НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

PACS 42.65.Dr; 42.25.Hz; 42.25.Kb

Интерференционное подавление ВКР

В.П.Кочанов

Развита теория трехволнового ВКР с учетом нелинейной дисперсии среды для произвольных фаз волн накачки на входе в среду. Предсказан эффект интерференционного подавления ВКР при значениях суммарной фазы трехволновой накачки $(2n+1)\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots)$, обусловленный деструктивной интерференцией поляризаций нерезонансных дипольно-разрешенных переходов. Определено соотношение вкладов в ВКР линейной и нелинейной дисперсий среды. Показано, что при достаточно больших волновых расстройках амплитуда антистоксовой волны испытывает пространственные осцилляции.

***Ключевые слова**: вынужденное комбинационное рассеяние, интерференция, когерентность, нелинейная дисперсия, фаза.*

1. Введение

Вынужденное комбинационное рассеяние в общем случае является когерентным процессом. Когерентность означает, что взаимодействуют между собой интерферирующие волны накачки и рассеяния, и волновые уравнения для ВКР не могут быть сведены к уравнениям для интенсивностей волн. Часто возбуждение ВКР проводится бихроматической накачкой, разность частот волн которой равна частоте комбинационного перехода. В этом случае наблюдается эффективная генерация широкого спектра стоксовых и антистоксовых гармоник [1]. Нелинейная дисперсия среды определяет механизм формирования суммарной фазы волн в процессе их когерентного взаимодействия в активной среде [2]. Волновые числа и фазы при этом находятся из решения соответствующих дифференциальных уравнений в отличие от случая линейной дисперсии, когда волновые числа прямо пропорциональны действительным частям линейных поляризуемостей. Качественное изменение характера дисперсии, заключающееся во взаимной подстройке фаз, приводит к нелинейному захвату и скачку фаз [2].

Естественно предположить, что на перечисленные выше определяющие особенности когерентного ВКР будет существенным образом влиять соотношение фаз волн накачки на входе в среду. В процессе усиления стоксовой и антистоксовой компонент спонтанного комбинационного рассеяния должна возникать разность фаз. Она также может создаваться контролируемым образом при возбуждении ВКР с помощью двух- и трехволновой накачки, т. е. выступать в качестве независимого параметра в экспериментах. Ранее этот дополнительный физический фактор при рассмотрении ВКР не принимался во внимание, и в теоретических расчетах волны накачки считались синфазными, а в экспериментах фазовые соотношения не контролировались.

В.П.Кочанов. Институт оптики атмосферы им. В.Е.Зуева СО РАН, Россия, 634021 Томск, пл. Акад. Зуева, 1; e-mail: koch@iao.ru

Поступила в редакцию 28 июля 2010 г.

Цель настящей работы заключается в выяснении качественных особенностей и степени влияния соотношения фаз волн накачки на входе в среду на трехволновое ВКР. Данный простой вариант ВКР реализуется при небольших оптических толщинах усиливающей среды. Среда считается газом квантовых Λ-систем. Ограничимся случаем ВКР не насыщенного по интенсивности излучения, и будем рассматривать только осевое рассеяние в направлении распространения волны накачки.

2. Поляризация среды

Обозначим два нижних состояния дипольно-запрещенного комбинационного перехода как 1 и 2, а незаселенное верхнее состояние – как 3. Уравнения для матрицы плотности среды в случае однородного уширения имеют вид [3]

$$
\begin{aligned}
&\dot{\rho}_1 + \gamma\rho_1 = \gamma\rho_1^0 + \frac{2d_1\mathscr{E}}{\hbar}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{i}\rho_{31},\\
&\dot{\rho}_2 + \gamma\rho_2 = \gamma\rho_2^0 + \frac{2d_2\mathscr{E}}{\hbar}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{i}\rho_{32}, \quad \rho_3 = 0,\\
&-\mathrm{i}\dot{\rho}_{31} + \omega_{31}\rho_{31} = \frac{\mathscr{E}}{\hbar}(d_1\rho_1 + d_2\rho_{21}),\\
&-\mathrm{i}\dot{\rho}_{32} + \omega_{32}\rho_{32} = \frac{\mathscr{E}}{\hbar}(d_2\rho_2 + d_1\rho_{21}^*),\\
&\dot{\rho}_{21} + (\Gamma + \mathrm{i}\omega_{21})\rho_{21} = \frac{\mathrm{i}\mathscr{E}}{\hbar}(d_2\rho_{31} + d_1\rho_{32}^*).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь ρ_{jl} и ω_{jl} – недиагональные элементы матрицы плотности (поляризации) и частоты переходов $j \leftrightarrow l$ соответственно; $\rho_{1,2}$ и $\rho_{1,2}^0$ – текущие и равновесные населенности уровней комбинационного перехода; ρ_3 – населеннсть состояния 3; $d_{1,2}$ – матричные элементы операторов дипольных моментов для нерезонансных дипольно-разрешенных переходов $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 3$ соответственно; γ и Γ – продольная и поперечная скорости релаксации комбинационного перехода; $\mathscr{E}$ – амплитуда электрического поля излучения в среде; $\hbar$ – постоянная Планка.

