PACS 42.65.Ky, 42.65.Yj, 42.65.Tg, 05.45.–a

Эффективная каскадная квазисинхронная параметрическая генерация с повышением частоты

В.М.Петникова, В.В.Шувалов

Показано, что за счет одновременного протекания двух квазисинхронных процессов параметрического распада $\omega_3 \to \omega_1 + \omega_2$ квантов накачки с частотой ω_3 и преобразования частоты ω_1 одной из порождаемых волн вверх $\omega_1 + \omega_3 \to \omega_4 > \omega_3$ в среде с квадратичной нелинейностью может быть реализована эффективная каскадная генерация с повышением частоты. Установлено, что необходимым условием такой генерации является требование $|\gamma_1|^2 > (\omega_2/\omega_1)|\gamma_2|^2$, где $\gamma_{1,2}$ – усредненные константы нелинейной связи для процессов $\omega_1 + \omega_{2,3} \to \omega_{3,4}$ соответственно. Если это требование выполнено, плоская монохроматическая волна накачки полностью истощается, а предельная (интенсивность шумовых затравок на входе $I_{10,20} \to 0$) эффективность преобразования ее энергии в излучение на частоте ω_4 не зависит от $I_{10,20}$ и определяется только соотношениями между $|\gamma_{1,2}|^2$ и частотами взаимодействующих волн.

***Ключевые слова**: квадратичная нелинейность, квазисинхронное взаимодействие, эффективная каскадная параметрическая генерация с повышением частоты.*

1. Введение

В [1] было показано, что задачу параметрического взаимодействия трех плоских коллинеарных монохроматических волн (мод) в среде с квадратичной нелинейностью [2] можно описать в терминах эффективной кубической нелинейности [3]. При этом исходная задача сводится к трем независимым стационарным нелинейным уравнениям Шредингера (НУШ) относительно амплитуд волн, участвующих в процессе. Позднее в [4] проблему каскадного [5] квазисинхронного [6] преобразования на квадратичной нелинейности удалось аналогичным методом редуцировать до системы из двух стационарных НУШ относительно амплитуд волн, задействованных в обоих нелинейных процессах. Было установлено [4], что эта система трансформируется в два идентичных независимых НУШ, что определяет ее решения в форме суммы и разности двух одинаковых решений одного и того же НУШ со сдвинутыми аргументами и позволяет оптимизировать эффективность процесса в любой конкретной ситуации.

Ниже с использованием подхода, развитого в [1, 4], будут рассмотрены проблема эффективной каскадной квазисинхронной параметрической генерации с повышением частоты (по отношению к частоте волны накачки) и особенности соответствующих этому процессу аналитических решений. Генерация такого типа может проходить в среде с квадратичной нелинейностью за счет одновременного протекания двух процессов: параметрического распада $\omega_3 \to \omega_1 + \omega_2$ квантов накачки с частотой ω_3 и преобразования $\omega_{1,2} + \omega_3 \to \omega_4 > \omega_3$ частоты $\omega_{1,2}$ одной из генерируемых за счет этого распада волн вверх. Согласно численным расчетам, проведенным в [7] для случая процесса вырожденного распада (фотоны на частотах $\omega_{1,2}$ неразличимы), преобразование потока энергии накачки в излучение на частоте ω_4 может быть при этом практически полным. Однако поскольку режимы вырождения отвечают особым точкам фазового пространства системы, в которых законы ее эволюции качественно меняются, возможность учета во взаимодействиях только вырожденных мод для задач генерационного типа вызывает определенные сомнения. Поэтому ниже нас будет интересовать именно невырожденный ($\omega_1 \neq \omega_2$) случай и поиск среди вариантов его реализации аналогов «мягкого» режима возбуждения [8], в которых эффективность преобразования потока энергии накачки на частоту ω_4 может быть велика при сколь угодно малых входных шумовых затравках на частотах $\omega_{1,2}$.

2. Каскадная параметрическая генерация

Рассмотрим коллинеарное распространение вдоль оси z четырех (нижние индексы $i = 1, \ldots, 4$) плоских монохроматических волн (мод) с кратными (для упрощения записи) частотами ω_1, $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 3\omega_1$ и $\omega_4 = \omega_1 + \omega_3 = 4\omega_1$, волновыми векторами $\boldsymbol{k}_{1-4}$ и комплексными амплитудами A_{1-4} в среде с нерезонансной квадратичной нелинейностью. Будем считать, что их взаимодействие обусловлено двумя нелинейными процессами, $\omega_1 + \omega_{2,3} \to \omega_{3,4}$, с волновыми расстройками $\Delta\boldsymbol{k}_{1,2} = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_{2,3} - \boldsymbol{k}_{3,4}$. Положим, что в нелинейной среде (полупространство $z \geqslant 0$) создана пространственная структура, в которой знаки констант нелинейной связи $\beta_{1,2}$ процессов $\omega_1 + \omega_{2,3} \to \omega_{3,4}$ периодически меняются вдоль оси z, и по аналогии с [4–7] в квазисинхронном режиме взаимодействия запишем

В.М.Петникова, В.В.Шувалов. Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vsh@vsh.phys.msu.su

Поступила в редакцию 24 сентября 2009 г., после доработки – 26 февраля 2010 г.

