

# О влиянии возмущений скорости накачки и потерь на динамику генерации лазера с резонатором Фабри–Перо

Н.Кумар, В.И.Леденев

*Численно исследован переход от генерации фундаментальной моды к генерации фундаментальной и первой мод под влиянием нестационарных антисимметричных возмущений распределений скорости накачки и потерь в слое активной среды. Показано, что появление возмущений сразу же приводит к возбуждению первой моды с существенной амплитудой. Показано также, что режим двухмодовой генерации под влиянием возмущений возникает при скорости накачки, меньшей пороговой скорости для двухмодовой генерации в отсутствие возмущений. Установлено, что амплитуда первой моды имеет максимум на частоте межмодовых биений незаполненного резонатора Фабри–Перо. Также установлено, что появление нестационарных антисимметричных возмущений приводит к увеличению средней интенсивности фундаментальной моды. Проведено сравнение переходных режимов к двухмодовой генерации при различных типах и периодах возмущений. Рассмотрена работоспособность схемы контроля модового состава генерации лазера.*

**Ключевые слова:** лазер, резонатор Фабри–Перо, динамика генерации, численное моделирование, контроль модового состава генерации.

## 1. Введение

Нестационарные возмущения параметров лазера являются одним из способов влияния на динамику его генерации. Гармоническая модуляция скорости накачки или потерь резонатора используется для перевода одномодового лазера в режим хаотической генерации [1]. Нестационарные возмущения параметров могут вызываться процессами в активной среде лазера, например самоизвестствием в ней излучения, ударными волнами, возникающими при импульсном вкладе энергии в активную среду газовых лазеров, турбулентными пульсациями плотности газового потока [2–4]. Численная модель многомодовой генерации в лазерах с резонатором Фабри–Перо развита в работе [5]. В работе [6] численно исследован переход от генерации одной фундаментальной моды к генерации фундаментальной и первой мод при скачке однородной скорости накачки и показано, что при переходе возникают нестационарные антисимметричные возмущения распределения коэффициента усиления активной среды. Наличие таких возмущений или их искусственное создание может существенно изменить характеристики перехода к многомодовой генерации. В [6] предполагалось, что возмущения параметров лазера отсутствуют. В настоящей работе исследован переход от одномодовой генерации к двухмодовой под влиянием нестационарных антисимметричных возмущений распределений скорости накачки и потерь в слое активной среды.

**N.Kumar.** Indira Gandhi Centre for Atomic Research, Kalpakkam 603102, Tamilnadu, India; e-mail: nkumar@rambler.ru

**В.И.Леденев.** Институт проблем лазерных и информационных технологий РАН, Россия, Московская обл., 140700 Шатура, Святоозерская ул., 1; e-mail: ledenev\_ilit@rambler.ru

Поступила в редакцию 12 мая 2010 г., после доработки – 22 июля 2010 г.

ды. Исследована также схема контроля генерации, позволяющая определить модовый состав генерации при появлении упомянутых выше возмущений.

## 2. Модель генерации при наличии возмущений

Исследование перехода от одномодовой генерации к двухмодовой проводилось на основе численной модели [5, 6], в которой активная среда представляла собой тонкий слой, расположенный вблизи глухого зеркала резонатора (рис.1). В плоской геометрии в малоугловом приближении скалярной теории дифракции электрическое поле внутри резонатора представлялось в виде суммы встречных плоских волн, модулированных плавными огибающими:

