

Генерация гармоник при смещении s-поляризованной волны и греющей металл волны

С.Г.Бежанов, С.А.Урюпин

Показано, что при смещении s-поляризованной волны с волной той же частоты, падающей по нормали на поверхность металла, происходит генерация трех волн на удвоенной частоте. Две из них р-поляризованные, а одна s-поляризованная. Дано количественное описание влияния эволюции температур электронов и решетки на эффективность ГВГ. Выявлено аномально сильное изменение эффективности генерации s-поляризованной гармоники при изменении температур, приводящем к существенному изменению частоты столкновений электронов.

Ключевые слова: генерация второй гармоники, смещение волн, фемтосекундный импульс, нагрев электронов металла.

1. Введение

Исследованию ГВГ электронами металла посвящено значительное число работ (см., напр., [1 – 15]). В металлах генерация гармоник происходит в сравнительно узком скин-слое, поэтому коэффициент преобразования излучения с частотой ω в излучение на частоте 2ω весьма мал. Вместе с тем при простейшем описании в рамках теории возмущений плотность потока излучения второй гармоники пропорциональна квадрату плотности потока излучения на основной частоте ω . В связи с этим для достижения заметного эффекта ГВГ желательно использовать излучение достаточно большой интенсивности, не приводящее, однако, к разрушению поверхности самого металла. Получить такое излучение можно с помощью лазерных импульсов фемтосекундной длительности. При использовании ультракоротких лазерных импульсов уже при умеренной плотности потока излучения основной волны ГВГ сопровождается нагревом электронов, приводящим к изменению эффективности генерации. Необходимость учета нагрева электронов и решетки при изучении ГВГ продемонстрирована в [7, 9, 11 – 15]. Нагрев металла сопровождается значительным увеличением частот электрон-электронных и электрон-фононных столкновений. В условиях эффективной ГВГ частоты столкновений электронов могут быть сравнимы с частотой излучения и даже превышать ее. Теоретическое описание ГВГ, пригодное при относительно больших частотах столкновений электронов, предложено в [15]. Оно основано на совместном решении уравнений Максвелла, уравнений для плотности и средней скорости электронов, а также уравнений для температур электронов и решетки. В [15] дано описание влияния нагрева металла на эффективность ГВГ s-поляризованной волны.

В развитие подхода [15] в настоящей работе излагается основанная на тех же уравнениях теория ГВГ в ус-

ловиях смещения s-поляризованной волны и падающей нормально на поверхность металла греющей волны с той же частотой. Показано, что при смещении этих волн генерируются три волны с частотой 2ω : две р-поляризованные гармоники и одна s-поляризованная. Одна из р-поляризованных гармоник излучается в направлении отражения s-поляризованной волны с частотой ω . Эта гармоника возникает из-за генерации нелинейного тока падающей s-поляризованной волной. Вторая р-поляризованная гармоника генерируется при смещении s-поляризованной волны и греющей металл волны. Она излучается под углом к поверхности металла, превышающим угол, под которым отражается исходная s-поляризованная волна. Под таким же углом излучается еще одна вторая гармоника, возникающая при смещении тех же волн, но s-поляризованная. Такая гармоника возникает только при учете столкновений электронов, приводящих к снятию в рассматриваемых условиях ss-запрета – генерации лишь р-поляризованной второй гармоники при воздействии на поверхность металла s-поляризованной волной (см., напр., [10]).

Ниже показано, как нагрев электронов из-за поглощения падающей нормально на металл волны влияет на эффективность генерации всех трех гармоник. Описаны такие условия, в которых повышение температуры электронов или решетки приводит к относительно небольшому снижению эффективности генерации р-поляризованных гармоник, а охлаждение электронов из-за выноса тепла в глубь металла ведет к увеличению их генерации. Напротив, влияние нагрева и последующего охлаждения металла на генерацию s-поляризованной гармоники достаточно велико и сопровождается изменением эффективности ее генерации почти на порядок. Последнее свойство делает эту гармонику удобным инструментом для экспериментального изучения частот столкновений электронов в термодинамически неравновесном металле.

2. Модельное описание металла

Для описания динамики электронов проводимости металла воспользуемся уравнением движения вида

С.Г.Бежанов, С.А.Урюпин. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 11991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: urypin@sci.lebedev.ru

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{nm}\nabla p - v\mathbf{u} + \frac{e}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}\mathbf{B}]\right), \quad (1)$$

где n – плотность электронов проводимости; \mathbf{u} – скорость их направленного движения; e и m – заряд и масса, обычно близкие к их значениям для свободного электрона; c – скорость света; $p = p(n, T)$ – давление электронов; T – их температура; $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ – электрическое и магнитное поля в металле; $v = v(n, T, T_{\text{lat}})$ – характерная частота столкновений электронов, зависящая от n , T и температуры решетки T_{lat} . Считая несущественными столкновения электронов с примесями, частоту v представим в виде суммы частот столкновений электронов с фононами (v_{eph}) и друг с другом (v_{ee}): $v = v_{\text{eph}} + v_{\text{ee}}$. Если распределение электронов сильно вырождено, а T_{lat} больше температуры Дебая Θ_D , то для v возможна аппроксимация [16, 17]:

$$v = v_{\text{eph}}(T_0)\frac{T_{\text{lat}}}{T_0} + a\frac{k_B^2 T^2}{\hbar \varepsilon_F}, \quad (2)$$

где k_B – постоянная Больцмана; \hbar – постоянная Планка; T_0 – исходная температура металла в равновесном состоянии; ε_F – энергия Ферми; a – численный множитель, величина которого зависит от вида зонной структуры металла.

Электрическое и магнитное поля в металле описываются уравнениями Максвелла

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\text{rot}\mathbf{B} = \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{enu}, \quad (4)$$

где ε_0 – статическая диэлектрическая проницаемость, обусловленная связанными электронами и решеткой.