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{i}\gamma_1 A_2^* A_3 - \mathrm{i}\gamma_2 A_3^* A_4, \tag{1а}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{i}2\gamma_1 A_1^* A_3, \tag{1б}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{i}3\gamma_1^* A_1 A_2 - \mathrm{i}3\gamma_2 A_1^* A_4, \tag{1в}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_4}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{i}4\gamma_2^* A_1 A_3. \tag{1г}$$

Здесь $\gamma_{1,2} = \langle \beta_{1,2} \exp(-\mathrm{i}\Delta k_{1,2} z)\rangle_z$ – усредненные константы нелинейной связи для процессов $\omega_1 + \omega_{2,3} \to \omega_{3,4}$ соответственно.

Система (1) имеет пять интегралов второго порядка $J_{0-4} = \mathrm{const}$, соответствующих закону сохранения полного потока энергии и так называемым соотношениям Мэнли – Роу [2]

$$J_0 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \tag{2а}$$

$$J_1 = I_1 - I_2 - \frac{1}{3}I_3, \quad J_2 = I_1 - \frac{1}{2}I_2 + \frac{1}{4}I_4,$$
$$J_3 = I_1 + \frac{1}{3}I_3 + \frac{1}{2}I_4, \quad J_4 = I_2 + \frac{2}{3}I_3 + \frac{1}{2}I_4. \tag{2б}$$

Однако только два из этих интегралов независимы, и мы можем записать, например, что

$$I_2 - I_{20} = (I_1 - I_{10}) - \frac{1}{3}(I_3 - I_{30}),$$
$$I_4 - I_{40} = -2(I_1 - I_{10}) - \frac{2}{3}(I_3 - I_{30}), \tag{3}$$

где $I_i = A_i A_i^*$ пропорциональны интенсивностям волн и $I_{i0} = A_{i0} A_{i0}^* = A_i A_i^*|_{z=0}$.

Из (3) следует, что в рамках поставленной задачи достаточно рассмотреть только ту ситуацию, в которой роль накачки играет мода на частоте ω_3, т. е. случай $I_{30} \neq 0$ и $I_{10,20,40} = 0$ (точнее, $I_{10,20,40} \leqslant I_{30}$). Действительно, эта роль не может быть отдана модам на частотах $\omega_{1,2}$, т. к. $I_2 \leqslant 0$ при $I_{10} \neq 0$, $I_{20} = I_{30} = I_{40} = 0$ и $I_4 \leqslant 0$ при $I_{20} \neq 0$, $I_{10} = I_{30} = I_{40} = 0$ соответственно. Если же накачкой является самая высокочастотная мода (с частотой ω_4), то повышение ее частоты за счет двух указанных нелинейных процессов невозможно.

Дальнейший переход от (1) к уравнениям второго порядка дает по аналогии с [4] замкнутую систему уравнений для $A_{1,3}$ в форме

$$\frac{\mathrm{d}^2 A_1}{\mathrm{d}z^2} = -3G_+|A_1|^2 A_1 + 3\sigma|G_-||A_3|^2 A_1 + 3J_{13}A_1, \tag{4а}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 A_3}{\mathrm{d}z^2} = -9G_+|A_1|^2 A_3 + \sigma|G_-||A_3|^2 A_3 + 3J_{13}A_3 \tag{4б}$$

с граничными условиями

$$A_1|_{z=0} = A_{10}, \ \left.\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = -\mathrm{i}\gamma_1 A_{20}^* A_{30} - \mathrm{i}\gamma_2 A_{30}^* A_{40}, \tag{5а}$$

$$A_3|_{z=0} = A_{30}, \ \left.\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = -\mathrm{i}3\gamma_1^* A_{10} A_{20} - \mathrm{i}3\gamma_2 A_{10}^* A_{40}, \tag{5б}$$

где $G_\pm = |\gamma_1|^2 \pm 2|\gamma_2|^2$; $J_{13} = |\gamma_1|^2 J_1 + 2|\gamma_2|^2 J_3$; $\sigma = \mathrm{sign}(G_-)$ – знакопеременная функция, принимающая значения ± 1 при $|\gamma_1|^2 > 2|\gamma_2|^2$ и $|\gamma_1|^2 < 2|\gamma_2|^2$ соответственно. При этом интенсивности волн $I_{2,4}$ могут быть найдены из соотношений (3).

Легко убедиться, что в интересующей нас ситуации, когда $I_{30} \neq 0$, $I_{10} = I_{20} = I_{40} = 0$, $3J_{13} = -\sigma|G_-|I_{30}$, и с учетом граничных условий

$$A_1|_{z=0} = 0, \ \left.\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = 0, \tag{6а}$$

$$A_3|_{z=0} = A_{30}, \ \left.\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = 0 \tag{6б}$$

система (4) имеет единственное тривиальное решение:

$$A_1(z) \equiv 0, \quad A_3(z) \equiv A_{30}. \tag{7}$$

Однако это решение неустойчиво по отношению к малым возмущениям. Далее мы будем считать, что роль таких возмущений играют малые ($I_{30} \gg I_{10,20,40} \neq 0$) шумовые (см. ниже) затравки $A_{10,20,40} \neq 0$ для амплитуд $A_{1,2,4}$ тех мод , которые должны в итоге генерироваться в нелинейной среде. Как мы покажем далее, это и позволяет реализовать эффективную каскадную параметрическую генерацию с повышением частоты.