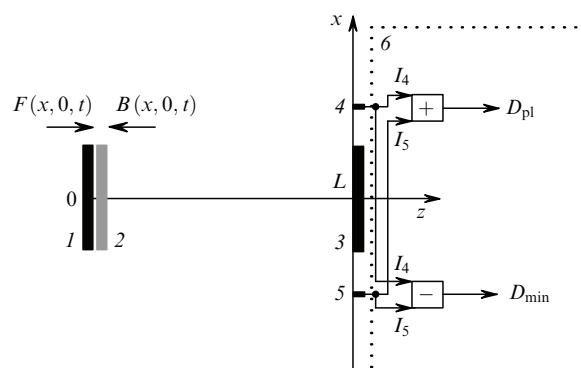


Рис.1. Лазер на основе резонатора Фабри–Перо и система контроля модового состава лазерного излучения:  
1 – глухое зеркало; 2 – поглощающий слой и слой активной среды; 3 – выходное зеркало; 4, 5 – расположенные симметрично датчики интенсивности поля  $I_4$  и  $I_5$ ; 6 – процессор, включающий схемы преобразования сигналов датчиков;  $D_{pl}$  – суммарный сигнал датчиков;  $D_{min}$  – разностный сигнал датчиков;  $F(x, 0, t)$ ,  $B(x, 0, t)$  – прямая и обратная волны в слое активной среды;  $L$  – длина резонатора.

$$\begin{aligned} E(x, z, t) = & [F(x, z, t) \exp(i k_0 z) \\ & + B(x, z, t) \exp(-i k_0 z)] \exp(-i \omega_0 t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\omega_0$  – несущая частота;  $k_0 = \omega_0/c$ . Ось  $z$  направлена параллельно ходу лучей в резонаторе, ось  $x$  – вдоль глухого зеркала (рис.1). Динамикагибающихся прямой ( $F(x, z, t)$ ) и обратной ( $B(x, z, t)$ ) волн описывалась уравнениями

$$2ik_0 \left( \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - ik_0 g B + ik_0 r_L B = 0, \quad (2)$$

$$2ik_0 \left( \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - ik_0 g F + ik_0 r_L F = 0, \quad (3)$$

где  $g(x, 0, t)$  – коэффициент усиления среды;  $r_L(x, 0, t)$  – заданная функция, описывающая потери излучения в слое среды. На зеркалах резонатора волны удовлетворяли следующим условиям отражения:

$$F(x, 0, t) = -B(x, 0, t)r_1, \quad (4)$$

$$B(x, L, t) = -F(x, L, t)r_2, \quad (5)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – коэффициенты отражения глухого и выходного зеркал.

Уравнение для коэффициента усиления излучения в активной среде включало в себя процессы вынужденного излучения и релаксации с постоянной времени  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial g}{\partial t} = & g_0 - g(1 + I), \\ I(x, 0, t) = & |F(x, 0, t)|^2 + |B(x, 0, t)|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $I(x, 0, t)$  – интенсивность излучения в слое активной среды, усредненная по интерференционным биениям встречных волн и нормированная на интенсивность насыщения [7].

Начальные условия для распределений  $F(x, 0, 0)$ ,  $B(x, L, 0)$  и  $g(x, 0, 0)$  соответствовали установившейся генерации фундаментальной моды при заданной скорости накачки  $g_0 = g_{0v}$ . Возмущения скорости накачки или потерь в слое активной среды вводились в момент времени  $t^* = 5$  мкс и представлялись периодической функцией

$$f(x, t) = A_m \sin \left( \frac{2\pi x}{2a} \right) \cos \left[ \frac{2\pi(t - t^*)}{T_m} \right], \quad (7)$$

где  $T_m$ ,  $A_m$  – период и амплитуда возмущения скорости накачки или потерь в слое среды. На диаметре слоя среды  $2a$  укладывалась одна волна возмущения. Скорость накачки менялась как  $g_0(x, t) = g_{0v} + f(x, t)$ , потери в слое описывались функцией  $r_L(x, t) = r_{L0} + f(x, t)$ .

Расчеты проводились для резонатора Фабри–Перо с числом Френеля  $N_F = 6.25$ , плоскими зеркалами радиусом  $a = 1$  см и расстоянием между ними  $L = 150$  см. Длина волны излучения  $\lambda = 10.6$  мкм, коэффициенты отражения глухого и выходного зеркал  $r_1 = 1$  и  $r_2 = 0.8$ , время релаксации  $\tau = 6.0 \times 10^{-6}$  с. Параметры  $L = 153 \pm 1$  см и  $\lambda = 10.6$  мкм примерно соответствовали параметрам экспериментальной установки [8, с.1459]. Лазер [8] имелустойчивый резонатор с радиусами зеркал 5 см и постоян-