Столкновения электронов приводят к их нагреву и диссипации энергии электромагнитного поля. Мощность поглощения определяется величиной джоуля тепла $Q = \mathbf{jE} = \mathbf{enuE}$, выделяемого в единицу времени в единице объема. Обусловленный поглощением поля неоднородный нагрев электронов сопровождается переносом тепла и охлаждением электронов из-за передачи энергии решетке. Учитывающее эти процессы уравнение для температуры электронов имеет следующий вид [18, 19]:

$$C_e \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\lambda \nabla T) = Q - G(T - T_{\text{lat}}), \quad (5)$$

где $C_e = \pi^2 k_B^2 n T / 2 \varepsilon_F$ – теплоемкость электронов; G – константа связи электронов с решеткой. В (5) коэффициент теплопроводности имеет вид $\lambda = C_e v_F^2 / 3 v_\lambda$, где v_F – скорость Ферми; v_λ – частота столкновений электронов, определяющая процесс теплопроводности. Эффективные частоты электрон-фононных и электрон-электронных столкновений, входящие в $v_\lambda = v_{\text{eph},\lambda} + v_{\text{ee},\lambda}$, отличаются по величине от тех, которые определяют проводимость, но имеют ту же зависимость от температур решетки и электронов:

$$v_\lambda = v_{\text{eph},\lambda}(T_0)\frac{T_{\text{lat}}}{T_0} + b\frac{k_B^2 T^2}{\hbar \varepsilon_F}, \quad (6)$$

где $b \neq a$. Наконец, изменение температуры решетки описывается уравнением

$$C_{\text{lat}} \frac{\partial T_{\text{lat}}}{\partial t} = G(T - T_{\text{lat}}), \quad (7)$$

где $C_{\text{lat}} \simeq 3k_B N$ – теплоемкость решетки при $T_{\text{lat}} > \Theta_D$; N – плотность атомов решетки. Приведенные уравнения составляют основу описания свойств неравновесного металла в электромагнитном поле при температурах, больших температуры Дебая. При этом температура решетки считается малой по сравнению с температурой плавления, а температура электронов предполагается малой по сравнению с температурой вырождения.

3. Проникновение поля в металл

Рассмотрим взаимодействие s-поляризованной электромагнитной волны с металлом, занимающим полупространство $z > 0$. Поле волны представим в виде

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}_{\text{las}} \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}_{\text{las}}\mathbf{r}) + \text{компл. сопр.}, \quad (8)$$

где $\mathbf{E}_{\text{las}} = (0, E_{\text{las}}, 0)$; E_{las} – медленно изменяющаяся за время $2\pi/\omega$ амплитуда напряженности электрического поля; ω – частота; $\mathbf{k}_{\text{las}} = (k_x, 0, k_z)$ – волновой вектор. Принимая во внимание медленность изменения во времени амплитуды поля падающей волны (8), решение уравнений (1)–(7) естественно искать в виде

$$A = A_0 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} [A_s \exp(-is\omega t) + \text{компл. сопр.}], \quad (9)$$

где A обозначает n , T , T_{lat} либо одну из компонент векторов \mathbf{u} , \mathbf{E} или \mathbf{B} . В формуле (9) функции A_0 и A_s зависят от x и z и медленно изменяются во времени,

$$\left| \frac{\partial \ln A_0}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial \ln A_s}{\partial t} \right| \ll s\omega, \quad s = 1, 2, \dots \quad (10)$$

С учетом этого неравенства и в соответствии с формулой (8) для магнитного поля падающей волны из уравнения (3) имеем

$$\frac{1}{2} \mathbf{B}_{\text{las}} \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}_{\text{las}}\mathbf{r}) + \text{компл. сопр.}, \quad (11)$$

$$\mathbf{B}_{\text{las}} = (-k_z, 0, k_x) \frac{c}{\omega} E_{\text{las}}.$$

Считая, что характерная скорость электронов в поле мала по сравнению с их тепловой скоростью, далее ограничимся рассмотрением приближенного решения уравнений (1)–(7) с точностью до слагаемых, квадратичных по напряженности поля. В таком приближении в разложении (9) достаточно удержать лишь слагаемые с $s \leq 2$. При этом, интересуясь изменением величин на частоте ω , можно не учитывать квадратичные по полю возмущения температуры и плотности электронов, а также обусловленные ими возмущения давления p и частоты v . В рассматриваемом приближении для гармоник с $s = 1$ имеем систему линейных уравнений. В линейном приближении по внешнему полю поле в металле можно представить в виде

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}_1 \exp(-i\omega t) + \text{компл. сопр.}, \quad (12)$$

$$\mathbf{E}_1 = (0, E_1(z), 0) \exp(ik_x x).$$

Отсюда следует, что $\text{div} \mathbf{E}_1 = 4\pi e n_1 = 0$, т. е. $n_1 = 0$, а также $p_1 = 0$ и $v_1 = 0$. В итоге с учетом неравенства (10) из линеаризованного уравнения (1) находим

$$\mathbf{u}_1 = \frac{e}{m} \mathbf{E}_1 \frac{i}{\omega + iv_0}, \quad (13)$$

где v_0 зависит от n_0 и T_0 – медленно изменяющихся во времени плотности и температуры электронов. Имея в виду неравенство (10) и соотношение (13), из (3) и (4) получаем уравнение для функции $E_1(z)$:

$$\frac{d^2 E_1(z)}{dz^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k_x^2 \right] E_1(z) = 0, \quad (14)$$

где

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{\omega(\omega + iv_0)} \quad (15)$$

– диэлектрическая проницаемость металла на частоте ω ; $\omega_{\text{pl}} = (4\pi e^2 n_0 / m)^{1/2}$ – плазменная частота электронов. При $\omega_{\text{pl}}^2 > (\omega^2 + v_0^2)\varepsilon_0$ убывающее в глубь металла решение уравнения (14) имеет вид

$$E_1(z) = E_1(0) \exp[-\kappa(\omega, k_x)z], \quad (16)$$

где

$$\kappa(\omega, k_x) = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2}} = \kappa_1(\omega, k_x) - i\kappa_2(\omega, k_x); \quad (17)$$

$$\kappa_l(\omega, k_x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\left[\frac{\omega^2 \varepsilon_1(\omega)}{c^2} - k_x^2 \right]^2 + \left[\frac{\omega^2 \varepsilon_2(\omega)}{c^2} \right]^2} - (-1)^l \left| \frac{\omega^2 \varepsilon_1(\omega)}{c^2} - k_x^2 \right| \right\}^{1/2}, \quad l = 1, 2. \quad (18)$$

Решение вида (16) имеет место, если изменением $\varepsilon(\omega)$ на масштабах $\sim \kappa_l^{-1}(\omega)$ можно пренебречь (подробнее см. [20, 21]). Используя неравенство (10) и формулы (12), (16), из уравнения (3) находим магнитное поле в металле:

$$\frac{1}{2} \mathbf{B}_1 \exp(-i\omega t) + \text{компл. сопр.}, \quad (19)$$

$$\mathbf{B}_1 = (-i\kappa(\omega, k_x), 0, k_x) \frac{c}{\omega} E_1(z) \exp(ik_x x).$$

Падающая на металл волна частично отражается от него. В рассматриваемых условиях электрическое и магнитное поля отраженной волны представим в виде

