

# Аналитическое описание гауссова пучка в кольцевом резонаторе с некомпланарным осевым контуром и нечётным числом зеркал

А.Б.Плаченнов, А.М.Радин

*Аналитически исследованы условия устойчивости для кольцевого резонатора с нечётным числом зеркал и неплоским осевым контуром. Получены явные формулы, описывающие поперечное распределение поля формирующейся в таком резонаторе гауссовой моды со сложным астигматизмом. Проведены расчёты характеристик поля для резонатора с выбранными параметрами.*

**Ключевые слова:** кольцевой резонатор, неплоский контур, гауссов пучок, сложный астигматизм.

1. В кольцевых резонаторах с неплоским осевым контуром (см., напр., [1–14]) формируется основная мода в виде гауссова пучка с астигматизмом общего вида. В этом случае выражение для функции, в нулевом приближении по волновому числу  $k$  описывающей поперечное распределение поля основной моды в некотором сечении резонатора, имеет вид (в скалярной постановке задачи, без учёта поляризации)

$$u(r) = c \exp\left(ik \frac{r^t H r}{2}\right),$$

где

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad r^t = (x \quad y),$$

элементы матрицы квадратичной формы

$$H = \begin{pmatrix} 1/q_x & 1/q_{xy} \\ 1/q_{xy} & 1/q_y \end{pmatrix}$$

и числовой множитель  $c$  зависят от продольной координаты  $z$ . Матрица  $H$  симметрична и для сосредоточенного в окрестности оси резонатора пучка имеет положительно определённую мнимую часть. В случае аксиально-симметричного пучка матрица  $H$  пропорциональна единичной матрице ( $q_x = q_y = q$ ,  $1/q_{xy} = 0$ ), в противном случае говорят, что пучок обладает астигматизмом. Астигматизм называют простым, если в некоторой системе координат матрица  $H$  имеет диагональный вид: в этом случае у матриц  $\text{Re}H$  и  $\text{Im}H$  совпадают направления собственных векторов, т. е. главные оси так называемых эллипсов

фазы и интенсивности, вдоль которых естественно направить и оси координат. При распространении такого пучка вдоль оптической оси матрица  $H$  остаётся диагональной для всех значений продольной координаты  $z$ . В случае же сложного астигматизма главные оси эллипсов интенсивности и фазы направлены под некоторым углом друг к другу, и никаким выбором координатных осей нельзя одновременно привести матрицы  $\text{Re}H$  и  $\text{Im}H$  к диагональному виду. Кроме того, направления этих осей различны для разных значений  $z$  (см., напр., [11–16]), в связи с чем такие пучки иногда называют вращающимися.

Пусть  $w_{1,2}$  – полуоси эллипса интенсивности, на границе которого амплитуда поля уменьшается в  $e$  раз по сравнению с её значением на оси [7], тогда собственные числа матрицы  $\text{Im}H$  равны  $2/(kw_{1,2}^2)$ . (Отметим, что если границей эллипса интенсивности, как в [11], считать кривую, на которой в  $e$  раз уменьшается не амплитуда, а плотность энергии пучка, пропорциональная квадрату амплитуды, то полуоси такого эллипса оказываются в  $\sqrt{2}$  раз меньше, и тогда собственные числа  $\text{Im}H$  равны  $1/(kw_{1,2}^2)$ .) Собственные числа  $\text{Re}H$  имеют смысл главных кривизн волнового фронта пучка и равны  $\rho_{1,2}^{-1}$ , где  $\rho_{1,2}$  – главные радиусы кривизны, взятые со знаком «плюс» для расходящегося пучка и «минус» для сходящегося; в случае, когда фронт имеет форму седла, эти радиусы имеют разные знаки. В дальнейшем при совпадении направлений собственных векторов матриц с осями координат мы будем, наряду с числовыми, использовать буквенные индексы  $x, y$ .