Поле в среде представим как

$$\mathscr{E}(t,z) = E\sum_{n=-1}^{1} E_n(z)\cos\Psi_n, \quad \Psi_n = \omega_n t - k_n z + \varphi_n, \tag{2}$$

$$\omega_n = \omega_0 + n\omega_{21}, \; E_0(0) = 1, \; E_{-1}(0) \equiv g_{-1}, \quad E_1(0) \equiv g_1,$$

где E_n – безразмерные амплитуды полей; ω_n, k_n и φ_n – частоты, волновые числа и начальные фазы основной волны накачки ($n = 0$), стоксовой ($n = -1$) и антистоксовой ($n = 1$) волн; z – продольная координата; t – время.

Решение уравнений (1) ищем в виде

$$\rho_{3j} = \sum_{s=-1,1}\sum_{m=-1}^{1}\exp(\mathrm{i}s\Psi_m)R_{sm}^{(j)}, \tag{3}$$

$$j = 1, 2, \quad \rho_{21} = \exp[\mathrm{i}(\Psi_{-1} - \Psi_0)].$$

Подстановка выражений (3) в уравнения (1) и применение приближения вращающейся волны [4] приводят к стационарным уравнениям, решение которых с учетом первых нелинейных (кубических) по амплитудам поля членов есть

$$r = \mathrm{i}n_0\kappa E_0\big(f_{-1}E_{-1} + f_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}E_1\big),$$

$$R_{-1\,-1}^{(1)} = \frac{ad_1E_{-1}}{1-\alpha+\varepsilon}\,\rho_1^0, \quad R_{-1\,0}^{(1)} = \frac{a}{1-\alpha}(d_1E_0\rho_1^0 + d_2E_{-1}r),$$

$$R_{-1\,1}^{(1)} = \frac{a}{1-\alpha-\varepsilon}\big(d_1E_1\rho_1^0 + d_2E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}r\big),$$

$$R_{1\,-1}^{(1)} = \frac{a}{1+\alpha-\varepsilon}\big(d_1E_{-1}\rho_1^0 + d_2E_0r\big),$$

$$R_{1\,0}^{(1)} = \frac{a}{1+\alpha}\big(d_1E_1\rho_1^0 + d_2E_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}r\big), \quad R_{1\,1}^{(1)} = \frac{ad_1E_1}{1+\alpha+\varepsilon}\,\rho_1^0, \tag{4}$$

$$R_{-1\,-1}^{(2)} = \frac{a}{1-\alpha}(d_2E_{-1}\rho_2^0 + d_1E_0r^*),$$

$$R_{-1\,0}^{(2)} = \frac{a}{1-\alpha-\varepsilon}\big(d_2E_0\rho_2^0 + d_1E_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}r^*\big),$$

$$R_{-1\,1}^{(2)} = \frac{ad_2E_1}{1-\alpha-2\varepsilon}\,\rho_2^0, \quad R_{1\,-1}^{(2)} = \frac{ad_2E_{-1}}{1+\alpha-2\varepsilon}\,\rho_2^0,$$

$$R_{1\,0}^{(2)} = \frac{a}{1+\alpha-\varepsilon}(d_2E_0\rho_2^0 + d_1E_{-1}r^*),$$

$$R_{1\,1}^{(2)} = \frac{a}{1+\alpha}\big(d_2E_1\rho_2^0 + d_1E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}r^*\big);$$

$$\alpha \equiv \frac{\omega_0}{\omega_{31}}, \; \varepsilon \equiv \frac{\omega_{21}}{\omega_{31}}, \; \kappa \equiv \frac{d_1d_2E^2}{4\hbar^2\Gamma\varDelta}, \; \varDelta \equiv \omega_{31}\left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1+\alpha}\right)^{-1},$$

$$\Theta \equiv (2k_0 - k_{-1} - k_1)z + \Phi, \quad \Phi \equiv \varphi_{-1} + \varphi_1 - 2\varphi_0,$$

$$n_0 \equiv \rho_1^0 - \rho_2^0, \quad a \equiv \frac{E}{2\hbar\omega_{31}}.$$

Поляризация среды определяется как

$$P = 2N\mathrm{Re}(d_1\rho_{31} + d_2\rho_{32}) \equiv \sum_{n=-1}^{1}(P_{sn}\sin\Psi_n + P_{cn}\cos\Psi_n), \tag{5}$$