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}^r \exp(-i\omega t + ik_x x - ik_z z) + \text{компл. сопр.}, \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{B}^r \exp(-i\omega t + ik_x x - ik_z z) + \text{компл. сопр.},$$

$$\mathbf{E}^r = E_{\text{las}} R_s(\omega, \mathbf{k}), \quad \mathbf{B}^r = (k_z, 0, k_x) \frac{c}{\omega} E_{\text{las}} R_s(\omega, \mathbf{k}), \quad (21)$$

где $R_s(\omega, \mathbf{k})$ – комплексный коэффициент отражения s-волны, имеющей частоту ω и распространяющейся в направлении вектора \mathbf{k} . Согласно определению

$$E_1(0) = F_s(\omega, \mathbf{k}) E_{\text{las}} \quad (22)$$

введем в рассмотрение и комплексный коэффициент проникновения s-волны $F_s(\omega, \mathbf{k})$. Из условия непрерывности тангенциальных компонент электрического поля имеем связь $F_s(\omega, \mathbf{k}) = 1 + R_s(\omega, \mathbf{k})$. С учетом непрерывности тангенциальной компоненты магнитного поля из (8), (11), (12), (16) и (19)–(22) находим явное выражение для коэффициента проникновения s-волны:

$$F_s(\omega, \mathbf{k}) = \frac{2k_z}{k_z + i\kappa(\omega, k_x)}. \quad (23)$$

Соотношения (12), (19) и (22), (23) полностью определяют поле в металле на частоте ω .

Описанные выше закономерности проникновения и отражения s-волны позволяют записать поле в металле и в более общем случае, когда вместе с s-волной на него воздействует падающая нормально вторая волна. Примем, что суммарное поле двух волн имеет вид

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}_{\text{las}} \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}_{\text{las}} \mathbf{r}) + \frac{1}{2} \mathbf{E}_p \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}_p \mathbf{r}) + \text{компл. сопр.}, \quad (24)$$

где $\mathbf{E}_p = (E_p \cos \phi, E_p \sin \phi, 0)$; $\mathbf{E}_{\text{las}} = (0, E_{\text{las}}, 0)$; $\mathbf{k}_{\text{las}} = (k \sin \theta, 0, k \cos \theta)$; $\mathbf{k}_p = (0, 0, k)$. Тогда в линейном приближении по интенсивности воздействующих волн, в соответствии с изложенным выше, из (3), (12), (16) и (22) для электромагнитного поля в металле имеем

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}(\mathbf{k}_{\text{las}}) + \mathbf{E}(\mathbf{k}_p), \quad \mathbf{B}_1 = -i \frac{c}{\omega} \text{rot} \mathbf{E}_1, \quad (25)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}_{\text{las}}) = F_s(\omega, \mathbf{k}_{\text{las}}) E_{\text{las}} \exp[ik_x \sin \theta - \kappa(\omega, k \sin \theta)z],$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}_p) = F_s(\omega, \mathbf{k}_p) E_p \exp[-\kappa(\omega, 0)z]. \quad (26)$$

Эти соотношения составляют основу расчета нелинейного тока в металле.

4. Нелинейный ток и восприимчивость

Рассмотрим динамику электронов на частоте второй гармоники 2ω , используя уравнение движения (1). В соответствии с неравенством (10) при описании осциллирующий электронов с частотой 2ω можно пренебречь производной по времени $|\partial \ln u_2 / \partial t|$. Кроме того, в обсуждаемых нами условиях нормального и высокочастотного скин-эффекта можно не учитывать малое влияние ∇p_2 . С учетом этих упрощений, используя соотношение (9), из уравнения (1) имеем

$$(v_0 - 2i\omega) \mathbf{u}_2 = \frac{c}{m} \mathbf{E}_2 + \frac{e}{2mc} [\mathbf{u}_1 \mathbf{B}_1] - \frac{1}{2} (\mathbf{u}_1 \nabla) \mathbf{u}_1. \quad (27)$$

Принимая во внимание соотношения (13) и (25), из (27) находим медленную огибающую плотности тока на частоте второй гармоники:

$$\mathbf{j}_2 = en\mathbf{u}_2 = \frac{ine^2}{m(2\omega + i\nu_0)} \mathbf{E}_2 + \mathbf{j}_{nl}, \quad (28)$$

где нелинейный ток

$$\mathbf{j}_{nl} = \frac{ine^3}{4m^2(\omega + i\nu_0)^2(2\omega + i\nu_0)} \nabla E_1^2 - \frac{ne^3}{2m^2(\omega + i\nu_0)^2(2\omega + i\nu_0)} \frac{\nu_0}{\omega} [\mathbf{E}_1 \text{rot} \mathbf{E}_1]. \quad (29)$$

В соответствии с определением $\mathbf{j}_{nl} = \partial \mathbf{P}^{nl} / \partial t$ нелинейному току (29) отвечает нелинейная поляризация на частоте 2ω :

$$P_i^{nl}(2\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \chi_{ijk}(2\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) E_j(\mathbf{k}_1) E_k(\mathbf{k}_2), \quad (30)$$

где $\chi_{ijk}(2\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ – тензор нелинейной восприимчивости. Согласно (30) и (29) компоненты тензора нелинейной восприимчивости, соответствующие полю (25), (26) и определяющие тангенциальные составляющие вектора нелинейной поляризации, есть

$$\chi_{xyy}(2\omega, \mathbf{k}_{las}, \mathbf{k}_{las}) = \chi_{xyy}(2\omega, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_{las}) = -\frac{i\omega_{pl}^2 \sin \theta}{16\pi m c \omega (\omega + i\nu_0)(2\omega + i\nu_0)}, \quad (31)$$

$$\chi_{xyx}(2\omega, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_{las}) = -\frac{i\nu_0}{\omega + i\nu_0} \chi_{xyy}(2\omega, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_{las}) = -\frac{e\omega_{pl}^2 \nu_0 \sin \theta}{16\pi m c \omega (\omega + i\nu_0)^2(2\omega + i\nu_0)}. \quad (32)$$

Выражения (26) и (30)–(32) определяют поляризацию металла на удвоенной частоте и позволяют рассмотреть ГВГ.

