

Модель радиального распределения температуры газа в лазере на парах бромида меди

И.П.Илиев, С.Г.Гочева-Илиева

Предлагается аналитическая модель для расчета температуры буферного газа в поперечном сечении разрядной трубки лазера на парах бромида меди. Модель является обобщением предыдущих моделей, разработанных авторами. В предположении произвольного радиального распределения объемной электрической мощности по радиусу трубки получено общее решение квазистационарного уравнения теплопроводности при граничных условиях первого и второго рода. Рассмотрено применение модели на примере лазера на бромиде меди с длинами волн излучения 510.6 и 578.2 нм при различных специфических радиальных распределениях объемной мощности. Полученные результаты сравниваются с известными к настоящему времени температурными профилями. Обсуждены также условия применения данной модели для молекулярных лазеров.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, общее решение, лазер на парах бромида меди.

1. Введение

Одна из основных задач проектирования новых лазеров на парах металлов и их соединений состоит в предварительном определении температурного режима активной среды. Распределение температуры буферного газа в активном объеме является важной характеристикой лазера. Температура оказывает влияние на физический срок службы лазерной трубки, на снижение мощности лазерного излучения с течением времени и качество лазерного пучка. Хорошо известно, что при температуре, превышающей оптимальную, возникают термоионизационные процессы, ведущие к резкому повышению плотности тока в центре трубки. Газовый разряд сжимается в узкий шнур, что приводит к снижению мощности лазерной генерации и ухудшению модового состава лазерного излучения. Часто в центре лазерного пучка появляется черное пятно.

До сих пор для аналитического определения температуры газа в активном объеме лазера использовались следующие две формулы:

$$T_g(r) = \left[T_1^{m+1} + \frac{q_v(m+1)}{4\lambda_0} (R_1^2 - r^2) \right]^{1/(m+1)}, \quad (1)$$

$$T_g(r) = \left\{ T_1^{m+1} + \frac{(m+1)Q_1}{\lambda_0} \left[\frac{a}{4} (R_1^2 - r^2) + \frac{B}{9} (R_1^3 - r^3) + \frac{C}{16} (R_1^4 - r^4) + \frac{D}{25} (R_1^5 - r^5) \right] \right\}^{\frac{1}{m+1}}, \quad (2)$$

где R_1 – радиус трубки; $0 \leq r < R_1$; T_1 – температура стенки кварцевой трубки; q_v – объемная электрическая мощность, выделяемая в активной среде ($\text{Вт}/\text{м}^3$); λ_0 и m – константы, зависящие от рода газа; Q_1 – эффективная вводимая мощность (с учетом потерь).

Формула (1) получена при решении уравнения теплопроводности в предположении, что объемная мощность q_v постоянна, т.е. $q_v = \text{const}$ во всем активном объеме трубки. Эта упрощенная формула использовалась во многих работах для расчета температуры газа в кинетических моделях различных типов лазеров при задании постоянной температуры на стенке трубки [3–10]. Случай нелинейных граничных условий рассмотрен в [11].

Формула (2) получена в случае изменения объемной электрической мощности в трубке по закону

$$q_v(r) = Q_1 \left[J_0 \left(\frac{2.4r}{R_1} \right) \right]^2, \quad (3)$$

где $J_0(2.4r/R_1)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Поскольку с этой специальной функцией трудно работать, объемная мощность q_v предварительно аппроксимирована с помощью полинома третьей степени [2]:

$$q_v(r) = Q[a + b\beta r + c(\beta r)^2 + d(\beta r)^3], \quad (4)$$

где $a = 1.0044$, $b = -0.01768$, $c = -0.5657$, $d = 0.1668$ и $\beta = 2.4/R_1$.

В формуле (2) введены обозначения: $B = b\beta$, $C = c\beta^2$, $D = d\beta^3$ [2].