Ниже мы ограничимся анализом случая постоянных и оптимальных с точки зрения скорости развития генерации (см. далее) начальных фаз $\varphi_i = \varphi_{i0}$ всех четырех взаимодействующих мод. Фактически это эквивалентно предположению, что источником затравок, обеспечивающих развитие генерации, является входной шум, в котором всегда присутствуют необходимые спектральные составляющие именно с такими оптимальными начальными фазами. При этом, выделив подстановкой

$$A_i(z) = X_i(z)\exp(\mathrm{i}\varphi_{i0}) \tag{8}$$

действительные и неотрицательные во входной плоскости ($X_i|_{z=0} = X_{i0} \geqslant 0$) амплитуды X_i взаимодействующих мод, при оптимальном соотношении φ_{i0}, заданном условиями

$$\varphi_{10} + \varphi_{20,30} - \varphi_{30,40} - \varphi_{\gamma_1,\gamma_2} \pm \frac{\pi}{2} = 0, \tag{9}$$

которые обеспечивают максимальную скорость нарастания $X_{2,4}$ за счет перехода уравнений (1б) и (1г) в соотношения

$$\frac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}z} = 2|\gamma_1|X_1X_3, \quad \frac{\mathrm{d}X_4}{\mathrm{d}z} = 4|\gamma_2|X_1X_3, \tag{10}$$

мы сведем задачу (4) к системе

$$\frac{\mathrm{d}^2 X_1}{\mathrm{d}z^2} = -3G_+X_1^3 + 3\sigma|G_-|X_3^2X_1 + 3J_{13}X_1, \tag{11а}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 X_3}{\mathrm{d}z^2} = -9G_+X_1^2X_3 + \sigma|G_-|X_3^3 + 3J_{13}X_3 \tag{11б}$$

с граничными условиями

$$X_1|_{z=0} = X_{10}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = +|\gamma_1|X_{20}X_{30} - |\gamma_2|X_{30}X_{40}, \qquad (12\text{а})$$

$$X_3|_{z=0} = X_{30}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}X_3}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = -3|\gamma_1|X_{10}X_{20} - 3|\gamma_2|X_{10}X_{40}. \quad (12\text{б})$$

В (9) фазы $\varphi_{1,2}$ определены соотношениями $\gamma_{1,2} = |\gamma_{1,2}| \times \exp(\mathrm{i}\varphi_{\gamma_{1,2}})$.

Легко убедиться, что в дальнейшем анализе можно ограничиться всего двумя ситуациями, в которых либо $I_{30} \neq 0$, $I_{10} \neq 0$, $I_{20} = I_{40} = 0$ (случай I), либо $I_{30} \neq 0$, $I_{20} \neq 0$, $I_{10} = I_{40} = 0$ (случай II). Действительно, при $I_{30} \neq 0$, $I_{10} = I_{20} = 0$ тривиальное решение (7) оказывается устойчивым по отношению к малым флуктуациям I_{40} (по крайней мере, в первом приближении), т. к.

$$X_{10,20} = \left.\frac{\mathrm{d}X_{1,2}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} \equiv 0, \quad X_{3,4}|_{z=0} = X_{30,40} \text{ и } \left.\frac{\mathrm{d}X_{3,4}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} \equiv 0.$$

3. Точные аналитические решения

Остановимся сначала на случае I, когда $X_{30} \neq 0$, $X_{10} \neq 0$, $X_{20} = X_{40} = 0$. При этом $3J_{13} = 3G_+I_{10} - \sigma|G_-|I_{30}$, и система (11) имеет граничные условия

$$X_{1,3}|_{z=0} = X_{10,30} = \sqrt{I_{10,30}}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}X_{1,3}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = 0. \qquad (13)$$

Хотя в [4] ситуация с граничными условиями вида (13) не рассматривалась, точные решения и для этого случая могут быть найдены тем же методом разделения переменных. При $\sigma = -1$ (т.е. при $|\gamma_1|^2 < 2|\gamma_2|^2$) система уравнений (11) заменами $Y_1(z) = X_1(z) \mp X_2(z)$ и $Y_2(z) = X_1(z) \pm X_2(z)$ по-прежнему сводится к двум идентичным независимым НУШ с нелинейностью фокусирующего типа. Поэтому $Y_{1,2}(z)$ должны быть пропорциональны одному и тому же фундаментальному решению НУШ [4, 9] (т. е. одной из двух возможных эллиптических функций Якоби: $\mathrm{cn}(\gamma z, k)$ либо $\mathrm{dn}(\gamma z, k)$ [10]), но иметь сдвинутые по отношению друг к другу аргументы (см. [4]). Коэффициент пропорциональности, параметр γ и модуль $1 \geqslant k \geqslant 0$ этой эллиптической функции Якоби определяются коэффициентами полученного таким образом НУШ, а сдвиг аргументов $Y_{1,2}(z)$ с учетом (13) должен быть задан условиями

$$Y_{1,2}|_{z=0} = Y_{10,20} \neq 0, \;\; Y_{10} \neq Y_{20} \text{ и } \left.\frac{\mathrm{d}Y_{1,2}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = 0.$$