5. Поле излучения, создаваемое наведенной поляризацией

Примем, что в металле существует наведенная поляризация

$$\mathbf{P}_{st}(\Omega, q_x, \xi) = \frac{1}{2} \mathbf{P}_{st} \times \exp(-i\Omega t + iq_x x - \xi z) + \text{компл. сопр.}, \quad z > 0, \quad (33)$$

где Ω – частота изменения поляризации; q_x – компонента волнового вектора вдоль оси x ; $1/\xi$ – характерный размер области локализации поляризации. Сначала рассмотрим излучение из металла s -поляризованной волны, электрическое поле которой направлено вдоль оси y . Тогда вне металла электромагнитное поле излучаемой волны имеет вид

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}_{rad} \exp(-i\Omega t + iq_x x - iq_z z) + \text{компл. сопр.}, \quad (34)$$

$$\mathbf{E}_{rad} = (0, 1, 0) E_{rad}, \quad z < 0,$$

$$\mathbf{B}_{rad} = (q_z, 0, q_x) \frac{c}{\Omega} E_{rad}, \quad (35)$$

где $\Omega = qc$; $q = \sqrt{q_x^2 + q_z^2}$. Как и ранее, в металле электромагнитное поле описывается уравнениями (3), (4), но теперь в правой части уравнения (4) есть источник наведенной поляризации:

$$\text{rot} \mathbf{B} = \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} en\mathbf{u} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}_{st}(\Omega, q_x, \xi)}{\partial t}. \quad (36)$$

Электрическое поле в металле ищем в виде

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}(z) \exp(-i\Omega t + iq_x x) + \text{компл. сопр.}, \quad (37)$$

$$\mathbf{E}(z) = (0, E_y(z), 0), \quad z > 0.$$

Поскольку при излучении s -поляризованной волны $\text{div} \mathbf{E} = \partial E_y / \partial y = 0$, то для функции $E_y(z)$ из уравнений Максвелла имеем

$$\frac{d^2 E_y(z)}{dz^2} - \kappa^2(\Omega, q_x) E_y(z) = -\frac{4\pi}{c^2} \Omega^2 P_{st,y} \exp(-\xi z), \quad (38)$$

где $\kappa = \kappa(\Omega, q_x)$ описывается формулами (17) и (18), справедливыми при $\omega_{pl}^2 > (\Omega^2 + \nu_0^2)(\varepsilon_0 - q_x^2/q^2)$. Убывающее при $z \rightarrow \infty$ решение неоднородного уравнения (38) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} E_y(z) = & \left[E_y(0) + \frac{4\pi\Omega^2}{c^2(\xi^2 - \kappa^2)} P_{st,y} \right] \exp(-\kappa z) \\ & - \frac{4\pi\Omega^2}{c^2(\xi^2 - \kappa^2)} P_{st,y} \exp(-\xi z). \end{aligned} \quad (39)$$

Электрическому полю, описываемому формулами (37) и (39), отвечает магнитное поле

$$\frac{1}{2} \mathbf{B}(z) \exp(-i\Omega t + iq_x x) + \text{компл. сопр.}, \quad (40)$$

$$\mathbf{B}(z) = \frac{c}{\Omega} [iE'_y(z), 0, q_x E_y(z)], \quad z > 0.$$

Используя условия непрерывности тангенциальных компонент электромагнитного поля на поверхности металла, из формул (34), (35), (37), (39) и (40) находим связь напряженности электрического поля излучаемой волны с y -компонентой наведенной поляризации:

$$E_{rad} = E_y(0) = \Phi_s(\Omega, q_x, \xi) P_{st,y}, \quad (41)$$

где введено обозначение для комплексного коэффициента излучения:

$$\Phi_s(\Omega, q_x, \xi) = \frac{4\pi}{[\xi + \kappa(\Omega, q_x)][q_x + i\kappa(\Omega, q_x)]} \frac{\Omega^2}{c^2}. \quad (42)$$

Рассмотрим теперь излучение p -поляризованной волны. В этом случае магнитное поле излучаемой волны имеет только одну компоненту вдоль оси y :

$$\frac{1}{2} \mathbf{B}_{rad} \exp(-i\Omega t + iq_x x - iq_z z) + \text{компл. сопр.}, \quad (43)$$

$$\mathbf{B}_{rad} = (0, 1, 0) B_{rad}, \quad z < 0,$$

$$\mathbf{E}_{rad} = -(q_z, 0, q_x) \frac{c}{\Omega} B_{rad}. \quad (44)$$

Магнитное поле в металле ищем в виде

$$\frac{1}{2} \mathbf{B}(z) \exp(-i\Omega t + iq_x x) + \text{компл. сопр.},$$

$$\mathbf{B}(z) = (0, B_y(z), 0), \quad z > 0. \quad (45)$$

Исключим из уравнения (36) компоненту поляризации $P_{st,y}(\Omega, q_x, \xi)$, являющуюся источником s-поляризованной волны. Ограничимся рассмотрением условий, когда две другие компоненты вектора поляризации $\mathbf{P}_{st}(\Omega, q_x, \xi)$ удовлетворяют условию $[\text{rot } \mathbf{P}_{st}(\Omega, q_x, \xi)]_y = 0$. Тогда из уравнений (1), (3) и (36) имеем

$$\frac{d^2 B_y(z)}{dz^2} - \kappa^2(\Omega, q_x) B_y(z) = 0. \quad (46)$$

Убывающее при $z \rightarrow \infty$ решение этого уравнения имеет вид

$$B_y(z) = B_y(0) \exp(-\kappa z) = B_{\text{rad}} \exp(-\kappa z). \quad (47)$$

Электрическое поле находится из уравнений (1), (36) и описывается выражениями

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}(z) \exp(-i\Omega t + iq_x x) + \text{компл. сопр.},$$

$$\mathbf{E}(z) = (E_x(z), 0, E_z(z)), \quad z > 0, \quad (48)$$

$$E_x(z) = \frac{ic\kappa}{\Omega \varepsilon(\Omega)} B_y(z) - \frac{4\pi}{\varepsilon(\Omega)} P_{st,x} \exp(-\xi z), \quad (49)$$

$$E_z(z) = \frac{cq_x}{\Omega \varepsilon(\Omega)} B_y(z) - \frac{4\pi}{\varepsilon(\Omega)} P_{st,z} \exp(-\xi z).$$

Из условия непрерывности E_x на поверхности металла с учетом соотношений (45), (47) и (49) находим магнитное поле излучаемой волны

$$B_{\text{rad}} = E_{\text{rad}} = \Phi_p(\Omega, q_x, \xi) P_{st,x}, \quad (50)$$

где

$$\Phi_p(\Omega, q_x, \xi) = \frac{4\pi}{c} \frac{\Omega}{\varepsilon(\Omega) q_z + i\kappa(\Omega, q_x)} \quad (51)$$

– комплексный коэффициент излучения p-волны. Соотношения (42) и (51) позволяют найти поля s- и p-волн, излучаемых металлом с наведенной поляризацией.