Сравнение решений (1) и (2) показало, что формула (2) более объективно отражает распределение температуры [2]. Это решение получено при задании $q_v(r)$ в виде (3) на основе самых общих теоретических предположений и не включает все типы возможных распределений. В зависимости от конкретных параметров системы накачки, типа рабочей среды, качества и технологии изготовления лазерной трубки (отсутствие примесей), а также от использованных материалов и условий эксплуатации могут

I.P.Iliev. Department of Physics, Technical University, Plovdiv, 25 Tzanko Dzhustabanov St., 4000 Plovdiv, Bulgaria; e-mail: iliev55@abv.bg
S.G.Gочева-Илиева. Department of Applied Mathematics and Modelling, Faculty of Mathematics and Informatics, Paisii Hilendarski University of Plovdiv, 24 Tzar Assen St., 4000 Plovdiv, Bulgaria; e-mail: snow@uni-plovdiv.bg, snegocheva@yahoo.com

Поступила в редакцию 3 августа 2009 г., после доработки – 10 января 2010 г.

иметь место другие распределения q_v , существенно отличающиеся от (3). При этом снова приходится решать уравнение теплопроводности.

Цель настоящей работы – получение общего решения уравнения теплопроводности в случае произвольного радиального распределения объемной мощности накачки $q_v(r)$ и исследование решений при некоторых специфических видах зависимости $q_v(r)$ на примере лазера на парах бромида меди. Исследование влияния температуры буферного газа на создание инверсной населенности и выходную мощность лазера является отдельной экспериментальной и теоретической задачей и в этой работе остается вне рассмотрения. Задача такого типа рассмотрена, например, в [12] для случая электроразрядных CO₂-лазеров.

Предлагаемая здесь модель является самостоятельной замкнутой теплотехнической задачей и может использоваться для сравнительного анализа на стадии планирования эксперимента. В процессе компьютерного моделирования при изменении геометрических параметров и материала трубки, термоизоляции, электрической мощности и условий эксплуатации можно определить основные тенденции изменения температурного профиля, а следовательно, и наиболее подходящие значения параметров с целью сокращения затрат на экспериментальные исследования.

2. Математическая модель и нахождение общего решения задачи

Распределение температуры буферного газа T_g в поперечном сечении лазерной трубки определяется в результате решения стационарного уравнения теплопроводности

$$\operatorname{div}(\lambda_g \operatorname{grad} T_g) + q_v = 0, \quad (5)$$

где λ_g – коэффициент теплопроводности буферного газа ($\text{Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$). Предположим, что в общем случае объемная плотность выделяемой мощности q_v является функцией радиуса r , т. е. $q_v = q_v(r)$.

Для простоты примем граничные условия первого и второго рода в виде

$$T_g(R_1) = T_1, \quad (6)$$

$$\left. \frac{dT_g}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (7)$$

Граничное условие (6) означает, что температура T_1 внутренней стенки лазерной трубки известна. Граничное условие (7) указывает на наличие осевой симметрии распределения температуры в активной среде.

При решении (5)–(7) исходим из обычного представления коэффициента теплопроводности:

$$\lambda_g = \lambda_0 T_g^m, \quad (8)$$

где λ_0 и m – константы, зависящие от рода буферного газа (для лазера на парах бромида меди это газовая смесь неона и водорода, см. табл.1).

Введем функцию $U(R)$:

$$U(R) = T_g^{m+1}. \quad (9)$$

При этом (5)–(7) сводятся к виду

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} + q_v(r) \frac{(m+1)}{\lambda_0} = 0, \quad (10)$$

$$U(R_1) = T_1^{m+1}, \quad \left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (11)$$

Умножаем обе стороны уравнения (10) на r^2 и получаем следующее уравнение эйлераго типа:

$$\frac{r^2 d^2 U}{dr^2} + r \frac{dU}{dr} = -r^2 q_v(r) \frac{(m+1)}{\lambda_0}.$$

Введя новую независимую переменную τ , с помощью подстановки $r = e^\tau$ преобразуем (10), (11) к виду

$$\frac{d^2 U}{d\tau^2} = -e^{2\tau} q_v(e^\tau) \frac{(m+1)}{\lambda_0}, \quad (12)$$

$$U|_{\tau=\ln R_1} = T_1^{m+1}, \quad \frac{dU}{dr} = o[e^\tau], \tau \rightarrow -\infty, \quad (13)$$

где o – символ Ландау.