Выполнить эти три условия можно только тогда, когда $Y_{1,2}(z) \propto \mathrm{dn}(\gamma z, k)$, а $Y_{2,1}(z) \propto \mathrm{dn}(\gamma z + K, k) = k'\mathrm{d}n^{-1}(\gamma z, k)$, где $k' = \sqrt{1-k^2}$; $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода [10]. Поэтому при $|\gamma_1|^2 < 2|\gamma_2|^2$ система (11) с граничными условиями (13) имеет два типа решений, для записи которых далее будут использованы тождества $\mathrm{dn}(z,k) + \mathrm{dn}(z+K,k) \equiv (1+k')\mathrm{dn}(\tilde{z}, \tilde{k})$ и $\mathrm{dn}(z,k) - \mathrm{dn}(z+K,k) \equiv (1-k')\mathrm{cn}(\tilde{z}, \tilde{k})$, вытекающие из так называемого повышающего преобразования Ландена [11]. Здесь $\tilde{z} = (1+k')z$, $\tilde{k} = (1-k')/(1+k')$.

С учетом изложенных выше соображений при

$$|\gamma_1|^2 < 2|\gamma_2|^2 \text{ и } I_{10} < \frac{1}{3}\frac{2|\gamma_2|^2 - |\gamma_1|^2}{2|\gamma_2|^2 + |\gamma_1|^2} I_{30}$$

система (11) имеет решение

$$X_1 = \sqrt{I_{10}}\mathrm{cn}(\gamma z, k), \quad X_3 = \sqrt{I_{30}}\mathrm{dn}(\gamma z, k), \qquad (14\text{а})$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{3}I_{30}[1 - \mathrm{dn}^2(\gamma z, k)] - I_{10}\mathrm{sn}^2(\gamma z, k), \\ I_4 &= \frac{2}{3}I_{30}[1 - \mathrm{dn}^2(\gamma z, k)] + 2I_{10}\mathrm{sn}^2(\gamma z, k). \end{aligned} \qquad (14\text{б})$$

Здесь значения параметров k и γ определены соотношениями

$$k^2\gamma^2 = 6(2|\gamma_2|^2 + |\gamma_1|^2)I_{10}, \quad \gamma^2 = 2(2|\gamma_2|^2 - |\gamma_1|^2)I_{30}. \qquad (15)$$

Легко убедиться, что положения максимумов $z = z_{\max}$ на зависимости $I_4(z)$ отвечают условию $\mathrm{cn}(\gamma z_{\max}, k) = 0$, откуда

$$z_{\max} = (2m-1)\gamma^{-1}K(k), \qquad (16)$$

где $m = 1, 2, \ldots$ – произвольное целое положительное число. При этом

$$I_{4\max} = I_4(z_{\max}) = 8\frac{|\gamma_2|^2}{2|\gamma_2|^2 - |\gamma_1|^2}I_{10} \to 0 \text{ при } I_{10} \to 0, \quad (17)$$

что не подходит для создания эффективного генератора, работающего в «мягком» режиме возбуждения.

При

$$|\gamma_1|^2 < 2|\gamma_2|^2 \text{ и } I_{10} > \frac{1}{3}\frac{2|\gamma_2|^2 - |\gamma_1|^2}{2|\gamma_2|^2 + |\gamma_1|^2} I_{30}$$

функции, которые выполняют моды с частотами ω_1 и ω_3, фактически просто меняются местами, что сразу дает

$$X_1 = \sqrt{I_{10}}\mathrm{dn}(\gamma z, k), \quad X_3 = \sqrt{I_{30}}\mathrm{cn}(\gamma z, k), \qquad (18\text{а})$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{3}I_{30}[1 - \mathrm{dn}^2(\gamma z, k)] - I_{10}\mathrm{sn}^2(\gamma z, k), \\ I_4 &= \frac{2}{3}I_{30}[1 - \mathrm{dn}^2(\gamma z, k)] + 2I_{10}\mathrm{sn}^2(\gamma z, k). \end{aligned} \qquad (18\text{б})$$

Здесь значения параметров k и γ определены соотношениями

$$k^2\gamma^2 = 2(2|\gamma_2|^2 - |\gamma_1|^2)I_{30}, \; \gamma^2 = 6(2|\gamma_2|^2 + |\gamma_1|^2)I_{10}. \; (19)$$

При этом решение (18) соответствует жесткому режиму возбуждения системы, поскольку интенсивность затравки I_{10} на входе в нелинейную среду обязана быть велика. Более того, анализируя характер зависимостей $I_1(z)$, заданных (14а) и (18а), можно сделать вывод о том, что в этих двух решениях сама шумовая затравка I_{10} фактически играет роль второй компоненты накачки, т. к. $I_1(z) \leqslant I_{10}$.