6. Излучение на частоте второй гармоники

Перейдем к рассмотрению волн, излучаемых металлом, на который воздействуют падающая под произвольным углом s-поляризованная волна и падающая нормально волна той же частоты. При совместном воздействии этих волн в металле возникает наведенная поляризация на суммарной частоте $2\omega = \omega + \omega$, которая описывается соотношениями (30)–(32). Вектор наведенной поляризации имеет три компоненты. Нормальная к поверхности металла компонента P_z^{nl} не приводит к генерации излучения. Напротив, тангенциальные компоненты P_x^{nl} и P_y^{nl} являются источником p- и s-поляризованных волн. Согласно соотношениям (43), (47), (50) и

(51), определяющие поляризацию вдоль оси x величины $P_x^{\text{nl}}(2\omega, \mathbf{k}_{\text{las}}, \mathbf{k}_{\text{las}})$ и $P_x^{\text{nl}}(2\omega, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_{\text{las}})$ являются источниками двух p-поляризованных волн с частотой 2ω и волновыми векторами $\mathbf{k}' = 2k(\sin \theta, 0, -\cos \theta)$ и $\mathbf{k}'' = k(\sin \theta, 0, -\sqrt{4 - \sin^2 \theta})$ соответственно. Волна с волновым вектором \mathbf{k}' распространяется в том же направлении, что и отраженная s-поляризованная волна на частоте ω , т. е. $\theta' = \theta$, где θ' – угол между $\mathbf{n}' = \mathbf{k}'/2k$ и \mathbf{n} – вектором нормали к поверхности металла. Магнитное поле p-поляризованной волны, излучаемой в направлении вектора \mathbf{n}' , имеет вид

$$\frac{1}{2} \mathbf{B}^p(2\omega, \mathbf{k}') \exp(-i2\omega t + i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) + \text{компл. сопр.}, \quad (52)$$

$$\mathbf{B}^p(2\omega, \mathbf{k}') = (0, B_y^p(2\omega, \mathbf{k}'), 0), \quad z > 0.$$

В соответствии с соотношениями (24)–(26), (30), (43) и (50) отличная от нуля y-компонента магнитного поля

$$B_y^p(2\omega, \mathbf{k}') = \Phi_p(2\omega, 2k_x, 2\kappa(\omega, k_x)) \times F_s^2(\omega, \mathbf{k}_{\text{las}}) \chi_{xyy}(2\omega, \mathbf{k}_{\text{las}}, \mathbf{k}_{\text{las}}) E_{\text{las}}^2, \quad (53)$$

где $\chi_{xyy}(2\omega, \mathbf{k}_{\text{las}}, \mathbf{k}_{\text{las}})$ – нелинейная восприимчивость (31); $F_s(\omega, \mathbf{k}_{\text{las}})$ – комплексный коэффициент проникновения (23); $\Phi_p(2\omega, 2k_x, 2\kappa(\omega, k_x))$ – комплексный коэффициент излучения p-волны (51). Выражение (53) относится к условиям, в которых частота генерируемой волны удовлетворяет неравенству

$$\omega_{\text{pl}}^2 > (4\omega^2 + v_0^2)(\varepsilon_0 - \sin^2 \theta). \quad (54)$$

Обобщение на случай более высоких частот 2ω тривиально (см., напр., [15]). Электромагнитная волна (52), (53) возникает вследствие нелинейного отклика металла на воздействие s-поляризованной волны. Волне (52), (53) отвечает вектор Пойнтинга $\mathbf{S} = (c/4\pi)[\mathbf{E}\mathbf{B}]$:

$$\mathbf{S}^p(2\omega, \mathbf{k}') = \frac{32\pi k^4 e^2 \omega_{\text{pl}}^4 \sin^2 \theta \cos^4 \theta}{m^2 c^5 (\omega^2 + v_0^2)(4\omega^2 + v_0^2)} \mathbf{n}' I_{\text{las}}^2 \times \frac{1}{\{[k \cos \theta + \kappa_2(\omega, k \sin \theta)]^2 + \kappa_2^2(\omega, k \sin \theta)\}^2} \times \{[2k\varepsilon_1(2\omega) \cos \theta + \kappa_2(2\omega, 2k \sin \theta)]^2 + [2k\varepsilon_2(2\omega) \cos \theta + \kappa_1(2\omega, 2k \sin \theta)]^2\}^{-1}, \quad (55)$$

где $I_{\text{las}} = (c/8\pi)E_{\text{las}}^2$ – плотность потока падающей на металл s-поляризованной волны.

Вторая r-поляризованная волна с волновым вектором \mathbf{k}'' распространяется в направлении $\mathbf{n}'' = \mathbf{k}''/2k$ под углом θ'' к вектору нормали \mathbf{n} , меньшим θ' :

$$\tan \theta'' = \frac{\sin \theta}{\sqrt{4 - \sin^2 \theta}} < \tan \theta', \quad \theta'' < \theta'. \quad (56)$$

Эта волна возникает при нелинейном смещении s-поляризованной волны с волновым вектором $\mathbf{k}_{\text{las}} = (k_x, 0, k_z)$ и волны с $\mathbf{k}_p = (0, 0, k)$, имеющей такую же частоту, но падающей по нормали на поверхность металла. Магнитное поле этой волны описывается формулой (52), в

которую вместо \mathbf{k}' входит \mathbf{k}'' , а y -компонента магнитного поля имеет вид

$$B_y^p(2\omega, \mathbf{k}'') = \Phi_p(2\omega, k_x, \kappa(\omega, k_x) + \kappa(\omega, 0)) \times F_s(\omega, \mathbf{k}_{\text{las}}) F_s(\omega, \mathbf{k}_p) \chi_{xy}(2\omega, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_{\text{las}}) E_{\text{las}} e_p \sin \phi, \quad (57)$$

где частота 2ω удовлетворяет неравенству (54). Выражение (57) описывает простейшее смещение двух волн, возникающее тогда, когда они имеют компоненты вдоль оси y . Последнее имеет место при $\sin \phi \neq 0$ или $\phi \neq 0, \pi$. Используя выражения (23), (31) и (51), из (57) находим вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S}^p(2\omega, \mathbf{k}'') = \frac{32\pi k^4 e^2 \omega_{\text{las}}^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \phi}{m^2 c^5 (\omega^2 + v_0^2) (4\omega^2 + v_0^2)} \mathbf{n}'' I_{\text{las}} I_p \times \frac{1}{[k \cos \theta + \kappa_2(\omega, k \sin \theta)]^2 + \kappa_1^2(\omega, k \sin \theta)} \times \frac{1}{[k + \kappa_2(\omega, 0)]^2 + \kappa_1^2(\omega, 0)} \left\{ [k \varepsilon_1(2\omega) \sqrt{4 - \sin^2 \theta} + \kappa_2(2\omega, k \sin \theta)]^2 + [k \varepsilon_2(2\omega) \sqrt{4 - \sin^2 \theta} + \kappa_1(2\omega, k \sin \theta)]^2 \right\}^{-1}, \quad (58)$$