где N – концентрация активных молекул; P_{cn} и P_{sn} – действительные и мнимые части амплитуд волн поляризации. Вычисление величин P_{sn} и P_{cn} (5) на основе выражений (3), (4) дает

$$P_{\mathrm{s}-1} = -\frac{b(f_{-1}E_{-1} + f_1\cos\Theta E_1)E_0^2}{(1-\alpha^2)(1-\alpha)(1+\alpha-\varepsilon)},$$

$$P_{\mathrm{s}0} = \frac{b}{(1-\alpha^2)^2}(f_{-1}^2E_{-1}^2 - f_1^2E_1^2)E_0,$$

$$P_{\mathrm{s}1} = \frac{b(f_{-1}\cos\Theta E_{-1} + f_1E_1)E_0^2}{(1-\alpha^2)(1+\alpha)(1-\alpha-\varepsilon)},$$

$$P_{\mathrm{c}-1} = \frac{2EN}{\hbar\omega_{31}(1-\alpha)}\left[\frac{1-\alpha}{1-(\alpha-\varepsilon)^2}\,d_1^2\rho_1^0\right.$$

$$\left. + \frac{1-\varepsilon}{1+\alpha-2\varepsilon}\,d_2^2\rho_2^0\right]E_{-1} + \frac{b\sin\Theta E_0^2E_1}{(1-\alpha^2)[(1-\varepsilon)^2-\alpha^2]}, \tag{6}$$

$$P_{\mathrm{c}0} = \frac{2NE}{\hbar\omega_{31}}\left[\frac{1}{1-\alpha^2}\,d_1^2\rho_1^0 + \frac{1-\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2-\alpha^2}\,d_2^2\rho_2^0\right]E_0,$$

$$P_{\mathrm{c}1} = \frac{2EN}{\hbar\omega_{31}(1+\alpha)}\left[\frac{1+\alpha}{1-(\alpha+\varepsilon)^2}\,d_1^2\rho_1^0\right.$$

$$\left. + \frac{1-\varepsilon}{1-\alpha-2\varepsilon}\,d_2^2\rho_2^0\right]E_1 - \frac{b\sin\Theta E_0^2E_{-1}}{(1-\alpha^2)[(1-\varepsilon)^2-\alpha^2]};$$

$$f_{\mp1} = \frac{1\pm\alpha}{1\pm\alpha-\varepsilon}, \quad b \equiv \frac{Nn_0d_1^2d_2^2E^3}{\hbar^3\Gamma\omega_{31}^2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2.$$

Отметим, что в рассматриваемом приближении действительная часть поляризации P_{c0}, создаваемая волной накачки, линейна по амплитуде поля.

3. Уравнения для суммарной фазы и медленных амплитуд

Дифференцирование выражения для поля (2) при сохранении только первых производных амплитуд по координате и подстановка результатов в волновое уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathscr{E} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}P,$$

где c – скорость света, в приближении вращающейся волны дают

$$2\left(k_n + z\,\frac{\mathrm{d}k_n}{\mathrm{d}z}\right)\frac{\mathrm{d}E_n}{\mathrm{d}z} + \left(2\,\frac{\mathrm{d}k_n}{\mathrm{d}z} + z\,\frac{\mathrm{d}^2k_n}{\mathrm{d}z^2}\right)E_n = -\frac{4\pi\omega_n^2}{c^2E}\,P_{\mathrm{s}n},$$

$$k_n + z\,\frac{\mathrm{d}k_n}{\mathrm{d}z} = \frac{\omega_n}{c}\sqrt{1 + \frac{4\pi}{EE_n}\,P_{\mathrm{c}n}} \approx \frac{\omega_n}{c}\left(1 + \frac{4\pi}{EE_n}\,P_{\mathrm{c}n}\right), \tag{7}$$

$$n = -1, 0, 1.$$

Использование приближения, связанного с разложением квадратного корня в трех последних уравнениях для волновых чисел (7), как показывают соответствующие численные расчеты, приводит к занижению амплитуды антистоксовой волны примерно на 5 % в области ее выхода на стационарное значение и практически не меняет амплитуду стоксовой волны и суммарную фазу Θ (4). В дальнейшем ограничимся этим приближением.

Выражая производные волновых чисел в первых трех уравнениях (7) из последних уравнений с использованием выражений (6) и разрешая эту систему относительно первых производных амплитуд, в кубичном по полю приближении получаем уравнения для амплитуд

$$\frac{\mathrm{d}E_{-1}}{\mathrm{d}\zeta} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) f_{-1}(f_{-1}E_{-1} + f_1 \cos\Theta E_1)E_0^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}z} = -\left(f_{-1}^2 E_{-1}^2 - f_1^2 E_1^2\right)E_0, \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}\zeta} = -\left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) f_1(f_{-1}\cos\Theta E_{-1} + f_1 E_1)E_0^2;$$

$$\zeta \equiv Gz, \quad G = \frac{4\pi\alpha(1-\varepsilon/\alpha)^2 N n_0 d_1 d_2 \kappa}{(1-\alpha^2)c\hbar n_\mathrm{d}},$$

$$n_\mathrm{d} = 1 + \frac{4\pi N\left(d_1^2\rho_1^0 + d_2^2\rho_2^0\right)}{(1-\alpha^2)\hbar\omega_{31}}.$$

Уравнения (8) имеют интеграл движения (соотношения Мэнли – Роу [3, 5])

$$\frac{E_{-1}^2}{1-\varepsilon/\alpha} + E_0^2 + \frac{E_1^2}{1+\varepsilon/\alpha} = \mathrm{const}$$

$$= 1 + \frac{g_{-1}^2}{1-\varepsilon/\alpha} + \frac{g_1^2}{1+\varepsilon/\alpha} \equiv U. \tag{9}$$

С учетом определения параметров ε и α (4) данные соотношения представляют собой сумму отношений плотностей энергий волн к их частотам и выражают закон сохранения полного числа квантов всех волн, участвующих в нерезонансном ВКР. Поскольку вследствие соотношений (9) интенсивность основной волны накачки определяется интенсивностями рассеянных волн, далее будем прослеживать поведение только амплитуд стоксовой и антистоксовой волн.