ным радиусом пучка в активной среде 0.4 см [8, с.1461]. При  $a = 1$  см радиус распределения интенсивности фундаментальной моды на глухом зеркале по уровню 0.5 от максимума составлял 0.5 см, что также близко к радиусу пучка в активной среде в работе [8]. Авторы этой работы проводили вычисления с  $\tau = 1.0 \times 10^{-6}$  с [8, с.1461]. Тестовые расчеты, в которых время релаксации менялось от  $3.0 \times 10^{-6}$  до  $1.0 \times 10^{-5}$  с, показали, что характер временных зависимостей при этом не претерпевает существенных изменений. Заметим также, что значение  $\tau$  некритично при исследовании схемы контроля генерации.

Система уравнений (2)–(6) решалась с помощью метода расщепления по физическим процессам дифракции и усиления [9]. Для решения дифракционной части задачи использовался спектральный подход. Число элементов сетки по оси  $x$  составляло 8192, число элементов на зеркале – 512. Интегрирование системы уравнений (2)–(6) по времени осуществлялось с помощью неявной схемы второго порядка аппроксимации.

В численных экспериментах с модуляцией скорости накачки использовались значения  $g_{0v}$  ниже порога двухмодовой генерации на 1.5 % и более, потери в слое среды отсутствовали. Пороговый коэффициент усиления  $g_{th}$  фундаментальной моды составлял  $1.532 \times 10^{-3}$  см $^{-1}$ , для двухмодовой генерации  $g_{th} = 2.023 \times 10^{-3}$  см $^{-1}$ .

В численных экспериментах с модуляцией потерь в слое среды модуляция скорости накачки отсутствовала, постоянные потери в слое  $r_{L0} = 5.0 \times 10^{-4}$  см $^{-1}$ , амплитуда возмущения потерь  $A_L$  не превышала  $5.0 \times 10^{-4}$  см $^{-1}$ . Пороговый коэффициент усиления фундаментальной моды в отсутствие модуляции и при наличии постоянных потерь в слое  $g_{th} = 2.027 \times 10^{-3}$  см $^{-1}$ , для двухмодовой генерации  $g_{th} = 2.514 \times 10^{-3}$  см $^{-1}$ .

Превышение скорости накачки  $g_0$  над порогом определялось как  $k = g_0/g_{th}$  (при  $g_{th} = 1.532 \times 10^{-3}$  см $^{-1}$ ).

Два датчика интенсивности излучения, на показаниях которых основывалась работа схемы контроля модового состава генерации, располагались симметрично оси резонатора в плоскости  $z = L$  в области  $|x| > a$  (см. рис.1). Предполагалось, что характеристики датчиков позволяют проводить измерение за время, много меньшее периода возмущений  $T_m$ . Численное определение интенсивности с помощью датчиков осуществлялось на каждом обходе резонатора.

### 3. Исследование перехода к двухмодовому режиму генерации

Переход от одномодовой генерации к двухмодовой исследовался с помощью проецирования распределений интенсивности и коэффициента усиления на первые два эрмит–гауссовых полинома  $\psi_{0,1}(x)$  по формулам

$$\begin{aligned} I_i(t) = & \int_{-a}^a I(x, 0, t) \psi_i(x) dx / \int_{-a}^a \psi_i(x) \psi_i(x) dx, \\ g_i(t) = & \int_{-a}^a g(x, 0, t) \psi_i(x) dx / \int_{-a}^a \psi_i(x) \psi_i(x) dx, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $i = 0, 1$ , а параметр  $g$  нормирован на удвоенную длину резонатора. Безразмерные проекции распределений на  $\psi_0(x)$  (амплитуды фундаментальных мод) давали информацию о динамике симметричных частей распреде-

лений, проекции на  $\psi_1(x)$  (амплитуды первых мод) – о динамике антисимметричных частей распределений, связанной с переходом к двухмодовой генерации и биениям.