После двойного интегрирования уравнения (12), с учетом граничных условий (13) и возвращаясь к переменной r , получаем формулу

$$U(r) = T_1^{m+1} - \frac{(m+1)}{\lambda_0} \int_{\ln R_1}^{\ln r} dy \int_{-\infty}^y e^{2t} q_v(e^t) dt. \quad (14)$$

С помощью (9) находим искомое общее решение рассматриваемой задачи:

$$T_g(r) = \left[T_1^{m+1} - \frac{(m+1)}{\lambda_0} \int_{\ln R_1}^{\ln r} dy \int_{-\infty}^y e^{2t} q_v(e^t) dt \right]^{\frac{1}{m+1}}, \quad (15)$$

$$0 \leq r < R_1.$$

В случае произвольного вида функции $q_v(r)$ предпочтительно проводить символьные или численные вычисления при помощи специализированного математического обеспечения, такого как Mathematica, Matlab и другие [13, 14].

3. Применение полученного решения на примере лазера на парах бромида меди

Поскольку мы не располагаем надежными экспериментальными данными для описания конкретных распределений $q_v(r)$, рассмотрим применение решения (15) на примере некоторых модельных распределений.

3.1. Определение температуры газа для специфических распределений объемной мощности

В этом разделе приведен расчет температуры газа при различных радиальных распределениях объемной плотности выделяемой мощности $q_v(r)$. Рассмотрены два типа качественно различных разрядов (рис.1). Кривая 2 соответствует случаю спокойного разряда, а кривая 3 – разряду, сосредоточенному в центре лазерной трубки и имеющему точку перегиба. В некоторых случаях при наличии распределения типа 3 возможны сильная деформация разряда, сжатие его в шнур, возникновение термо-

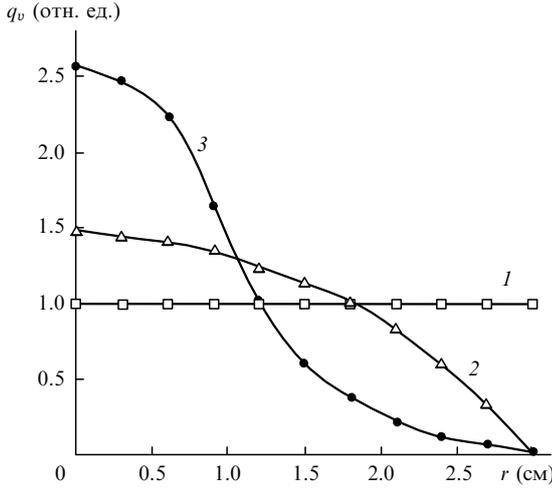


Рис.1. Распределение объемной плотности выделяемой мощности в поперечном сечении лазерной трубки: □ – кривая 1, $q_v(r) = q_0 = \text{const}$; \triangle – кривая 2, $q_v(r) = q_{v,2}(r) = K_1 q_0(a + br^2)$ (формула (16)); \bullet – кривая 3, $q_v(r) = q_{v,3}(r) = K_2 q_0(n + pr^2 + sr^3)$ (формула (17)).

ионизационной неустойчивости и другие негативные явления. Для сравнения на рис.1 дано также распределение при $q_v(r) = q_0 = \text{const}$, где условно принято, что $q_0 = 1$. Все кривые построены при одинаковом значении вводимой в лазерную трубку мощности (площади, ограниченные каждой из кривых и осью Ox , равны).