На первый взгляд, решения (14) и (18) являются новыми и не выписывались ранее в [4]. Однако это не так, и при $\mathrm{sn}(\beta\tilde{z}_0, k') = (1+k')^{-1}$ ($\beta\tilde{z}_0 = K/2$, см. обозначения в [4]) оба эти решения с учетом возможности перестановки индексов $1 \leftrightarrow 3$ могут быть получены из соотношений, аналогичных выражениям (33) работы [4], с использованием повышающего преобразования Ландена [11] и сдвига результата преобразования на четверть периода K вдоль оси z. Более того, судя по всему, многие стационарные решения системы из двух НУШ, известные из литературы, могут быть представлены благодаря преобразованию Ландена и указанных тождеств в существенно более простой форме.

При $\sigma = +1$ (т.е. при $|\gamma_1|^2 > 2|\gamma_2|^2$) единственно возможное решение системы (11) также определяется сдвинутыми вдоль оси z на K выражениями (47) из работы [4] при $\mathrm{sn}(2\beta\tilde{z}_0, k') = 0$ ($\beta\tilde{z}_0 = K/2$, см. обозначения в [4]), что позволяет записать его в виде

$$X_1 = \sqrt{I_{10}}\frac{1}{\mathrm{dn}(\gamma z, k)}, \quad X_3 = \sqrt{I_{30}}\frac{\mathrm{cn}(\gamma z, k)}{\mathrm{dn}(\gamma z, k)}, \tag{20а}$$

$$I_2 = \frac{1-\mathrm{dn}^2(\gamma z,k)}{\mathrm{dn}^2(\gamma z,k)}I_{10} + \frac{1}{3}\frac{\mathrm{dn}^2(\gamma z,k) - \mathrm{cn}^2(\gamma z,k)}{\mathrm{dn}^2(\gamma z,k)}I_{30},$$

$$I_4 = -2\frac{1-\mathrm{dn}^2(\gamma z,k)}{\mathrm{dn}^2(\gamma z,k)}I_{10} + \frac{2}{3}\frac{\mathrm{dn}^2(\gamma z,k) - \mathrm{cn}^2(\gamma z,k)}{\mathrm{dn}^2(\gamma z,k)}I_{30}. \tag{20б}$$

Здесь значения параметров k и γ определены соотношениями

$$k^2\gamma^2 = 2(|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_2|^2)I_{30},$$

$$\gamma^2 = 2[3(|\gamma_1|^2 + 2|\gamma_2|^2)I_{10} + (|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_2|^2)I_{30}]. \tag{21}$$

Локализация максимумов $z = z_{\max}$ на зависимости $I_4(z)$ и в этом случае отвечает условию $\mathrm{cn}(\gamma z_{\max}, k) = 0$, т. е. задана выражением (16), в котором γ и k определяются соотношениями (21). Легко убедиться, что теперь

$$I_{4\max} = I_4(z_{\max}) = \frac{8}{3}\frac{|\gamma_2|^2}{|\gamma_1|^2 + 2|\gamma_2|^2}I_{30} \tag{22}$$

не меняется при изменении интенсивности затравки I_{10} на входе в нелинейную среду, и поэтому даже при $I_{10} \to 0$ величина $I_{4\max}|_{2|\gamma_2|^2 \to |\gamma_1|^2} \to \frac{2}{3}I_{30}$ может быть велика.

Отметим, что, в отличие от численных расчетов авторов [7], проведенных для случая вырожденного распада (фотоны на частотах $\omega_{1,2}$ неразличимы), в невырожденных ситуациях преобразование потока энергии накачки в излучение на частоте ω_4 никогда не бывает полным. В тех точках $z = z_{\max}$, в которых волна накачки полностью истощается, часть потока ее энергии $J_0 - I_{4\max}$ перераспределяется между двумя другими генерируемыми модами

$$I_1(z_{\max}) = I_{10} + \frac{1}{3}\frac{|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_2|^2}{|\gamma_1|^2 + 2|\gamma_2|^2}I_{30},$$

$$I_2(z_{\max}) = \frac{2}{3}\frac{|\gamma_1|^2}{|\gamma_1|^2 + 2|\gamma_2|^2}I_{30}, \quad I_3(z_{\max}) = 0. \tag{23}$$

Отметим также, что хотя в рассмотренном случае $I_{4\max}$ и не зависит от I_{10}, наличие затравки для процесса генерации является принципиальным. Дело в том, что от I_{10} зависит положение тех точек $z = z_{\max}$, в которых реализуется максимальная энергетическая эффективность, и, поскольку

$$k^2 \approx 1 - 3\frac{|\gamma_1|^2 + 2|\gamma_2|^2}{|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_2|^2}\frac{I_{10}}{I_{30}} \to 1,$$

$$\gamma^2 \to 2(|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_2|^2)I_{30} \text{ при } I_{10} \to 0, \tag{24}$$

$z_{\max}$ и необходимая для эффективного преобразования длина нелинейной среды $L \approx z_{\max}$ при $I_{10} \to 0$ неограниченно растут.