Проведенные исследования позволили выявить ряд существенных для практики особенностей процессов перехода от одномодовой генерации к двухмодовой. Во-первых, переходы под влиянием возмущений (7) происходили при скоростях накачки ниже порога двухмодовой генерации для однородной скорости накачки. Во-вторых, появление возмущений скорости накачки или потерь в слое активной среды (7) вызывало отклик в динамике  $I_1$  и  $g_1$  с задержкой, значительно меньшей периода возмущения (рис.2). При этом колебания  $I_1$  и  $g_1$  оказывались сдвинутыми по фазе на  $\pi/2$  (как и в работе [6]) и уже на первом периоде имели значительные амплитуды (рис.2). В-третьих, время установления колебаний  $I_1$  после их появления было меньше, чем при скачкообразном увеличении однородной скорости накачки [6]. В случае возмущений пространственного распределения скорости накачки время установления в среднем уменьшалось примерно на 80 % и было минимальным при периоде возмущения, равном периоду биений фундаментальной и первой мод незаполненного резонатора (рис.3,а). Возмущения пространственного распределения потерь в слое среды приводили к процессам установления колебаний  $I_1$  с более глубокими изменениями амплитуды и менее выраженной зависимостью времени установления от периода возмущения (рис.3,б). При возмущениях с периодами  $T_m$  в диапазоне  $(2.1 - 2.3) \times 10^{-7}$  с динамика  $I_1$  оказывалась хаотической, перехода к гармоническим колебаниям на временах  $\sim 150$  мкс при модуляции потерь не наблюдалось (рис.3,в). В связи со сказанным отметим, что частоты хаотической динамики в данном случае определяются частотой биений двух поперечных мод, т. е. собственными значениями и временем обхода резонатора, и не привязаны к времени релаксации активной среды, что важно для практики. Однако исследование проводилось с помо-

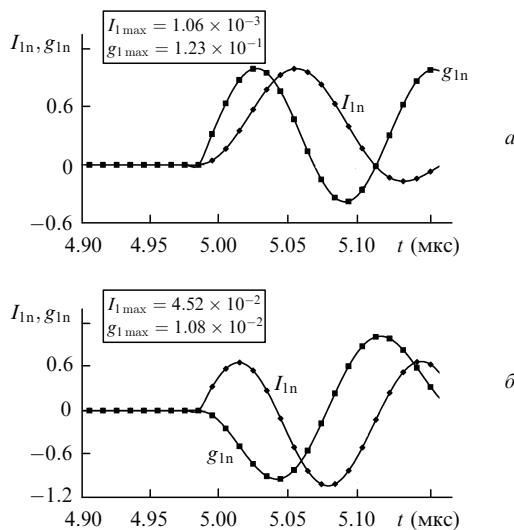


Рис.2. Динамика нормированных интенсивности  $I_{1n}(t)$  и коэффициента усиления моды  $g_{1n}(t)$  в начале развития двухмодовой генерации ( $I_{1n}(t) = I_1(t)/I_{1\max}$  и  $g_{1n}(t) = g_1(t)/g_{1\max}$ , где  $I_{1\max}$  и  $g_{1\max}$  – максимальные значения  $|I_1(t)|$  и  $|g_1(t)|$  на интервале  $[0, 5.16$  мкс]) в случае модуляции распределения скорости накачки при  $g_{0v} = 1.992 \times 10^{-3}$  см<sup>-1</sup>,  $T_m = 1.3 \times 10^{-7}$  с,  $A_m = 0.996 \times 10^{-3}$  см<sup>-1</sup> (а) и модуляции распределения потерь в слое среды при  $g_{0v} = 2.387 \times 10^{-3}$  см<sup>-1</sup>,  $T_m = 1.3 \times 10^{-7}$  с,  $A_m = 5.0 \times 10^{-4}$  см<sup>-1</sup> (б).