Уравнение для суммарной фазы Θ (4) получается из уравнений (7) с применением разложения в ряды линейных частей действительных поляризаций (6) по малому параметру ε с точностью до второго порядка включительно:

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\zeta} = -\eta + n_\mathrm{d} f_{-1} f_1 \sin\Theta \, \frac{(1+\varepsilon/\alpha)E_{-1}^2 - (1-\varepsilon/\alpha)E_1^2}{E_{-1}E_1},$$

$$\eta = \frac{2n_\mathrm{d}(3+\alpha^2)\left(d_1^2\rho_1^0 + d_2^2\rho_2^0\right)}{(1-\varepsilon/2)^2(1-\alpha^2)^2 n_0 \kappa d_1 d_2}\,\varepsilon^2, \tag{10}$$

где $\eta = (2k_0 - k_{-1} - k_1)/G$ – безразмерная волновая расстройка, обусловленная линейными по амплитудам полей действительными частями поляризаций.

Первое и третье уравнения (8) с учетом следующего из соотношения (9) равенства

$$E_0^2 = U - \frac{E_{-1}^2}{1-\varepsilon/\alpha} - \frac{E_1^2}{1+\varepsilon/\alpha} \tag{11}$$

совместно с уравнением (10) образуют замкнутую систему уравнений для описания трехволнового ВКР в условиях нелинейной дисперсии среды. Граничными условиями для нее являются следующие:

$$E_{-1}(0) = g_{-1}, \quad E_1(0) = g_1, \quad \Theta(0) = \Phi.$$

В пределе $\varepsilon \to 0$ полученная система уравнений с точностью до обозначений совпадает с уравнениями (4) работы [6], с той лишь разницей, что последние описывают как осевое, так и конусное рассеяние.

4. Пространственное развитие ВКР

Оценим параметры задачи применительно к ВКР на вращательном переходе $J = 1 \leftrightarrow J = 3$ молекулы водорода. Для исходных значений параметров $\omega_{21} = 587$ см$^{-1}$, $\omega_0 = 1.88 \times 10^4$ см$^{-1}$ ($\lambda = 532$ нм), $\omega_{31} = 10^5$ см$^{-1}$, $N = 2.69 \times 10^{19}$ см$^{-3}$ (давление 1 атм), $\rho_1^0 = 0.493$, $\rho_2^0 = 0.249$, $n_0 = 0.244$, $\Gamma = 0.1$ см$^{-1}$, $d_1 = d_2 = 5$D и интенсивности основной компоненты накачки 50 МВт/см^2 рассчитываемые параметры таковы: $\alpha = 0.19$, $\varepsilon = 0.0059$, $\Delta = 4.8 \times 10^4$ см$^{-1}$, $f_{-1} = 1.005$, $f_1 = 1.007$, $n_\mathrm{d} = 1.00033$, $G = 0.175$ см$^{-1}$, $\kappa = 0.0137$ и $\eta = 0.05$.

Численное решение системы уравнений (8) – (11) показывает, что в случае малых волновых расстроек η и относительно больших и близких начальных значений амплитуд стоксовой и антистоксовой волн их амплитуды при $\zeta > 0.5$ существенно зависят от начальной суммарной фазы волн накачки Φ (рис.1,*а*, *б*). При $\Phi = \pm\pi$ амплитуды обеих волн меняются с расстоянием значительно медленнее, чем при $\Phi \sim 0$. Таким образом, ВКР подавляется. Из расчетов следует, что данный эффект существует при $g_{-1} \approx g_1 \geqslant 0.1$ и более выражен при возрастании $g_{\pm1}$.

Физический механизм подавления ВКР проясняется на основе уравнений (8) – (11) в пределе $\eta, \varepsilon \to 0, f_{\pm1} \to 1$. В случае $\Phi = \pm\pi$, когда фаза в среде принимает постоянное значение $\Theta = \pm\pi$ (рис.1,*в*), множитель $\cos\Theta$ в правых частях уравнений (8) для амплитуд волн равен -1. Система уравнений (8) – (11) при этом сводится к двум уравнениям для амплитуд:

$$\frac{\mathrm{d}E_{-1}}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}\zeta} \approx (E_{-1} - E_1)E_0^2, \tag{12}$$

и равенству (11).