где $I_p = (c/8\pi) E_p^2$ – плотность потока волны, падающей на металл нормально к его поверхности. Происхождение излучения обеих p -поляризованных гармоник имеет одну и ту же физическую причину – наличие нелинейной поляризации вдоль оси x , пропорциональной градиенту плотности энергии поля в металле (см. (29)). Поэтому в формулах (55) и (58) зависимости множителей при произведении плотностей потоков от параметров металла и смешиваемых волн качественно схожи. Генерация лишь p -поляризованной второй гармоники сохраняется и при смещении двух волн, если электрическое поле волны, падающей нормально на металл, коллинеарно полю s -поляризованной волны.

Однако ситуация изменяется, когда электрические поля смешиваемых волн не коллинеарны. Тогда, если у падающей нормально волны есть компонента электрического поля $E_{p,x} = E_p \cos \phi$, ортогональная к электрическому полю s -поляризованной волны $E_{\text{las}} = (0, E_{\text{las}}, 0)$, из-за одновременного воздействия $E_{p,x}$ и нормальной к поверхности металла компоненты магнитного поля, создаваемого s -волной, возникает периодическое движение электронов с удвоенной частотой в направлении коллинеарного поверхности металла электрического поля s -волны. В скин-слое металла наводится еще одна коллинеарная поверхности компонента нелинейной поляризации – P_y^{nl} , которая является источником s -поляризованной второй гармоники. В этом смысле при смешении рассматриваемых волн возникает возможность снятия ss -запрета. Согласно формулам (24)–(26), (30), (34) и (41) электрическое поле s -поляризованной второй гармоники имеет вид

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}^s(2\omega, \mathbf{k}'') \exp(-i2\omega t + i\mathbf{k}'' \mathbf{r}) + \text{компл. сопр.}, \quad (59)$$

$$E_y^s(2\omega, \mathbf{k}'') = (0, E_y^s(2\omega, \mathbf{k}''), 0), \quad z > 0,$$

$$E_y^s(2\omega, \mathbf{k}'') = \Phi_s(2\omega, k_x, \kappa(\omega, k_x) + \kappa(\omega, 0)) F_s(\omega, \mathbf{k}_{\text{las}}) \times$$

$$\times F_s(\omega, \mathbf{k}_p) \chi_{xy}(2\omega, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_{\text{las}}) E_{\text{las}} E_p \cos \phi. \quad (60)$$

Как и ранее, считаем выполненным неравенство (54). Отсюда, используя явные выражения для F_s (23), χ_{xy} (32) и Φ_s (42), находим вектор Пойнтинга s -поляризованной второй гармоники

$$\mathbf{S}^s(2\omega, \mathbf{k}'') = \frac{128\pi k^6 e^2 v_0^2 \omega_{\text{pl}}^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos^2 \phi}{m^2 c^5 (\omega^2 + v_0^2) (4\omega^2 + v_0^2)} \times \mathbf{n}'' I_{\text{las}} I_p \left\{ [k \sqrt{4 - \sin^2 \theta} + \kappa_2(2\omega, k \sin \theta)]^2 + \kappa_1^2(2\omega, k \sin \theta) \right\}^{-1} \{ [\kappa_1(\omega, 0) + \kappa_1(\omega, k \sin \theta) + \kappa_1(2\omega, k \sin \theta)]^2 + [\kappa_2(\omega, 0) + \kappa_2(\omega, k \sin \theta) + \kappa_2(2\omega, k \sin \theta)]^2 \}^{-1} \{ [k \cos \theta + \kappa_2(\omega, k \sin \theta)]^2 + \kappa_1^2(\omega, k \sin \theta) \}^{-1} \{ [k + \kappa_2(\omega, 0)]^2 + \kappa_1^2(\omega, 0) \}^{-1}. \quad (61)$$

Согласно (61) s -поляризованная гармоника излучается в направлении вектора \mathbf{n}'' , т. е. под углом θ'' , более близким к вектору нормали, чем θ – угол отражения основной s -поляризованной волны. Плотность потока s -поляризованной гармоники (61) пропорциональна квадрату частоты столкновений электронов. В рамках предложенного описания нелинейного отклика металла без учета столкновений электронов эффект снятия ss -запрета отсутствует. Это свойство ГВГ указывает на новую возможность измерения эффективных частот столкновений электронов.

7. Влияние нагрева электронов на генерацию гармоник

Столкновения электронов приводят к поглощению электромагнитного поля. Согласно (9), (12), (13) плотность поглощаемой в единице объема мощности

$$Q = \frac{1}{4} \text{Re} \mathbf{u}_1^* \mathbf{E}_1 + \text{компл. сопр.} = \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{8\pi} \frac{v_0}{\omega^2 + v_0^2} |E_1|^2. \quad (62)$$

При воздействии двух полей вида (24) квадрат модуля электрического поля имеет вид

$$|E_1|^2 = |E_{\text{las}}|^2 |F_s(\omega, \mathbf{k}_{\text{las}})|^2 \exp[-2\kappa_1(\omega, k \sin \theta)z] + |E_p|^2 |F_s(\omega, \mathbf{k}_p)|^2 \exp[-2\kappa_1(\omega, 0)z] + (\mathbf{E}_{\text{las}} \mathbf{E}_p^*) F_s(\omega, \mathbf{k}) \times F_s^*(\omega, \mathbf{k}_p) \exp[ikx \sin \theta - \kappa(\omega, k \sin \theta)z - \kappa^*(\omega, 0)z] + (\mathbf{E}_{\text{las}}^* \mathbf{E}_p) F_s^*(\omega, \mathbf{k}_{\text{las}}) F_s(\omega, \mathbf{k}_p) \times \exp[-ikx \sin \theta - \kappa^*(\omega, k \sin \theta)z - \kappa(\omega, 0)z]. \quad (63)$$

Согласно (62), (63) при одновременном поглощении полей вида (24) имеет место неоднородный вдоль поверхности металла нагрев электронов с периодом $2\pi/k \sin \theta$ вдоль оси x . Такой нагрев приводит к неоднородности вдоль поверхности эффективной диэлектрической проницаемости металла. Вследствие этого возникает необходимость в построении видоизмененной теории прони-

кновения поля в металл и, как следствие, в пересмотре закономерностей нагрева. Во избежание такого усложнения теории далее ограничимся обсуждением закономерностей нагрева вследствие поглощения волны, падающей нормально на поверхность металла, а влиянием поглощения s-поляризованной волны будем пренебрегать, считая выполненным неравенство $|E(k_{las})| \ll |E(k_p)|$. Отметим, что в таком ограничении нет необходимости, если $(E_{las}^* E_p) = 0$.