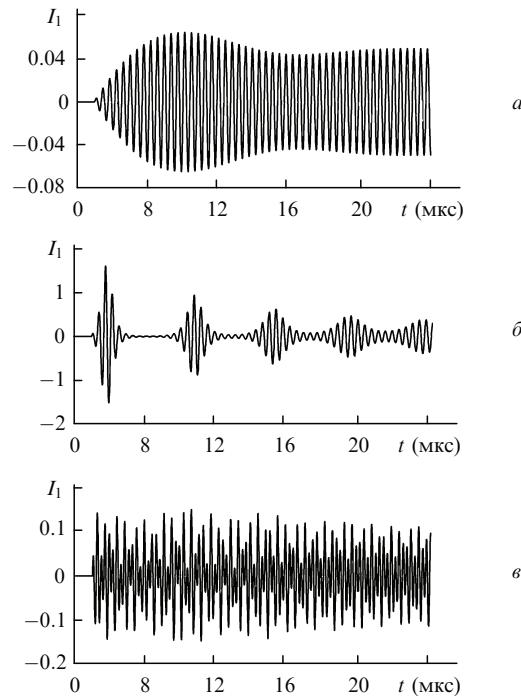


Рис.3. Динамика  $I_1(t)$  в течение первых 20 мкс после включения модуляции распределения скорости накачки при  $g_{0v} = 1.992 \times 10^{-3}$  см<sup>-1</sup>,  $A_m = 0.996 \times 10^{-3}$  см<sup>-1</sup>,  $T_m = 3.8 \times 10^{-7}$  с (а), после включения модуляции распределения потерь в слое среды при  $g_{0v} = 2.387 \times 10^{-3}$  см<sup>-1</sup>,  $A_m = 5.0 \times 10^{-4}$  см<sup>-1</sup> (б, в) ( $T_m = 3.8 \times 10^{-7}$  с (б) и  $2.2 \times 10^{-7}$  с (в)).

щью схемы второго порядка аппроксимации, и сделанные относительно хаотических колебаний выводы являются предварительными. В-четвертых, расчеты показали, что двухмодовая генерация возникает под влиянием возмущений потерь в слое активной среды (7) при скоростях накачки ниже порога одномодовой генерации (для однородной скорости накачки) (рис.4). В этом случае начальные условия для распределений  $F(x, 0, 0)$ ,  $B(x, L, 0)$  и  $g(x, 0, 0)$  имели максимальные значения на шумовом уровне ( $\sim 10^{-14}$ ) и переходные процессы в схеме продолжались в течение сотен микросекунд.

Период колебаний проекции интенсивности  $I_1$  совпадал с периодом введенных возмущений. Амплитуда уставновившихся колебаний проекции интенсивности  $I_1$  имела максимум при периоде возмущения, равном периоду биений фундаментальной и первой мод незаполненного резонатора  $T_{\text{empt}}$  (рис.5,а, в), и нарастала с увеличением амплитуды возмущения (рис.5,б, г).

Возникновение колебаний  $I_1$  и  $g_1$  под влиянием нестационарных неоднородных возмущений распределений скорости накачки и потерь в слое среды приводило к изменениям величин  $I_0$  и  $g_0$  (рис.6); показаны только

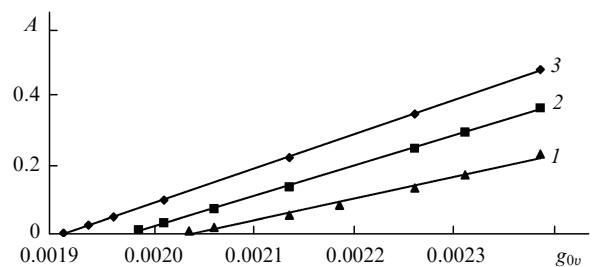


Рис.4. Зависимости амплитуды  $A$  установившихся колебаний  $I_1(t)$  от заданной скорости накачки  $g_{0v}$  при  $A_m = 1.0 \times 10^{-4}$  (1),  $3.0 \times 10^{-4}$  (2) и  $5.0 \times 10^{-4}$  см<sup>-1</sup> (3);  $T_m = 3.8 \times 10^{-7}$  с.