Уравнения (12) имеют дополнительно к соотношениям (9) интеграл движения

$$E_{-1} - E_1 \approx \mathrm{const} = g_{-1} - g_1. \tag{13}$$

Из уравнений (12), (13) следует, что в случае $g_{-1} \approx g_1$ производные амплитуд стоксовой и антистоксовой волн малы и ВКР подавляется. Разность амплитуд (13) при $\Theta = \pm\pi$ пропорциональна мнимой части постоянной составляющей поляризации комбинационного перехода r (4), которая, как видно из последнего уравнения (1), пропорциональна, в свою очередь, разности поляризаций нерезонансных дипольно-разрешенных переходов. Таким образом, подавление ВКР обусловлено деструктивной

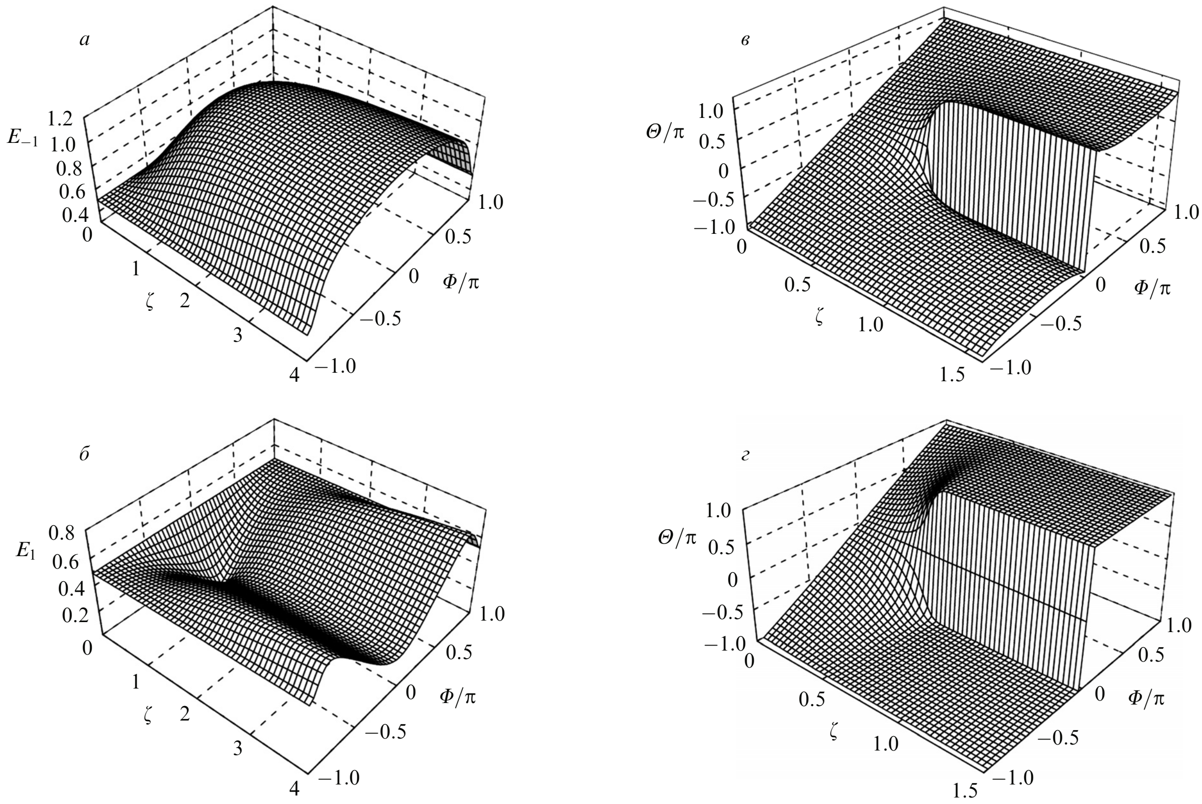

Рис.1. Зависимости амплитуд стоксовой (*а*) и антистоксовой (*б*) волн, а также суммарной фазы (*в*, *г*) от безразмерной длины ζ и начальной суммарной фазы Φ при $\eta = 0.007$, $g_{-1} = 0.5$, $g_1 = 0.49$, $\kappa = 0.1$, $\varepsilon = 0.006$, $\alpha = 0.2$. Фаза Θ (рис.1,*г*) рассчитана по формуле (16) для $h_0 = 180$, $q = 0.07$ и $\zeta_0 = 0.7$.

интерференцией этих поляризаций, аналогичной деструктивной интерференции, являющейся причиной когерентного пленения населенностей [7] при резонансном взаимодействии двух волн с дипольно-разрешенными переходами Λ-системы.

Обсудим поведение фазы. При малом значении начальной фазы $\Phi \approx 0$ фаза в среде Θ практически не меняется вплоть до некоторого значения $\zeta = \zeta_0 \leqslant 1$, а в точке $\zeta_0 \approx g_1/g_{-1}$ испытывает скачок на π и далее быстро принимает стационарное значение (рис.1,*в*). Такое поведение получило название нелинейного захвата и скачка фазы [2, 6]. При положительных начальных фазах, $\Phi > 0$, скачок фазы в среде $\Delta\Theta$ при возрастании длины является положительным, $\Delta\Theta = \pi$, а при $\Phi \leqslant 0$ – отрицательным, $\Delta\Theta = -\pi$. Следовательно, малое изменение начальных фаз от отрицательных значений к положительным вызывает скачок фазы в точке с координатой $\zeta > \zeta_0$ на 2π. При $|\Phi| > 0.1$ скачок фазы быстро исчезает. Данные особенности поведения фазы ранее в литературе не отмечались.