Зависимости 2 и 3 можно представить в виде полиномов второй и третьей степени соответственно:

$$q_{v,2}(r) = K_1 q_0(a + br^2), \tag{16}$$

$$q_{v,3}(r) = K_2 q_0(n + pr^2 + sr^3), \tag{17}$$

где

$$K_1 = 1.4383, a = 1.0183471, b = -0.001077; \tag{18}$$

$$K_2 = 2.57365, n = 0.966892, \tag{19}$$

$$p = -0.47399, s = 0.1249822.$$

Коэффициенты (18), (19) получены методом наименьших квадратов. Подставляя (16) и (17) в общее решение (15), после интегрирования получаем соответствующие формулы распределения температуры газа:

$$T_{g,2}(r) = \left[T_1^{m+1} - \frac{(m+1)K_1 q_0 (r^2 - R_1^2)(4a + br^2 + bR_1^2)}{16\lambda_0} \right]^{\frac{1}{m+1}}, \tag{20}$$

$$T_{g,3}(r) = \left[T_1^{m+1} - \frac{(m+1)K_2 q_0 [100n(r^2 - R_1^2) + 25(r^4 - R_1^4) + 16s(r^5 - R_1^5)]}{400\lambda_0} \right]^{\frac{1}{m+1}}. \tag{21}$$

3.2. Исследование температуры газа в активной среде лазера на парах бромида меди

Рассмотрим лазер на парах бромида меди [15], для которого ранее были выведены и исследованы формулы (1), (2) [2, 11].

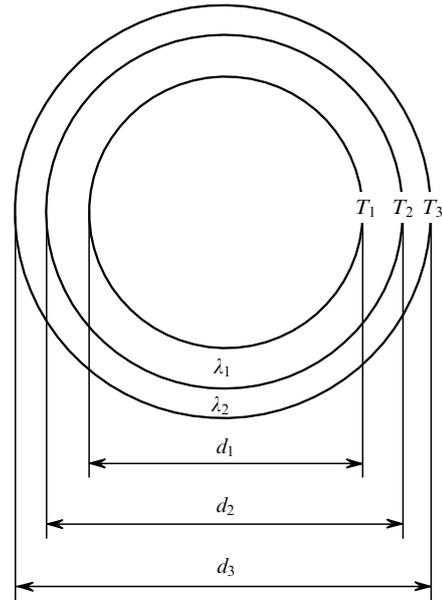


Рис.2. Поперечное сечение лазерной трубки в активной области в случае лазера на бромиде меди. Внутренний диаметр кварцевой трубки $d_1 = 60$ мм, внешний диаметр $d_2 = 64$ мм, внешний диаметр теплоизоляционного покрытия $d_3 = 74$ мм.

Общая потребляемая электрическая мощность лазера 5 кВт. С учетом потерь в системе питания в активный объем поступает мощность $Q = 4080$ Вт. При этом выходная мощность лазера составляет 120 Вт. Геометрические размеры лазера приведены на рис.2. Лазерная трубка изготовлена из кварца и в области активного объема покрыта сверху изоляционным материалом из стеклянной ваты, минеральной ваты или диоксида циркония. Объемная плотность вводимой мощности $q_v = 0.7219$ Вт/см³. Инертный газ состоит из смеси Ne (15 Тор) и H₂ (0.3 Тор). В данном случае коэффициент теплопроводности представляется в виде (8), где $\lambda_0 = 5.8935 \times 10^{-5}$, $m = 1.091$.

Моделирование температурного профиля проводится при следующих предположениях: 1) температурный профиль разряда определяется в квазистационарном режиме работы лазера; 2) температура газа между импульсами меняется незначительно; 3) вся поступающая в активный объем электрическая мощность (4080 Вт) трансформируется в нем в тепловую энергию; 4) мощность, передающаяся стенкам трубки в результате эмиссии разряда и дезактивации на них возбужденных и заряженных частиц, не учитывается.

Третье предположение вводится из-за специфики рассматриваемого типа лазеров. Известно, что атомные и ионные лазеры характеризуются относительно малым КПД вследствие того, что лазерные переходы происходят между высоковозбужденными уровнями атомов или ионов. При входной электрической мощности 4080 Вт, вводимой в активный объем разряда, соответствующая выходная лазерная мощность составляет 120 Вт, что дает КПД около 3%. Возбуждение верхних лазерных уровней с энергией 3.8 эВ возможно прямым электронным ударом в соответствии со схемой $\text{Cu}(^2S_{1/2}) + e \rightarrow \text{Cu}^*(^2P_{1/2}, ^2P_{3/2}) + e$ [16]. При этом их заселение за счет тепловой энергии буферного газа невозможно.