Матрица квадратичной формы  $H$  удовлетворяет уравнению

$$HBH + HA = DH + C, \quad (1)$$

где  $A, B, C, D$  – вещественные (для пассивного резонатора без потерь) матрицы размерностью  $2 \times 2$ , в совокупности составляющие лучевую матрицу  $T$  полного обхода резонатора (матрицу монодромии [3]) размерностью  $4 \times 4$ :

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

**А.Б.Плаченнов.** Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), Россия, 117454 Москва, просп. Вернадского, 78; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, Россия, 197101 С.-Петербург, Кронверкский просп., 49; e-mail: a\_plachenov@mail.ru

**А.М.Радин.** Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий, Россия, 191002 С.-Петербург, ул. Ломоносова, 9; e-mail: amradin@mail.ru

Уравнение (1) вытекает из соотношения [9]

$$H_{\text{out}} = \frac{C + DH_{\text{in}}}{A + BH_{\text{in}}},$$

описывающего преобразование гауссова пучка при его прохождении через систему, характеризуемую матрицей  $T$ , и из условия восстановления пучка после обхода резонатора:  $H_{\text{out}} = H_{\text{in}} = H$ . Матрица  $T$  является симплектической [3, 9], что эквивалентно выполнению условия

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} D' & -B' \\ -C' & A' \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Резонатор устойчив по первому приближению, если все собственные числа матрицы  $T$  по модулю равны единице и отсутствуют присоединённые векторы [1]. В этом случае уравнение (1) имеет симметричное решение с положительной мнимой частью. Такое решение можно выразить через компоненты собственных векторов матрицы монодромии [17, 1, 3–5, 9, 18–20]. Другой подход [11] основан на анализе эволюции гауссова пучка со сложным астигматизмом и на том обстоятельстве, что такой пучок представляет собой моду линейного резонатора, зеркала которого совпадают с фронтами пучка. Наконец, матричное уравнение (1) (или вытекающая из него система алгебраических уравнений относительно элементов матрицы  $H$  [6]) может быть решено численно, с последующим выбором того решения, которое обеспечивает сосредоточенность поля в окрестности оптической оси. В случае резонатора с гауссовой диафрагмой (гауссовым зеркалом) решение может быть найдено методом простой итерации [12].

В настоящей работе для задачи о резонаторе с нечётным числом зеркал, одно из которых неплоское (например, сферическое), предлагается альтернативное решение, в котором описание поля даётся аналитически, с помощью явных формул; искать собственные векторы матрицы  $T$  при этом не требуется. Нам представляется, что такое описание позволяет наиболее наглядно проследить зависимость характеристик светового поля от параметров резонатора. Аналогичная задача для резонатора с чётным числом зеркал была решена в работе [14], краткий предварительный анализ различий между случаями чётного и нечётного числа зеркал дан в [13].

2. Рассмотрим многозеркальный кольцевой резонатор с нечётным числом зеркал и неплоским (вообще говоря) осевым контуром, длину которого обозначим через  $L$ . Резонатор содержит фокусирующий элемент, в качестве которого может выступать, например, линза или одно из зеркал (сферическое или эллиптическое); остальные зеркала мы считаем плоскими.

Распространение излучения вдоль контура описывается матрицей

$$T_L = \begin{pmatrix} E & LE \\ O & E \end{pmatrix},$$

где  $O$  и  $E$  – нулевая и единичная матрицы  $2 \times 2$ . Матрица, описывающая отражение от плоского зеркала, при надлежащем выборе систем координат является единичной; при каждом отражении ориентация системы координат изменяется и, следовательно, изменяется направление отсчёта углов (против или по часовой стрелке).