Качественное поведение фазы (затягивание, скачок и быстрый выход на стационарное значение) объясняется кардинальным изменением механизма дисперсии, которая в нелинейном случае определяется дифференциальными уравнениями (7), (10). Главной особенностью уравнения (10) является зависимость производной фазы от $\sin\Theta$, возникающая вследствие кубичной по полю нелинейности поляризации среды. Данный механизм дейсвует следующим образом. В пределе $\eta \to 0$ уравнение (10) можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\zeta} \approx h\sin\Theta, \quad \Theta(0) = \Phi, \tag{14}$$

где h – функция координаты, определяемая амплитудами волн. Упрощая ситуацию, положим функцию h постоянной. В этом случае уравнение (14) имеет решение

$$\Theta = 2\operatorname{arccot}\left(\mathrm{e}^{-h\zeta}\cot\frac{\Phi}{2}\right). \tag{15}$$

Поведение функции $\Theta(\zeta, \Phi)$ качественно совпадает с поведением фазы, представленным на рис.1,*в*, но в отличие от расчетной фазы функция $\Theta(\zeta, \Phi)$ является более гладкой и не имеет скачков. Из расчетов зависимости $h(\zeta)$ в условиях, принятых при построении рис.1, следует, что функцию $h(\zeta)$ можно аппроксимировать выражением $h = h_0/[1 + (\zeta - \zeta_0)^2/q^2]$, где h_0, ζ_0 и q – постоянные. Использование данной аппроксимации в уравнении (14) приводит к решению

$$\Theta = 2\operatorname{arccot}\left\{\exp\left[-h_0 q\left(\arctan\frac{\zeta - \zeta_0}{q} + \arctan\frac{\zeta_0}{q}\right)\right]\cot\frac{\Phi}{2}\right\}. \tag{16}$$

Выражение (16) в случае $q \ll 1$ и $h_0 q \gg 1$ при соответствующем выборе параметров достаточно хорошо количественно описывает затягивание (нелинейный захват), скачок и быстрый выход на стационарное значение фазы Θ (рис.1,*г*). Из решения (16) также с очевидносью следует объяснение скачков фазы при изменении пространственной координаты и смене знака начальной фазы.

Проведенный выше анализ поведения фазы показал, что скачок фазы возникает, когда ее производная велика

$(h \gg 1)$. При $g_{-1} \approx g_1$ это происходит из-за того, что, как следует из третьего уравнения (8) с отрицательной правой частью, амплитуда антистоксовой волны при $\zeta < \zeta_0$ линейно убывает от начального значения почти до нуля*. Далее скачок фазы приводит к изменению знаков $\cos\Theta$ и правой части третьего уравнения (8) для амплитуды антистоксовой волны, в результате чего амплитуда остается положительной и возрастает. Вместе с тем существует и другой способ увеличения производной фазы – применение бихроматической накачки. В этом случае $g_{-1} \approx 1$, а величина g_1 определяется спонтанной затравкой, на несколько порядков меньшей начальнй амплитуды стоксовой компоненты накачки. Как видно из уравнения (10), при этом величина $h \approx g_{-1}/g_1 \gg 1$ для $\zeta = 0$. Следовательно, скачок фазы происходит сразу на входе в среду. Численное решение уравнений (8)–(11) для этого случая представлено на рис.2. Поведение фазы в рассматриваемом случае (рис.2,*в*) согласуется с приведенными выше качественными соображениями. Поскольку нелинейная дисперсия начинает влиять при $\zeta \ll 1$, усиление стоксовой и антистоксовой волн уже в начале среды определяется лишь малой волновой расстройкой η, т. е. происходит оптимальным образом в режиме когерентного ВКР. Это объясняет высокую эффективность генерации гармоник в многочастотном ВКР при использовании бихроматической накачки [1]. Зависимость амплитуд рассеянных волн от начальной фазы Φ при этом полностью исчезает (рис.2,*а*, *б*), а амплитуда антистоксовой волны с точностью до множителя совпадает с амплитудой стоксовой волны. Последнее связано с тем, что в данном случае применимы приближенные уравнения (12), (13), в которых $g_{-1} \gg g_1$.