Последнее предположение сделано на основе свойств и энергетической диаграммы буферного одноатомного

газа (неона). Поскольку энергии его долгоживущих возбужденных s-уровней ($3s_2$ и $2s_2$) составляют ~ 20 эВ, то они слабо заселяются в плазме данного типа разряда с энергией электронов $3-4$ эВ [16]. Поэтому в данном случае существенно заселены только нижние метастабильные лазерные уровни атома меди, которые релаксируют главным образом при столкновениях с электронами: $\text{Cu}(^2D_{3/2}, ^2D_{5/2}) + e \rightarrow \text{Cu}(^2S_{1/2}) + e$ [16]. Таким образом, энергия остается в объеме разряда. При этом интенсивность спонтанного излучения плазмы разряда мала, и его влиянием можно пренебречь.

Для решения уравнения (5), кроме граничных условий (6) и (7), внутри кварцевой трубки будем использовать также смешанные граничные условия третьего и четвертого рода для радиального потока тепла через стенку трубки, которые в цилиндрических координатах имеют вид [17]:

$$T_1 = T_2 + \frac{q_l \ln(d_2/d_1)}{2\pi\lambda_1}, T_2 = T_3 + \frac{q_l \ln(d_3/d_2)}{2\pi\lambda_2}, \quad (22)$$

$$Q_1 = \alpha F_3(T_3 - T_0) + F_3 \varepsilon c \left[\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_0}{100} \right)^4 \right]. \quad (23)$$

Здесь T_1, T_2, T_3 – температуры на стенках трубки и теплоизоляционного покрытия (см. рис.2); $q_l = Q_1/l_a$ – выделяемая тепловая мощность на единицу длины; $l_a = 2$ м – активная длина лазера; λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности кварцевой трубки и теплоизоляции соответственно; $d_{1,2,3}$ – диаметры трубки; $Q_1 = 4080$ Вт – тепловой поток, равный потребляемой электрической мощности (согласно третьему предположению); α – коэффициент теплопередачи от внешней поверхности теплоизоляции к окружающей среде; F_3 – площадь внешней поверхности теплоизоляционного покрытия трубки в области активной зоны; $c = 5.67 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-4}$ – коэффициент излучения абсолютно черного тела; $T_0 = 300$ К – температура воздуха; ε – интегральная излучательная способность внешней поверхности трубки (теплоизоляционного покрытия). Значения использованных при расчете параметров даны в табл.1.

Для применения полученных решений (20) и (21) необходимо задать температуру T_1 . Возможны два случая.

1. Известна температура T_2 внешней стенки кварцевой трубки (под изоляцией). Для реально существующих лазеров она может быть измерена, например, при помощи термопары. Далее из первого равенства в (22) можно вычислить T_1 .

2. Температуры T_2 и T_3 неизвестны. Такая ситуация имеет место при разработке новых лазеров данного типа. В этом случае можно применить граничное условие (23), где задается температура окружающей среды (чаще всего используется значение $T_0 = 300$ К). Также можно задать новые значения геометрических и других параметров. Неизвестной является величина T_3 . Она определяется из нелинейного уравнения (23), после чего из (22) последо-

Табл.2. Температуры, рассчитанные с помощью формул (1), (20) и (21).

| r (см) | T_g (К) | | |
|----------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| | расчет по формуле (1) | расчет по формуле (20) | расчет по формуле (21) |
| 0.0 | 1967 | 2047 | 2059 |
| 0.6 | 1939 | 2009 | 1994 |
| 1.2 | 1851 | 1889 | 1841 |
| 1.8 | 1694 | 1689 | 1568 |
| 2.4 | 1442 | 1403 | 1265 |
| 3.0 | 1020 | 1020 | 1020 |