Остановимся теперь на случае II, когда $X_{30} \neq 0$, $X_{20} \neq 0$, $X_{10} = X_{40} = 0$. При этом $3J_{13} = -3|\gamma_1|^2 I_{20} - \sigma|G_-|I_{30}$, и система (11) имеет граничные условия

$$X_1|_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = |\gamma_1|X_{20}X_{30} = |\gamma_1|\sqrt{I_{20}I_{30}}, \tag{25а}$$

$$X_3|_{z=0} = X_{30} = \sqrt{I_{30}}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}X_3}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = 0, \tag{25б}$$

отвечающие ситуациям, рассмотренным нами ранее в [4]. Поэтому все искомые решения просто сводятся к выражениям (32), (33) и (44) из работы [4], скорректированным с учетом конкретного выбора соотношений между частотами ω_{1-4} взаимодействующих мод.

При

$$|\gamma_1|^2 < 2|\gamma_2|^2 \text{ и } I_{20} < \frac{1}{24}\frac{(|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_2|^2)^2}{|\gamma_1|^2|\gamma_2|^2}I_{30}$$

форма интересующего нас решения системы (11) соответствует выражениям (33) из работы [4] и

$$X_1 = \frac{2\gamma\sqrt{|\gamma_1|^2 I_{20}I_{30}}\,\mathrm{sn}(\gamma z,k)\mathrm{cn}(\gamma z,k)}{2\gamma^2 - (\gamma^2k^2 - 3|\gamma_1|^2 I_{20})\mathrm{sn}^2(\gamma z,k)},$$

$$X_3 = \frac{2\gamma^2\sqrt{I_{30}}\,\mathrm{dn}(\gamma z,k)}{2\gamma^2 - (\gamma^2k^2 - 3|\gamma_1|^2 I_{20})\mathrm{sn}^2(\gamma z,k)}, \tag{26а}$$

$$I_2 = I_{20}\left[1 + \frac{2|\gamma_1|^2 I_{30}\mathrm{sn}^2(\gamma z,k)}{2\gamma^2 - (\gamma^2k^2 - 3|\gamma_1|^2 I_{20})\mathrm{sn}^2(\gamma z,k)}\right]^2,$$

$$I_4 = \frac{16|\gamma_1|^2|\gamma_2|^2 I_{20}I_{30}^2\mathrm{sn}^4(\gamma z,k)}{[2\gamma^2 - (\gamma^2k^2 - 3|\gamma_1|^2 I_{20})\mathrm{sn}^2(\gamma z,k)]^2}. \tag{26б}$$

Здесь значения параметров k и γ определены соотношениями

$$k^2\gamma^2 = \sqrt{3|\gamma_1|^2 I_{20}}\sqrt{3|\gamma_1|^2 I_{20} + 2(|\gamma_1|^2 + 2|\gamma_2|^2)I_{30}},$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{2}\left\{(2|\gamma_2|^2 - |\gamma_1|^2)I_{30} + \sqrt{3|\gamma_1|^2 I_{20}}\right. \tag{27}$$

$$\left.\times\left[\sqrt{3|\gamma_1|^2 I_{20} + 2(|\gamma_1|^2 + 2|\gamma_2|^2)I_{30}} - \sqrt{3|\gamma_1|^2 I_{20}}\right]\right\}.$$

Легко убедиться, что положения максимумов $z = z_{\max}$ на зависимости $I_4(z)$ по-прежнему отвечают условию (16) при γ и k, заданных выражениями (27). При этом

$$I_{4\max} = I_4(z_{\max})$$

$$= 16\frac{|\gamma_1|^2|\gamma_2|^2}{(2|\gamma_2|^2 - |\gamma_1|^2)^2}I_{20} \to 0 \text{ при } I_{20} \to 0, \tag{28}$$

что, как и в рассматривавшемся ранее случае решения (14), не подходит для реализации эффективного генератора, работающего в мягком режиме возбуждения.

Случай, когда

$$I_{20} > \frac{1}{24}\frac{(|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_2|^2)^2}{|\gamma_1|^2|\gamma_2|^2} I_{30}$$

при любом соотношении $|\gamma_1|^2$ и $2|\gamma_2|^2$, по форме сводится к решению (32) из работы [4], и

$$X_1 = \frac{2\gamma\sqrt{|\gamma_1|^2 I_{20} I_{30}}\,\mathrm{sn}(\gamma z, k)\mathrm{dn}(\gamma z, k)}{\gamma^2 + 3|\gamma_1|^2 I_{20} + (\gamma^2 - 3|\gamma_1|^2 I_{20})\mathrm{cn}^2(\gamma z, k)},$$
$$X_3 = \frac{2\gamma^2\sqrt{I_{30}}\,\mathrm{cn}(\gamma z, k)}{\gamma^2 + 3|\gamma_1|^2 I_{20} + (\gamma^2 - 3|\gamma_1|^2 I_{20})\mathrm{cn}^2(\gamma z, k)}, \tag{29а}$$

$$I_2 = I_{20}\left[1 + \frac{2|\gamma_1|^2 I_{30}\mathrm{sn}^2(\gamma z, k)}{\gamma^2 + 3|\gamma_1|^2 I_{20} + (\gamma^2 - 3|\gamma_1|^2 I_{20})\mathrm{cn}^2(\gamma z, k)}\right]^2,$$
$$I_4 = \frac{16|\gamma_1|^2|\gamma_2|^2 I_{30}\mathrm{sn}^4(\gamma z, k)}{[\gamma^2 + 3|\gamma_1|^2 I_{20} + (\gamma^2 - 3|\gamma_1|^2 I_{20})\mathrm{cn}^2(\gamma z, k)]^2}. \tag{29б}$$