С учетом сказанного при рассмотрении нагрева электронов

$$Q \simeq \frac{1}{c} \frac{v_0 \omega_{pl}^2}{\omega^2 + v_0^2} \frac{4k^2}{[k + \kappa_2(\omega, 0)]^2 + \kappa_1^2(\omega, 0)} \times I_p \exp[-2\kappa_1(\omega, 0)z]. \quad (64)$$

Соотношения (2), (6), (64) и уравнения (5), (7) позволяют рассмотреть изменение температур электронов и решетки при поглощении падающего нормально лазерного импульса. Примем, что плотность потока греющего электроны лазерного импульса I_p изменяется во времени по закону $I_p(t) = I_p \exp(-t^2/\tau_{pulse}^2)$, где характеризующее длительность импульса время τ_{pulse} много больше периода $2\pi/\omega$, отвечающего основной частоте импульса. Рассмотрим численное решение уравнений (5), (7) в случае взаимодействия импульса с мишенью из золота. Для золота $\epsilon_F \simeq 5.5$ эВ, $n_0 \simeq N \simeq 5.9 \times 10^{22}$ см⁻³, $\omega_{pl} \simeq 1.4 \times 10^{16}$ с⁻¹, $G = 3.5 \times 10^{10}$ Вт·К⁻¹·см⁻³, $C_{lat} \simeq 2.4 \times 10^7$ эрг·К⁻¹. Начальные температуры электронов и решетки считаем одинаковыми: $T_0 = T_{lat} = 300$ К. При этом $v_{eph} \simeq 0.93 \times 10^{14}$ с⁻¹ и $v_{eph,\lambda} \simeq 3.7 \times 10^{13}$ с⁻¹. Параметры лазерного импульса следующие: $\omega = 1.5 \times 10^{15}$ с⁻¹, $\tau_{pulse} \simeq 60$ фс, $I_p \simeq 5 \times 10^{12}$ Вт/см². Эти значения типичны для эксперимента и реализуются при использовании лазера на хром-форстерите. Отметим, что при такой частоте ω можно не учитывать вклад межзонных переходов в диэлектрическую проницаемость золота, а использовать простое соотношение (15). Отвечающее указанным параметрам золота и греющего импульса численное решение уравнений (5), (7) приведено на рис.1 и 2 соответственно. Явный вид решения зависит от параметров a и b , определяющих частоты электрон-электронных столкновений. На рис.1 приведена зависимость температуры электронов $T_0(z=0, t)$ на поверхности металла от времени. Сплошная кривая на рис.1 отвечает $a = 1, b = 2$, штриховая – $a = 0.5, b = 1$. Чем больше a , тем сильнее нагрев электронов. Увеличение b ведет к уменьшению коэффициента теплопроводности и замедлению охлаждения электронов в скин-слое. Функция $T_0(z=0, t)$ сначала возрастает, достигает максимума, а затем монотонно убы-

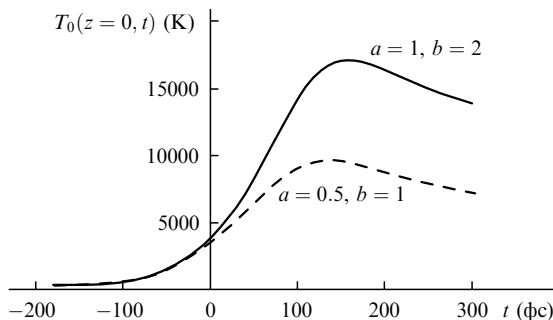


Рис.1. Зависимости от времени температуры электронов на поверхности из золота.

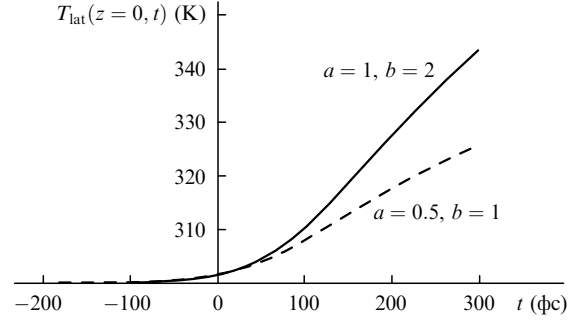


Рис.2. Зависимости от времени температуры решетки на поверхности из золота.

вает. Согласно рис.2 температура решетки на поверхности металла $T_{lat}(z=0, t)$ на небольших временах монотонно увеличивается. Две кривые на рис.2 отвечают тем же значениям параметров a и b , что на рис.1. При выбранных параметрах лазерного импульса $T_{lat}(z=0, t)$ возрастает всего на 10% – 15%, что не приводит к деформации кристаллической решетки за время его действия.

Изменение во времени температур электронов и решетки сопровождается изменением частоты столкновений электронов ν . В процессе эволюции ν изменяется эффективность генерации гармоник. Для описания этих изменений введем функции $H_{s,p}(2\omega, k)$:

$$S^p(2\omega, k') = n' I_{las}^2 H_p(2\omega, k'), \quad (65)$$

$$S^p(2\omega, k'') = n'' I_{las} I_p H_p(2\omega, k''),$$

$$S^s(2\omega, k'') = n'' I_{las} I_p H_s(2\omega, k''). \quad (66)$$

На рис.3 приведены зависимости от времени функций $H_p(2\omega, k')/H_{p0}(2\omega, k') - 1$ и $H_p(2\omega, k'')/H_{p0}(2\omega, k'') - 1$, иллюстрирующих изменение эффективности генерации р-поляризованных гармоник, описываемых формулами (55) и (58). Величины $H_{p0}(2\omega, k')$ и $H_{p0}(2\omega, k'')$ соответствуют значениям функций при $T_0 = T_{lat} = 300$ К. Кривые построены для случая, когда угол падения s-поляризованной волны θ равен $\pi/4$. Угол ϕ также принят равным $\pi/4$. Согласно рис.3 нагрев электронов и решетки сопровождается уменьшением эффективности генерации гармоник. Напротив, охлаждение электронов ведет к ее увеличению. Относительный минимум эффективности генерации имеет место в те моменты времени, когда температура электронов близка к своему максимуму. Как и вид профилей температур на рис.1 и 2, форма кривых на рис.3 существенно зависит от параметров a и b . При $I_{las} \simeq 10^{12}$ Вт/см², когда влиянием s-поляризованной волны на