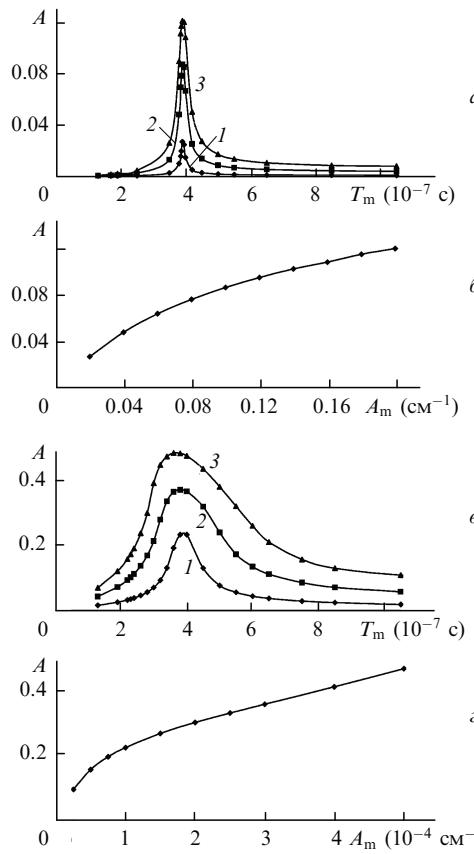


Рис.5. Зависимости амплитуды  $A$  установившихся колебаний  $I_1(t)$  от периода  $T_m$  возмущения при модуляции распределения скорости накачки,  $g_{0v} = 1.992 \times 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ,  $T_{\text{empt}} = 3.9 \times 10^{-7} \text{ с}$  ( $A_m = 0.199 \times 10^{-3}$  (1),  $0.996 \times 10^{-3}$  (2) и  $1.992 \times 10^{-3} \text{ см}^{-1}$  (3)) (а), от амплитуды возмущения  $A_m$  при модуляции распределения скорости накачки,  $g_{0v} = 1.992 \times 10^{-3} \text{ см}^{-1}$  и  $T_{\text{empt}} = 3.9 \times 10^{-7} \text{ с}$  (б), от периода  $T_m$  возмущения при модуляции распределения потерь в слое среды,  $g_{0v} = 2.387 \times 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ,  $T_{\text{empt}} = 3.8 \times 10^{-7} \text{ с}$  ( $A_m = 1.0 \times 10^{-4}$  (1),  $3.0 \times 10^{-4}$  (2) и  $5.0 \times 10^{-4} \text{ см}^{-1}$  (3)), постоянные потери в слое равны  $5.0 \times 10^{-4} \text{ см}^{-1}$  (в) и от амплитуды возмущения  $A_m$  при модуляции распределения потерь в слое среды,  $g_{0v} = 2.387 \times 10^{-3} \text{ см}^{-1}$  и  $T_{\text{empt}} = 3.8 \times 10^{-7} \text{ с}$  (г).

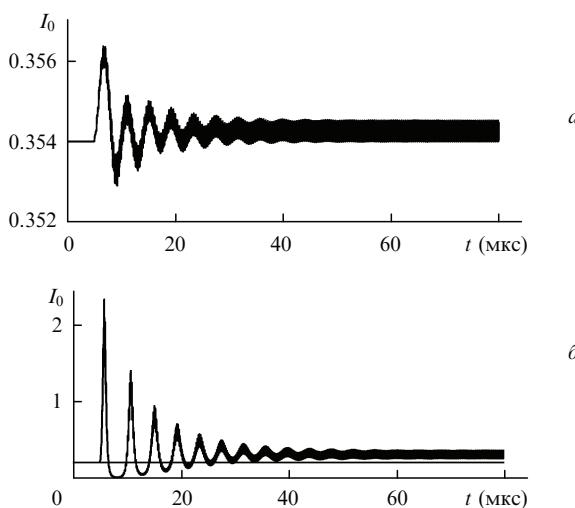


Рис.6. Динамика  $I_0(t)$  в течение первых 75 мкс после включения модуляции распределения скорости накачки при  $g_{0v} = 1.992 \times 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ,  $T_m = 3.8 \times 10^{-7} \text{ с}$ ,  $A_m = 0.996 \times 10^{-3} \text{ см}^{-1}$  (а) и после включения модуляции распределения потерь в слое среды при  $g_{0v} = 2.387 \times 10^{-3} \text{ см}^{-1}$  ( $T_m = 3.8 \times 10^{-7} \text{ с}$ ,  $A_m = 5.0 \times 10^{-4} \text{ см}^{-1}$ ) (1) и без включения модуляции распределения потерь (2) (б).

