)$ и $r(z)$. Аналогичный результат можно получить, исходя из известных коэффициентов T_+, R_+ и $G_+^{(1),(2)}$.

Приложение 2

Пусть для некоторого интервала K значений k_x точно известны коэффициенты прохождения, отражения и преобразования сигнальной волны $T_+(k_x)$, $R_+(k_x)$ и $G_+^{(1),(2)}(k_x)$ и (или) $T_-(k_x)$, $R_-(k_x)$ и $G_-^{(1),(2)}(k_x)$ для слоя с известным профилем линейной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{yy}(z)$, границы которого имеют координаты $z = z_1$ и $z = z_2$, в присутствии мощной волны основного излучения с известной амплитудой. Иными словами, известно, что существуют функции $\chi^{(3)}_{yyyy}(z)$, $\varepsilon_{\rm n}(z)$ и $r(z)$, для которых задача (3), (4), (6), (8), (10) при данных $T_+(k_x)$, $R_+(k_x)$, $G_+^{(1),(2)}(k_x)$ и (или) $T_-(k_x)$, $R_-(k_x)$, $G_-^{(1),(2)}(k_x)$, а также $\varepsilon_{yy}(z)$ и E_0 имеет нетривиальное решение при любых $k_x \in K$ и $E_+ \neq 0$ и (или) $E_- \neq 0$. Для восстановления $\varepsilon_{\rm n}(z)$, $E_{\rm f}(z)$ и, следовательно, в силу (9), $\chi^{(3)}_{yyyy}(z)$ найдем решение $E_{{\rm f}q}(z)$ задачи (3), (10) с пробной функцией $q(z)$ вместо функции $\varepsilon_{\rm n}(z)$ и четыре решения $E_{{\rm s}m}$, E^*_{gm} ($m = 1-4$) вспомогательной системы уравнений, совпадающей с (4) при $q(z) = \varepsilon_{\rm n}(z)$:

$$\begin{aligned} &{\rm d}^2E_{\rm s}/{\rm d}z^2 + [\omega^2 q(z)/c^2 - \lambda]E_{\rm s} + q_1(z)E^*_{\rm g} = 0,\\ &{\rm d}^2E^*_{\rm g}/{\rm d}z^2 + [\omega^2 q^*(z)/c^2 - \lambda]E^*_{\rm g} + q^*_1(z)E_{\rm s} = 0, \end{aligned} \qquad (\text{П2.1})$$

где $q_1(z) = \omega^2[q(z) - \varepsilon_{yy}(z)]E^2_{{\rm f}q}(z)/[2c^2|E_{{\rm f}q}(z)|^2]$. Интересующие нас четыре решения (П2.1) удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} &E_{\rm s1}(z_1) = (1 + R_+),\ {\rm d}E_{\rm s1}/{\rm d}z\,|_{z=z_1} = -{\rm i}k_z(1 - R_+),\\ &E_{\rm s2}(z_2) = T_+,\ {\rm d}E_{\rm s2}/{\rm d}z\,|_{z=z_2} = -{\rm i}k_zT_+,\\ &E_{\rm s3}(z_1) = T_-,\ {\rm d}E_{\rm s3}/{\rm d}z\,|_{z=z_1} = {\rm i}k_zT_-,\\ &E_{\rm s4}(z_2) = (1 + R_-),\ {\rm d}E_{\rm s4}/dz\,|_{z=z_2} = {\rm i}k_z(1 - R_-),\\ &E^*_{\rm g1}(z_1) = G^{(1)}_+,\ {\rm d}E^*_{\rm g1}/{\rm d}z\,|_{z=z_1} = -{\rm i}k_zG^{(1)}_+,\\ &E^*_{\rm g2}(z_2) = G^{(2)}_+,\ {\rm d}E^*_{\rm g2}/{\rm d}z\,|_{z=z_2} = {\rm i}k_zG^{(2)}_+,\\ &E^*_{\rm g3}(z_1) = G^{(1)}_-,\ {\rm d}E^*_{\rm g3}/{\rm d}z\,|_{z=z_1} = -{\rm i}k_zG^{(1)}_-,\\ &E^*_{\rm g4}(z_2) = G^{(2)}_-,\ {\rm d}E^*_{\rm g4}/{\rm d}z\,|_{z=z_2} = {\rm i}k_zG^{(2)}_-. \end{aligned} \qquad (\text{П2.2})$$

Рассмотрим далее неотрицательный функционал от пробного профиля $q(z)$

$$\begin{aligned} G_{\rm n}[q(z)] = \int_K {\rm d}k_x \sum_{m=1}^{4}\Big[\mu_{{\rm s}m}\big|E_{{\rm s}m}(\bar d_m) - a_{{\rm s}m}\big|^2\\ + \mu_{gm}\big|E^*_{gm}(\bar d_m) - a_{gm}\big|^2 + \beta_{{\rm s}m}\big|{\rm d}E_{{\rm s}m}/{\rm d}z\,|_{z=\bar d_m} - b_{{\rm s}m}\big|^2\\ + \beta_{gm}\big|{\rm d}E^*_{gm}/{\rm d}z\,|_{z=\bar d_m} - b_{gm}\big|^2\Big], \end{aligned} \qquad (\text{П2.3})$$