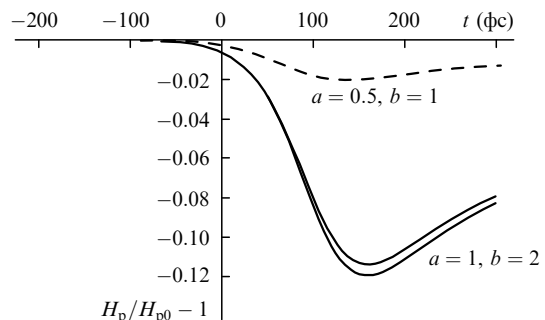


Рис.3. Эволюция во времени относительных эффективностей генерации р-поляризованных волн с частотой 2ω .

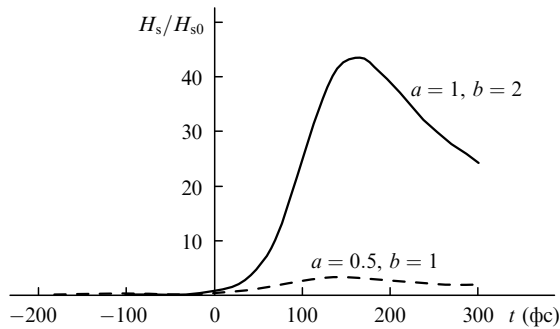


Рис.4. Эволюция во времени относительной эффективности генерации s-поляризованной второй гармоники.

нагрев электронов можно пренебречь, абсолютные значения плотностей потока излучения (55) и (58) на частоте второй гармоники по порядку величины составляют $\sim 10^2$ Вт/см². Отметим, что различие кривых на рис.3, отвечающих генерации гармоники в направлениях k' и k'' , весьма незначительно. При $a = 1$ и $b = 2$ это различие составляет не более 0.5 %, при $a = 0.5$ и $b = 1$ – не более 0.1 %, и кривые на рис.3 неразличимы.

Иначе изменяется во времени эффективность генерации s-поляризованной гармоники (61), излучаемой в направлении вектора n'' . Функция $H_s(2\omega, k'')$ согласно рис.4 увеличивается с ростом температуры электронов и решетке, а затем уменьшается при относительно быстром охлаждении электронов. Поскольку $H_s(2\omega, k'')$ (61), (66) пропорциональна квадрату частоты столкновений, ее величина изменяется весьма значительно при нагреве и последующем охлаждении электронов. В частности, в рассматриваемых условиях влияние нагрева электронов приводит к изменению плотности потока s-поляризованной гармоники от $\sim 0.5 \times 10^{-2}$ до $\sim 2 \times 10^{-1}$ Вт/см² при $a = 1$ и $b = 2$. В этих же условиях, как видно из рис.3, плотность потока р-поляризованных гармоник изменяется лишь на несколько процентов. Столь резкая зависимость плотности потока s-поляризованной гармоники от нагрева электронов делает это излучение весьма удобным инструментом для исследования кинетики горячих электронов.

8. Заключение

Изложенная выше сравнительно простая теория генерации второй гармоники позволяет видеть то богатство

следствий нелинейной теории оптических свойств металлов, которые возникают при смещении волн. Появление гармоник различной поляризации, распространяющихся под разными углами, расширяет возможности получения информации о свойствах неравновесного металла. В частности, изучение генерации s-поляризованной гармоники могло бы позволить исследовать кинетику горячих электронов экспериментально. Вместе с тем и дальнейшее развитие теории нелинейного отклика металла при воздействии на него нескольких фемтосекундных импульсов позволяет рассчитывать на предсказание новых нелинейно-оптических эффектов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-02-00696).

1. Jha S.S. *Phys. Rev.*, **140**, 2020 (1965).
2. Blombergen N., Shen Y.R. *Phys. Rev.*, **141**, 298 (1966).
3. Jha S.S., Warke C.S. *Phys. Rev.*, **153**, 751 (1967).
4. Акипетров О.А., Мишина Е.Д., Петухов А.В. *Письма в ЖЭТФ*, **37**, 592 (1983).
5. Corvi M., Schaich W.L. *Phys. Rev. B*, **33**, 3688 (1986).
6. Akhmediev N.N., Mel'nikov I.V., Robur L.J. *Laser Phys.*, **4**, 1194 (1994).
7. Hohfeld J., Grosenick D., Conrad U., Matthias E. *Appl. Phys. A*, **60**, 137 (1995).
8. Ангелуц А.А., Коротеев Н.И., Ожередов И.А., Шкуринов А.П. *Письма в ЖЭТФ*, **63**, 155 (1996).
9. Papadogiannis N.A., Moustazis S.D. *Opt. Commun.*, **137**, 174 (1997).
10. Акипетров О.А. *Соросовский образовательный журн.*, **6** (12), 71 (2000).
11. Hohfeld J., Wellershoff S.-S., Gudde J., Conrad U., Jahnke V., Matthias E. *Chem. Phys.*, **251**, 237 (2000).
12. Guo C., Rodrigues G., Taylor A.J. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 1638 (2001).
13. Guo C., Rodrigues G., Hoffbauer M.A., Taylor A.J. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 3457 (2001).
14. Bezhanov S.G., Kanavin A.P., Uryupin S.A. *J. Rus. Laser Research*, **29**, 219 (2008).
15. Бежанов С.Г., Урюпин С.А. *Квантовая электроника*, **40**, 51 (2010).
16. Займан Дж. *Электроны и фононы* (М.: ИЛ, 1962, гл. 7).
17. Абрикосов А.А. *Основы теории металлов* (М.: Наука, 1987).
18. Гинзбург В.Л., Шабанский В.П. *ДАН СССР*, **100**, 445 (1955).
19. Каганов М.И., Лифшиц И.М., Танатаров Л.В. *Атомная энергия*, **6**, 391 (1959).
20. Kanavin A.P., Mishchik K.N., Uryupin S.A. *J. Rus. Laser Research*, **29**, 123 (2008).
21. Канавин А.П., Мищик К.Н., Урюпин С.А. *Квантовая электроника*, **39**, 839 (2009).