зависимости  $I_0$ ). Особенно значительными были изменения при модуляции потерь в слое среды. В этом случае при  $t < t^*$  величина  $I_0$  могла увеличиваться от уровня  $I_0 = \text{const}$  в десять раз (рис.6, б, первый пик). В результате релаксационного процесса устанавливались колебания  $I_0$  и увеличивалась средняя по времени интенсивность генерации фундаментальной моды.

#### 4. О контроле модового состава генерации

В предыдущем разделе показано, что появление нестационарных неоднородных возмущений распределений скорости накачки или потерь в слое среды приводит к возникновению двухмодовой генерации. Схема контроля модового состава генерации должна сигнализировать о появлении первой моды и оценить величины проекций  $I_{0,1}(t)$  по сигналам датчиков. Как и в работе [6], определить появление первой моды можно по разностному сигналу  $D_{\min}(t) = |I_4(t) - I_5(t)| \geq 0$ . Сложнее, однако, установить правила, по которым схема контроля модового состава генерации должна оценить зависимо-

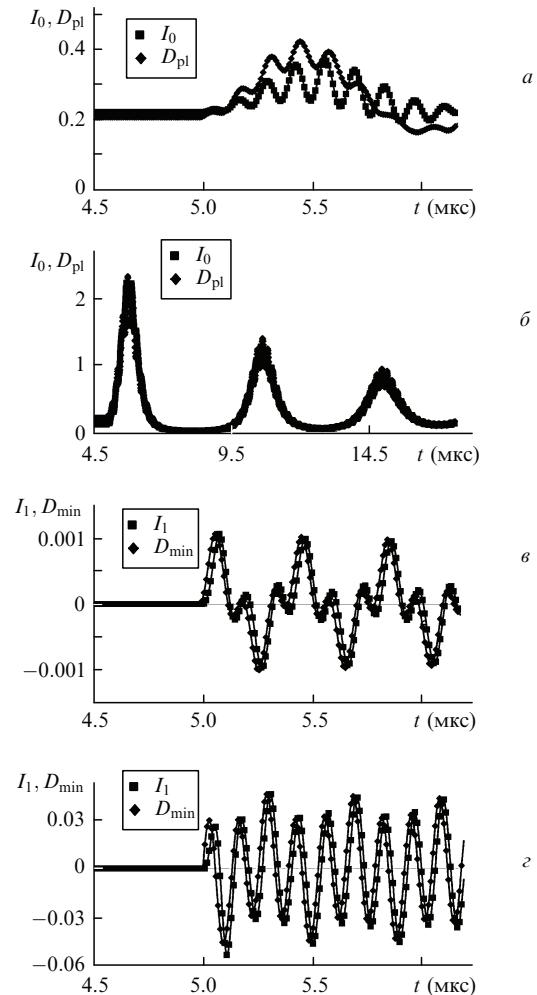


Рис.7. Зависимости  $I_0(t)$  и  $\alpha D_{\text{pl}}(t) + \delta_1$  при модуляции распределения потерь в слое среды и  $g_{0v} = 2.387 \times 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ,  $T_m = 2.6 \times 10^{-7} \text{ с}$ ,  $A_m = 5.0 \times 10^{-4} \text{ см}^{-1}$ ,  $\alpha = 5.04$ ,  $\delta_1 = 0.184$  (а) и  $g_{0v} = 2.387 \times 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ,  $T_m = 3.8 \times 10^{-7} \text{ с}$ ,  $A_m = 5.0 \times 10^{-4} \text{ см}^{-1}$ ,  $\alpha = 2.12$ ,  $\delta_1 = 0$  (б), а также зависимости  $I_1(t)$  и  $\beta D_{\min}(t) + \delta_2$  при модуляции распределения скорости накачки и  $g_{0v} = 1.992 \times 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ,  $T_m = 1.3 \times 10^{-7} \text{ с}$ ,  $A_m = 0.996 \times 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ,  $\alpha = -10.1$ ,  $\delta_2 = 0$  (в) и при модуляции распределения потерь в слое среды и  $g_{0v} = 2.387 \times 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ ,  $T_m = 1.3 \times 10^{-7} \text{ с}$ ,  $A_m = 5.0 \times 10^{-4} \text{ см}^{-1}$ ,  $\alpha = -9.39$ ,  $\delta_2 = 0$  (г).