Табл.3. Температуры, рассчитанные с помощью формул (20) и (2).

| r (см) | T_g (К) | |
|----------|------------------------|-----------------------|
| | расчет по формуле (20) | расчет по формуле (2) |
| 0 | 2047 | 2070 |
| 0.5 | 2019 | 2031 |
| 1.0 | 1937 | 1919 |
| 1.5 | 1799 | 1746 |
| 2.0 | 1603 | 1528 |
| 2.5 | 1346 | 1283 |
| 3.0 | 1020 | 1020 |

вательно находятся T_2 и T_1 . В работе [2] подробно рассмотрен второй случай и для естественной конвекции получено $T_1 = 1020$ К. Это значение использовано в дальнейших расчетах.

Полученные профили распределений температур даны в табл.2. Видно, что распределения температур, рассчитанные по формулам (20) и (21), близки между собой. Их максимальная относительная разность в центральной части трубки не превышает 2.4 %.

В табл.3 приведены распределения температур по радиусу r , полученные из формул (20) и (2). Из табл.3 следует, что в центре трубки относительная разность температур составляет не более 2 %.

Проведенные расчеты показывают, что для различных типов радиальных распределений $q_v(r)$ соответствующие формулы для $T_g(r)$ в центре трубки дают отличие результатов в пределах 3 %. Для $q_v(r) \neq \text{const}$ самое простое представление получается с помощью полинома второй степени из формулы (16). Соответствующее ему решение (20) является самым простым и в то же время самым удобным для расчетов.

Таким образом, можно сделать основной вывод, что формула (20) имеет некоторую универсальность. Ее можно успешно использовать для определения температур с достаточной точностью для всех типов распределений $q_v(r)$ в подобных лазерах.

3.3. Применение разработанной модели для определения температуры газа в случае молекулярных лазеров

Первостепенной задачей при определении температуры газа в молекулярных лазерах (в том числе и в CO_2 -

Табл.1. Данные, использованные для расчета температурного профиля [11].

| Q_1 (Вт) | l_a (м) | q_v (Вт·см ⁻³) | q_l (Вт·м ⁻¹) | $\lambda_g = \lambda_0 T_g^m$ (Вт·м ⁻¹ ·К ⁻¹) | λ_1 (Вт·м ⁻¹ ·К ⁻¹) | λ_2 (Вт·м ⁻¹ ·К ⁻¹) | ε |
|------------|-----------|------------------------------|-----------------------------|--|--|--|---------------|
| 4080 | 2 | 0.7219 | 2040 | $\lambda_0 = 5.8935 \times 10^{-5}$ ($m = 1.091, p_{\text{Ne}} = 15 \text{ Тор}, p_{\text{H}_2} = 0.3 \text{ Тор}$) | 1.96 ($T = 800 - 1100 \text{ К}$) | 0.12 ($T = 800 - 1100 \text{ К}$, минеральная вата) | 0.72 |

лазерах) является нахождение относительной части вложенной в разряд электрической мощности Q_2 , которая идет на прямой нагрев нейтрального газа: $Q_2 = \eta Q_1$. В молекулярном газе основная часть энергии, полученной от электронов, предназначена для возбуждения колебательных уровней молекул, после чего в результате колебательных релаксаций она переходит в тепло. Часть энергии может уходить из объема разряда к стенкам за счет диффузии колебательно возбужденных молекул, а также в виде лазерного излучения, вкладом которого не всегда можно пренебречь, поскольку для некоторых типов CO_2 -лазеров КПД достигает 30 %.

Определение достоверных значений коэффициента η для некоторых типов разрядов может оказаться сложной задачей. В частности, для азота η может достигать 0.5 [18].

Предлагаемую в данной работе модель можно применять для молекулярных лазеров после определения η .