Предыдущее рассмотрение проводилось для случая малых безразмерных волновых расстроек ($\eta \ll 1$), когда преобладает нелинейная дисперсия среды. Проследим теперь соотношение вкладов линейной и нелинейной дисперсий, которое задается величиной η. Как видно из формулы для η (10), величина η возрастает при уменьшении параметра насыщения ВКР κ (4) (мощности накачки) и разности населенностей, а также при увеличении частоты комбинационного перехода и угловой расходимости излучения [1]. Расчеты показывают, что поведение фазы и амплитуды антистоксовой волны при возрастании расстройки и вариации начальных амплитуд $g_{-1} \approx g_1$ отличается большим разнообразием. А именно, при достаточно больших расстройках скачок фазы Θ происходит на фоне ее убывания с ростом координаты по закону $\Theta = -\eta\zeta + \Phi$, который следует из уравнения (10) с опущенным слагаемым в правой части, определяемым нелинейной дисперсией. При некотором критическом значении $\eta = \eta_0$ скачок фазы полностью исчезает. Величина η_0 увеличивается с уменьшением начальных амплитуд. В частности, $\eta_0 = 3.8$ для $g_{-1} = 0.5$ и 8.2 для $g_{-1} = 0.2$.

Амплитуды волн, начиная с $\eta \simeq 3 - 5$, осциллируют с частотой η. Осцилляции намного более выражены для антистоксовой волны, и с ростом η их амплитуда уменьшается, составляя несколько процентов для больших значений η ($\eta \approx 80$). Осцилляции амплитуды антистоксовой волны происходят одновременно с ее общим убыванием с ростом длины вплоть до нуля. Пример поведения амплитуд волн и фазы для переходного значения волновой расстройки приведен на рис.3.

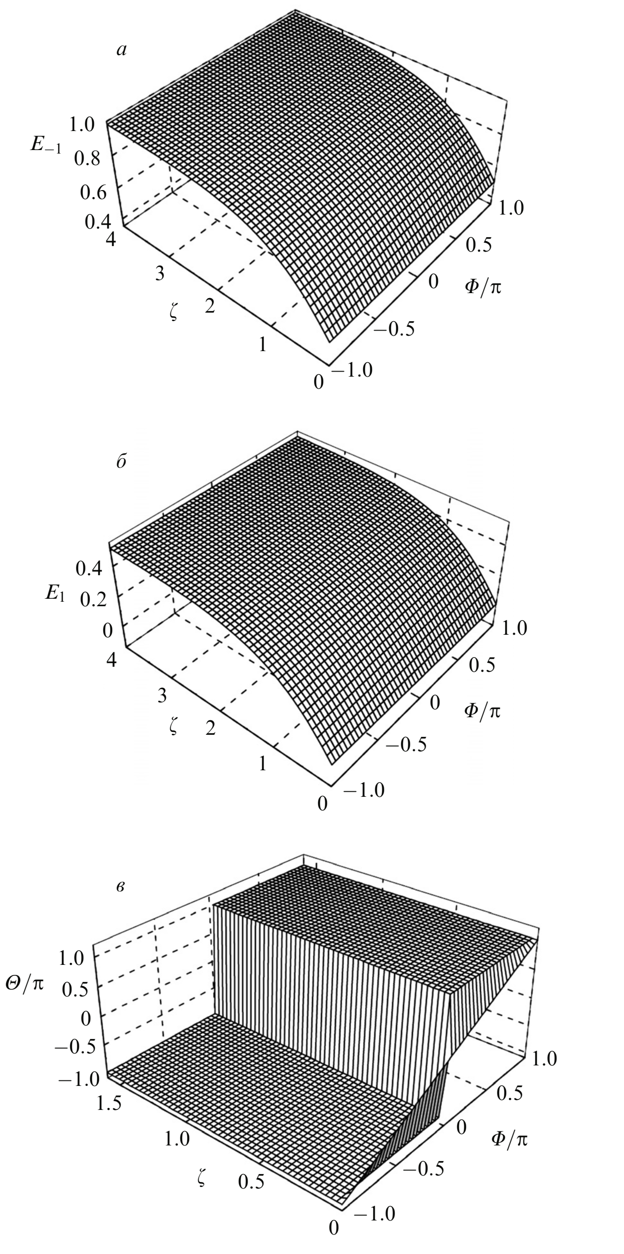

Рис.2. Амплитуды стоксовой (*а*) и антистоксовой (*б*) волн, а также фазы Θ (*в*) в условиях бихроматической накачки при $g_{-1} = 0.5$, $g_1 = 0.0001$, $\eta = 0.007$, $\kappa = 0.1$, $\varepsilon = 0.006$, $\alpha = 0.2$.

При $\eta > 100$ осцилляции амплитуд в уравнениях (8) усредняются, и эти уравнения сводятся к уравнениям для безразмерных интенсивностей волн $W_{\pm1} \equiv E_{\pm1}^2$:

$$\frac{\mathrm{d}W_{-1}}{\mathrm{d}\zeta} = 2\left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) f_{-1}^2 W_{-1}\left(U - \frac{W_{-1}}{1 - \varepsilon/\alpha} - \frac{W_1}{1 + \varepsilon/\alpha}\right),$$
$$\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}\zeta} = -2\left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) f_1^2 W_1\left(U - \frac{W_{-1}}{1 - \varepsilon/\alpha} - \frac{W_1}{1 + \varepsilon/\alpha}\right). \tag{17}$$

В результате ВКР становится некогерентным процессом и не зависит от фазы.