Значения параметров k и γ здесь заданы соотношениями

$$k^2\gamma^2 = \frac{1}{2}[\gamma^2 - 3|\gamma_1|^2 I_{20} - (|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_2|^2)I_{30}],$$
$$\gamma^2 = \sqrt{3|\gamma_1|^2 I_{20}[3|\gamma_1|^2 I_{20} + 2(|\gamma_1|^2 + 2|\gamma_2|^2)I_{30}]}. \tag{30}$$

Ясно, что решение (29) также соответствует жесткому режиму возбуждения системы, поскольку интенсивность затравки I_{20} на входе в нелинейную среду обязана быть велика.

И наконец, при

$$|\gamma_1|^2 > 2|\gamma_2|^2 \text{ и } I_{20} < \frac{1}{24}\frac{(|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_2|^2)^2}{|\gamma_1|^2|\gamma_2|^2} I_{30}$$

система (11) имеет еще одно решение, которое сводится к выражениям (44) из работы [4], а само оно, как и рассмотренное ранее решение (20), обеспечивает возможность реализации эффективного каскадного генератора, работающего в мягком режиме возбуждения,

$$X_1 = \frac{2\sqrt{\gamma^2|\gamma_1|^2 I_{20} I_{30}}\,\mathrm{sn}(\gamma z, k)}{2\gamma^2 - (|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_2|^2)I_{30}\mathrm{sn}^2(\gamma z, k)},$$
$$X_3 = \sqrt{I_{30}}\frac{2\gamma^2\mathrm{cn}(\gamma z, k)\mathrm{dn}(\gamma z, k)}{2\gamma^2 - (|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_2|^2)I_{30}\mathrm{sn}^2(\gamma z, k)}, \tag{31а}$$

$$I_2 = I_{20}\frac{[2\gamma^2 + (|\gamma_1|^2 + 2|\gamma_2|^2)I_{30}\mathrm{sn}^2(\gamma z, k)]^2}{[2\gamma^2 - (|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_2|^2)I_{30}\mathrm{sn}^2(\gamma z, k)]^2},$$
$$I_4 = \frac{16|\gamma_1|^2|\gamma_2|^2 I_{20} I_{30}^2\mathrm{sn}^4(\gamma z, k)}{[2\gamma^2 - (|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_2|^2)I_{30}\mathrm{sn}^2(\gamma z, k)]^2}. \tag{31б}$$

Значения параметров k и γ здесь определены соотношениями

$$k^2\gamma^2 = \frac{1}{2}\left\{(|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_2|^2)I_{30} - \sqrt{3|\gamma_1|^2 I_{20}}\right.$$
$$\left.\times\left[\sqrt{3|\gamma_1|^2 I_{20} + 2(|\gamma_1|^2 + 2|\gamma_2|^2)I_{30}} - \sqrt{3|\gamma_1|^2 I_{20}}\right]\right\},$$
$$\gamma^2 = \frac{1}{2}\left\{(|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_2|^2)I_{30} + \sqrt{3|\gamma_1|^2 I_{20}}\right.$$
$$\left.\times\left[\sqrt{3|\gamma_1|^2 I_{20} + 2(|\gamma_1|^2 + 2|\gamma_2|^2)I_{30}} + \sqrt{3|\gamma_1|^2 I_{20}}\right]\right\}. \tag{32}$$

Локализации максимумов $z = z_{\max}$ на зависимости $I_4(z)$ и в этом случае отвечает условие $\mathrm{cn}(\gamma z_{\max}, k) = 0$, поэтому их положения по-прежнему определяются выражением (16), в которое надо подставить значения γ и k, заданные соотношениями (32). Легко убедиться, что хотя теперь

$$I_{4\max} = I_4(z_{\max}) = \frac{16}{3}$$
$$\times\frac{|\gamma_2|^2 I_{30}^2}{\left[\sqrt{3|\gamma_1|^2 I_{20} + 2(|\gamma_1|^2 + 2|\gamma_2|^2)I_{30}} - \sqrt{3|\gamma_1|^2 I_{20}}\right]^2} \tag{33}$$

и зависит от интенсивности затравки I_{20} на входе в нелинейную среду, все предельные ($I_{20} \to 0$) характеристики преобразователя остаются теми же, что и для решения (20). Сохраняются при этом и предельная ($I_{20} \to 0$) эффективность преобразования (22), и те доли, в которых, в отличие от численных результатов [7], оставшаяся часть потока энергии накачки $J_0 - I_{4\max}$ перераспределяется между другими генерируемыми модами (23).

Как и для решения (20), наличие затравки на входе в нелинейную среду является и в этом случае принципиальным, т. к. от I_{20} зависит положение тех точек на оси z, в которых реализуется максимальная эффективность преобразования, и, поскольку при $I_{20} \to 0$

$$k^2 \approx 1 - \sqrt{\frac{6|\gamma_1|^2}{|\gamma_1|^2 + 2|\gamma_2|^2}\frac{I_{20}}{I_{30}}} \to 1,$$
$$\gamma^2 \to \frac{1}{2}(|\gamma_1|^2 - 2|\gamma_2|^2)I_{30}, \tag{34}$$

$z_{\max}$ и необходимая для эффективного преобразования длина нелинейной среды $L \approx z_{\max}$ при $I_{20} \to 0$ опять неограниченно растут.