4. Заключение

Получено общее решение уравнения теплопроводности в случае произвольного радиального распределения объемной плотности вкладываемой в разряд мощности $q_v = q_v(r)$. Для случаев отсутствия надежных данных о виде распределения объемной электрической мощности рассмотрены два специфических типа распределений $q_v = q_v(r)$. С помощью общего решения уравнения теплопроводности для этих распределений при различных нелинейных граничных условиях третьего и четвертого рода вычислены соответствующие температурные профили для лазера на парах бромида меди. Установлено, что хотя эти профили различаются, значения температуры газа в центре трубки одинаковы с точностью до 2 % – 3 %. Поэтому рекомендуется использовать распределение объемной мощности в виде полинома второй степени и соответствующее ему решение граничной задачи для уравнения теплопроводности.

Важным преимуществом предлагаемого общего решения задачи по расчету температуры газа является возможность задавать произвольные распределения объемной плотности вводимой в разряд мощности и получать формулы для распределений температуры газа. Другое преимущество – это возможность задавать различные геометрические параметры, температуру окружающей

среды, температуры стенки лазерной трубки, а также другие параметры, что удобно при компьютерных расчетах газовой температуры как элемента более общих кинетических и других моделей для оценки характеристик существующих и создаваемых новых лазерных источников.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФНИ Болгарского министерства образования и науки, проект ВУ-МИ-205/2006, и НПД Пловдивского университета им. Паисия Хилендарского, проект РС09-ФМИ-013. Авторы благодарны также Г.Паскалеву за оказанную помощь при оформлении результатов.

1. Kushner M.J., Warner B.E. *J. Appl. Phys.*, **54**, 2970 (1983).
2. Илиев И.П., Гочева-Илиева С.Г., Саботинов Н.В. *Квантовая электроника*, **39**, 425 (2009).
3. Шиянов Д.В., Евтушенко Г.С., Суханов В.Б., Федоров В.Ф. *Квантовая электроника*, **37**, 49 (2007).
4. Бойченко А.М., Евтушенко Г.С., Жданев О.В., Яковленко С.И. *Квантовая электроника*, **33**, 1047 (2003).
5. Astadjov D.N., Vuchkov N.K., Sabotinov N.V. *IEEE J. Quantum Electron.*, **24**, 1926 (1988).
6. Carman R.J., Brown D.J.W., Piper A. *IEEE J. Quantum Electron.*, **30**, 1876 (1994).
7. Carman R.J., Mildren R.P., Withford M.J., Brown D. J.W., Piper J.A. *IEEE J. Quantum Electron.*, **36**, 438 (2000).
8. Boley C.D., Molander W.A., Warner B.E. *Computational model of copper laser* (Livermore, CA: University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, 1997); <http://www.osti.gov/bridge/servlets/purl/641350-pLlroW/webviewable/641350.pdf>.
9. Ghani B. A., Hammadi M. *Opt. Laser Technol.*, **38**, 67 (2006).
10. Pan B. L., Chen G., Mao B. N., Yao Z. X. *Opt. Express*, **14**, 8644 (2006).
11. Илиев И.П., Гочева-Илиева С.Г., Саботинов Н.В. *Квантовая электроника*, **38**, 338 (2008).
12. Невдах В.В. *Квантовая электроника*, **31**, 525 (2001).
13. <http://www.computerbooks.ru/books/Mathematic/Book-Matematica/>; <http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html>.
14. <http://www.computerbooks.ru/books/Mathematic/Book-Matlab/index.html>; <http://www.mathworks.com/products/matlab/tryit.html>.
15. Astadjov D.N., Dimitrov K.D., Jones D.R., Kirkov V.K., Little C.E., Sabotinov N.V., Vuchkov N.K. *IEEE J. Quantum Electron.*, **33**, 705 (1997).
16. Sabotinov N.V., in *Metal Vapor Lasers*. Ed. by M.Endo, R.F.Walter (Boca Raton: CRC Press, 2006, pp. 449–494).
17. Özisik M.N. *Heat Transfer. A Basic Approach* (Boston: McGraw-Hill, 1985).
18. Райзер Ю.П. *Физика газового разряда* (М.: Наука, 1992).