построенный в соответствии с описанными в основной части статьи принципами. Здесь $\bar d_{1,3} = z_2$; $\bar d_{2,4} = z_1$; $a_{\rm s1,s4} = T_\pm$; $a_{\rm s2,s3} = 1 + R_\pm$; $b_{\rm s1,s4} = \mp{\rm i}k_zT_\pm$; $b_{\rm s2,s3} = \mp{\rm i}k_z(1 - R_\pm)$; $a_{\rm g1,g2} = G_+^{(2),(1)}$; $a_{\rm g3,g4} = G_-^{(2),(1)}$; $b_{\rm g1,g2} = \pm{\rm i}k_zG_+^{(2),(1)}$; $b_{\rm g3,g4} = \pm{\rm i}k_zG_-^{(2),(1)}$. Кроме того, в (П2.3) весовые коэффициенты μ_{sm}, μ_{gm}, β_{sm} и β_{gm} – любые фиксированные неотрицательные числа, одновременно не равные нулю. При этом, если известны только $T_+(k_x)$, $R_+(k_x)$ и $G_+^{(1),(2)}(k_x)$, то $\mu_{\rm s1,s2} \neq 0$, $\mu_{\rm g1,g2} \neq 0$, $\beta_{\rm s1,s2} \neq 0$ и $\beta_{\rm g1,g2} \neq 0$, а остальные весовые коэффициенты равны нулю. Если же известны только $T_-(k_x)$, $R_-(k_x)$ и $G_-^{(1),(2)}(k_x)$, то наоборот $\mu_{\rm s3,s4} \neq 0$, $\mu_{\rm g3,g4} \neq 0$, $\beta_{\rm s3,s4} \neq 0$ и $\beta_{\rm g3,g4} \neq 0$, а остальные весовые коэффициенты равны нулю.

Функционал $G_{\rm n}[q(z)]$, с одной стороны, является мерой отличия рассчитанных по формулам (П2.1), (П2.2) и соответствующих пробному профилю $q(z)$ значений напряженности электрического поля и ее производных на одной из поверхностей пластины от тех, которые нам известны из измеренных коэффициентов прохождения, отражения и преобразования сигнальной волны с единичной амплитудой. С другой стороны, $G_{\rm n}[q(z)]$ – мера отличия коэффициентов прохождения, отражения и преобразования $T_{q\pm}(k_x)$, $R_{q\pm}(k_x)$ и $G_{q\pm}^{(1),(2)}(k_x)$ для слоя с профилем $q(z)$ от коэффициентов, известных из измерений. Действительно, сравнение формул (6), (8) при $E_\pm = 1$ с (П2.2), (П2.3) показывает, что $G_{\rm n}[q(z)] = 0$ только при полном совпадении коэффициентов $T_{q+}(k_x)$, $R_{q+}(k_x)$ и $G_{q+}^{(1),(2)}(k_x)$ и (или) $T_{q-}(k_x)$, $R_{q-}(k_x)$ и $G_{q-}^{(1),(2)}(k_x)$ с коэффициентами $T_+(k_x)$, $R_+(k_x)$, $G_+^{(1),(2)}(k_x)$ и (или) $T_-(k_x)$, $R_-(k_x)$, $G_-^{(1),(2)}(k_x)$ в интервале K. Однако в Приложении 1 было показано, что такое совпадение возможно лишь в одном случае. Таким образом, восстановление $\chi^{(3)}_{yyyy}(z)$ сводится к поиску функции $q_0(z)$, соответствующей единственному нулевому минимуму функционала (П2.3), и использованию после этого следующей из (9) формулы

$$\chi^{(3)}_{yyyy}(z) = [q_0(z) - \varepsilon_{yy}(z)]/[8\pi|E_{\rm f0}(z)|^2],$$

где $E_{\rm f0}(z)$ – решение задачи (3), (10) с функцией $q_0(z)$ вместо функции $\varepsilon_{\rm n}(z)$.

1. Power J.F. *Rev. Sci. Instr.*, **73**, 4057 (2002).
2. Roger A., Maystre D., Cadilhac M. *J. Opt. (Paris)*, **9**, 83 (1978).
3. Khruslov E.Ya., Shepelsky D.G. *Inverse Probl.*, **10**, 1 (1994).
4. Boutet de Monvel A., Shepelsky D. *Inverse Probl.*, **18**, 1377 (2002).
5. Xia J., Jordan A.K., Kong J.A. *J. Opt. Soc. Am. A*, **11**, 1081 (1994).
6. Голубков А.А., Макаров В.А. *Вестн. моск. ун-та. Сер. физика и астрономия*, №6, 67 (2009).
7. Голубков А.А., Макаров В.А. *Оптика и спектроскопия*, **108**, 849 (2010).
8. Голубков А.А., Макаров В.А. *Вестн. моск. ун-та. Сер. физика и астрономия*, №3, 32 (2010).
9. Aktosun T., Papanicolaou V.G., Zisis V. *Inverse Probl.*, **20**, 1267 (2004).
10. Serov V., Harju M. *Inverse Probl.*, **23**, 493 (2007).
11. Serov V.S. *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**, 332002 (2009).
12. Guillet de Chatellus H., Montant S., Freysz E. *Opt. Lett.*, **25**, 1723 (2000).
13. Holmgren S.J., Pasiskevicius V., Wang S., Laurell F. *Opt. Lett.*, **28**, 1555 (2003).
14. Kudlinski A., Quiquempois Y., Lelek M., Zeghlache H., Martinelli G. *Appl. Phys. Lett.*, **83**, 3623 (2003).
15. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. *Основы кристаллофизики* (М.: Наука, 1975).
16. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* (М.: Наука, 1971).
17. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике* (М.: Наука, 1984).
18. Malamud M.M., in *Sturm–Liouville Theory: Past and Present* (Basel, Switzerland: Birkhäuser Verlag, 2005, pp 237–270).