4. Заключение

Итак, в настоящей работе с использованием подхода [4] аналитически рассмотрена проблема реализации эффективной каскадной (одновременное протекание процессов распада $\omega_3 \to \omega_1 + \omega_2$ квантов накачки с частотой ω_3 и преобразования $\omega_{1,2} + \omega_3 \to \omega_4 > \omega_3$ частоты $\omega_{1,2}$ одной из генерируемых в среде с квадратичной нелинейностью волн вверх) квазисинхронной параметрической генерации (усиления) с повышением частоты (по отношению к частоте волны накачки).

В отличие от численных расчетов, проведенных авторами [7] для случая вырожденного процесса распада (особая точка фазового пространства системы, в которой фотоны на частотах $\omega_{1,2}$ неразличимы и возможность учета только вырожденных мод в задаче генерационного типа вызывает определенные сомнения), показано, что в невырожденных ситуациях ($\omega_1 \neq \omega_2$) преобразование потока энергии накачки в излучение на частоте ω_4 не может быть полным. Установлено, что необходимым условием реализации «мягкого» режима возбуждения системы является требование $|\gamma_1|^2 > (\omega_2/\omega_1)|\gamma_2|^2$. Если это требование выполнено, плоская монохроматическая волна накачки может полностью истощаться, а предельная (интенсивность шумовых затравок на входе в нелинейную среду $I_{10,20} \to 0$) эффективность преобразования потока ее энергии в излучение на частоте ω_4 не зависит от $I_{10,20}$ и определяется только соотношениями между константами нелинейной связи $\gamma_{1,2}$ и частотами взаимодействующих волн. Именно эти параметры определяют те доли, в которых поток энергии накачки перераспределяется между генерируемыми в нелинейной среде волнами $I_{1,2,4}$. В то же время наличие шумовых затравок на входе в нелинейную среду является обязательным, поскольку именно от $I_{10,20}$ зависит необходимая для реализации эффективного преобразования длина нелинейной среды, которая при $I_{10,20} \to 0$ стремится к бесконечности.

Отметим, что именно так ведут себя и решения, описывающие процесс обычной параметрической генерации на квадратичной нелинейности (т. е. процесс $\omega_3 \to \omega_1 + \omega_2$) [2], которые могут быть получены из приведенных нами выше выражений при $|\gamma_2|^2 \to 0$.

1. Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Phys. Rev. E*, **76** (4), 046611 (2007).
2. Armstrong J.A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P.S. *Phys. Rev.*, **127** (6), 1918 (1962); Ахманов С.А., Хохлов Р.В. *Проблемы нелинейной оптики* (М.: ВИНИТИ, 1964); Бломберген Н. *Нелинейная оптика* (М.: Мир, 1966); Цернике Ф., Мидвинтер Дж. *Прикладная нелинейная оптика* (М.: Мир, 1976); Шен И.Р. *Принципы нелинейной оптики* (М.: Наука, 1989).
3. Островский Л.А. *Письма в ЖЭТФ*, **5** (9), 331 (1967); Клышко Д.Н., Полковников Б.Н. *Квантовая электроника*, № 4, 81 (1973); Meredith G.R *J. Chem. Phys.*, **77** (12), 5863 (1982); Kobyakov A., Lederer F. *Phys. Rev. A*, **54** (4), 3455 (1996).
4. Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Phys. Rev. E*, **79** (2), 026605 (2009).
5. Aleksandrovski A.L., Chirkin A.S., Volkov V.V. *J. Rus. Laser Res.*, **18** (2), 101 (1997); Чиркин А.С., Волков В.В., Лаптев Г.Д., Морозов Е.Ю. *Квантовая электроника*, **30** (10), 847 (2000); Saltiel M.S., Sukhorukov A.A., Kivshar Yu.S. *Progress in Optics*, **47**, 1 (2005).
6. Somekh S., Yariv A. *Opt. Commun.*, **6** (3), 301 (1972); Yacoby Y., Aggarwal R.L., Lax B. *J. Appl. Phys.*, **44** (7), 3180 (1973); McMullen J.D. *J. Appl. Phys.*, **46** (7), 3076 (1975); Fejer M.M., Magel G.A., Jundt D.H., Byer R.L. *IEEE J. Quantum Electron.*, **28** (11), 2631 (1992).
7. Чиркин А.С., Волков В.В. *Квантовая электроника*, **25** (2), 101 (1998).
8. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний* (М.: Наука, 1981); Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. *Основы теории колебаний* (М.: Наука, 1978).
9. Petnikova V.M., Shuvalov V.V., Vysloukh V.A. *Phys. Rev. E*, **60** (1), 1009 (1999).
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1989); Кузнецов Д.С. *Специальные функции* (М.: Высшая школа, 1965).
11. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред.М.Абрамовица и И.Стиган* (М.: Наука, 1979, с. 385).