Трансцендентное решение уравнений (17) в случае $\varepsilon = 0$, $f_{\pm1} = 1$ имеет вид

* С учетом только линейной дисперсии, как показывает решение соответствующих уравнений, в точке $\zeta = \zeta_0$ амплитуда антистоксовой волны обращается в нуль и далее становится отрицательной, что означает скачок фазы на π.

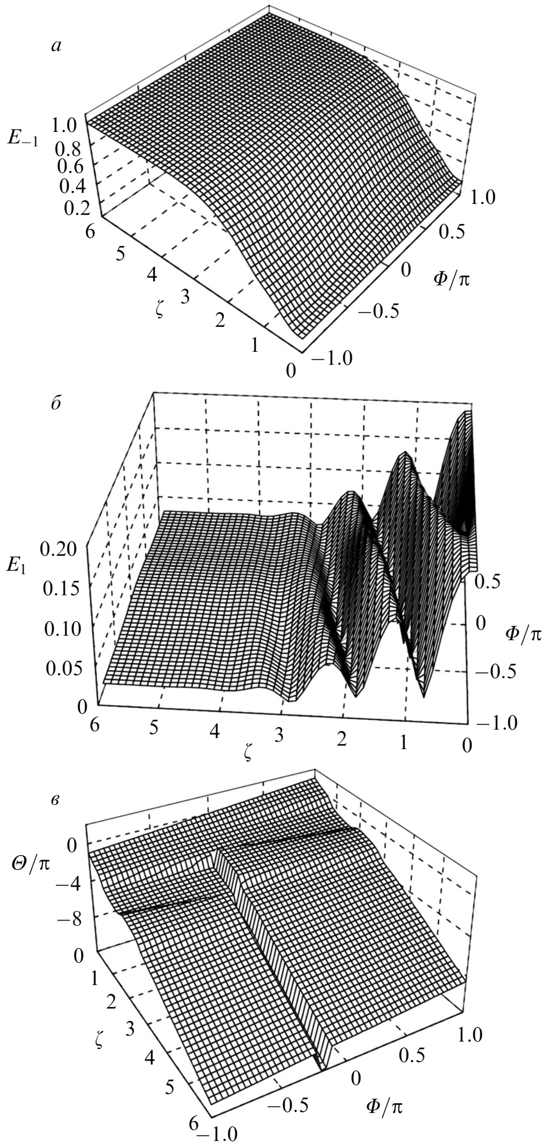

Рис.3. Амплитуды стоксовой (*а*) и антистоксовой (*б*) волн, а также фазы Θ (*в*) при $\eta = 6$, $g_{-1} = 0.2$, $g_1 = 0.19$, $\varepsilon = 0.006$, $\alpha = 0.2$.

$$\zeta = \frac{1}{2Q\left(g_1^2 - W_1\right)} \ln\left(\frac{U - 2g_1^2 - Q}{U - 2g_1^2 + Q}\,\frac{U + Q - 2W_1}{U - Q - 2W_1}\right), \quad (18)$$

$$U = 1 + g_{-1}^2 + g_1^2,$$

$$Q \equiv \sqrt{1 + 2g_{-1}^2 + 2g_1^2 + \left(g_{-1}^2 - g_1^2\right)^2},$$

$$W_{-1} = g_{-1}^2 g_1^2 W_1^{-1}.$$

Графическое решение (18) для различных значений g_{-1}^2 и g_1^2 показывает, что во всех случаях интенсивность антистоксовой волны монотонно убывает от начального значения до нуля, а интенсивность стоксовой волны монотонно возрастает до предельного значения, определяемого соотношением (9).

Отметим, что влияние нелинейной дисперсии среды на антистоксову компоненту ВКР является определяющим при $\eta \leqslant 1$ и заметно сказывается в широком интервале значений η ($1 < \eta < 50$), в том числе в случае малых параметров насыщения. Следовательно, обусловленные нелинейной дисперсией эффекты должны наблюдаться при ВКР не только на вращательных, но и на колебательных переходах молекул.

Автор благодарен М.М.Макогону за полезные обсуждения данной статьи.

1. Лосев Л.Л., Луценко А.П. *Квантовая электроника*, **20**, 1054 (1993).
2. Бутылкин В.С., Каплан А.Е., Хронопуло Ю.Г., Якубович Е.И. *Резонансные взаимодействия света с веществом* (М.: Наука, 1977).
3. Кочанов В.П., Богданова Ю.В. *ЖЭТФ*, **123**, 233 (2003).
4. Аллен Л., Эберли Дж. *Оптический резонанс и двухуровневые атомы* (М.: Мир, 1978).
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982, с. 510).
6. Бутылкин В.С., Венкин Г.В., Протасов В.П. и др. *ЖЭТФ*, **70**, 829 (1976).
7. Агапьев Б.Д., Горный М.Б., Матисов Б.Г., Рождественский Ю.В. *УФН*, **163**, 1 (1993).