сти  $I_{0,1}(t)$ . В работе [6] определение  $I_{0,1}(t)$  опиралось на расчет процесса установления биений при известном превышении скорости накачки над порогом  $k$ . Сходным образом можно поступить и в данном случае. Предположим, что возмущение (7) имеет известную амплитуду  $A$  (например, оно создано искусственно) и проведен расчет процесса установления биений. Тогда суммарный ( $D_{\text{pl}}(t) = I_4(t) + I_5(t)$ ) и разностный ( $D_{\text{min}}(t) = |I_4(t) - I_5(t)| \geq 0$ ) сигналы можно приблизить к  $I_0(t)$  и  $I_1(t)$  с помощью линейных преобразований  $\alpha D_{\text{pl}}(t) + \delta_0$  и  $\beta D_{\text{min}}(t) + \delta_1$ . К операциям, выполняемым процессором [6], в результате добавляется сложение, что не должно приводить к существенному увеличению времени расчета, а значения  $\alpha, \beta, \delta_0$  и  $\delta_1$  извлекаются из базы данных. Такой способ аппроксимации  $I_{0,1}(t)$  использовался для различных типов возмущений с разными периодами и амплитудами. Результаты преобразований показаны на рис.7; видно, что  $I_0(t) \approx \alpha D_{\text{pl}}(t) + \delta_0$  и  $I_1(t) \approx \beta D_{\text{min}}(t) + \delta_1$  с удовлетворительной точностью. При неизвестных характеристиках возмущения коэффициенты  $\alpha, \delta_0, \beta, \delta_1$  получить не удается. Тем не менее схема контроля может давать важную качественную информацию о появлении биений, об относительном росте их амплитуды и о появлении релаксационных колебаний фундаментальной моды.

## 5. Заключение

Генерация лазеров, используемых в современных технологических процессах и находящихся под действием

механических вибраций, возмущений в электрических цепях накачки и сложных процессов в активной среде, может существенно отличаться от модельных представлений теории. Проведенные в работе численные исследования показали, что такие характеристики, как пороги однотоновой и двухмодовой генерации для невозмущенной накачки и стационарных потерь, имеют ограниченную область применимости. Выявлена также возможность перевода генерации лазера в хаотический режим при антисимметричной пространственной модуляции потерь излучения в слое среды по гармоническому закону (7). Исследование схемы контроля генерации, использующей два датчика, показало, что ее возможности достаточны для определения характеристик двухмодовой генерации при наличии возмущений.

1. Ханин Я.И. *Основы динамики лазеров* (М.: Наука 1999).
2. Ковальчук Л.В., Шерстобитов В.Е. *Квантовая электроника*, **4**, 2166 (1977).
3. Ковальчук Л.В., Сергеев В.В., Шерстобитов В.Е. *Квантовая электроника*, **6**, 1164 (1979).
4. Ковальчук Л.В., Малахов Л.Н., Шерстобитов В.Е. и др. *Квантовая электроника*, **10**, 397 (1983).
5. Елкин Н.Н. *Математическое моделирование*, **10** (4), 91 (1998).
6. Кумар Н., Леденев В.И. *Квантовая электроника*, **40**, 363 (2010).
7. Звелто О. *Принципы лазеров* (М.: Мир, 1990).
8. Coates A.B., Weiss C.O., Green C., et al. *Phys. Rev. A*, **49**, 1452 (1994); Brambilla M., Cattaneo M., Lugiato L.A., et al. *Phys. Rev. A*, **49**, 1427 (1994).
9. Марчук Г.И. *Методы расщепления* (М.: Наука, 1988).