Прохождение излучения через фокусирующий элемент (квадратичный фазовый корректор [11]) описывается матрицей

$$T_\Psi = \begin{pmatrix} E & O \\ -\Psi & E \end{pmatrix},$$

где  $\Psi$  – некоторая симметричная матрица  $2 \times 2$ , которую для простоты без ограничения общности рассмотрения будем считать диагональной:  $\Psi = \text{diag}[\psi_x, \psi_y]$ ; в противном случае её можно привести к диагональному виду поворотом координатных осей. Для фокусирующей линзы  $\psi_{x,y} = 1/f_{x,y}$ , где  $f_{x,y}$  – фокусные расстояния; для линзы без астигматизма  $f_x = f_y = f$ . Для эллиптического зеркала, у которого одна из главных осей лежит в плоскости падения (плоскости  $xz$ ), а другая ей ортогональна (направлена вдоль оси  $y$ ),  $\psi_x = 2(R_x \cos \alpha')^{-1}$ ,  $\psi_y = 2R_y^{-1} \times \cos \alpha'$ , где  $\alpha' = \alpha/2$  – угол падения,  $\alpha$  – угол между падающим и отражённым осевыми лучами,  $R_{x,y}$  – радиусы кривизны. Для сферического зеркала  $R_x = R_y = R$ ; этому случаю будет в дальнейшем уделено особое внимание.

Поскольку общее число зеркал в рассматриваемой задаче нечётное, в результате полного обхода резонатора происходит изменение ориентации системы координат, так что соответствующее преобразование описывается коммутирующей с  $T_L$  лучевой матрицей

$$T_V = \begin{pmatrix} V_\phi & O \\ O & V_\phi \end{pmatrix},$$

где

$$V_\phi = \begin{pmatrix} -\cos \phi & -\sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = -(\cos \phi)I - (\sin \phi)\sigma \quad (3)$$

– матрица оператора отражения от некоторой прямой, лежащей в плоскости  $xy$ ;  $\phi$  – удвоенный угол между осью ординат и этой прямой (рис.1);

$$I = \text{diag}[1, -1]; \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Отметим, что значения  $\phi$  в настоящей работе и в [13] различаются знаком.) В частности, в случае, когда контур плоский, указанная прямая ортогональна плоскости контура, и если её направление совпадает с осью  $y$ , то  $\phi = 0$ , и преобразование (3) сводится к изменению направления оси  $x$ . Однако ось  $y$  может иметь и другое на-

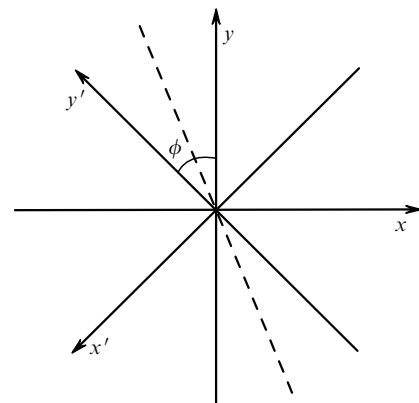


Рис.1. Преобразование системы координат при обходе резонатора.

правление (напомним, что координатные оси мы связали с направлениями собственных векторов матрицы  $\Psi$ ), тогда  $\phi \neq 0$ , и задача в математическом плане не отличается от задачи для случая неплоского контура. Аналогичным образом и в общем случае угол  $\phi$  также определяется не только геометрическими характеристиками контура, но и – через направления координатных осей – свойствами фокусирующего элемента. В этом важное качественное отличие исследуемой задачи от рассмотренной в [14] для резонатора с чётным числом зеркал.

Матрицы монодромии  $T_-$  и  $T_+$  в сечениях пучка, расположенных непосредственно до и после фокусирующего элемента, вычисляются по формулам

$$T_- = T_V T_L T_\Psi = \begin{pmatrix} V_\phi(E - L\Psi) & LV_\phi \\ -V_\phi\Psi & V_\phi \end{pmatrix},$$

$$T_+ = T_\Psi T_V T_L = \begin{pmatrix} V_\phi & LV_\phi \\ -\Psi V_\phi & (E - L\Psi)V_\phi \end{pmatrix}$$

(в обоих случаях используется первоначальная система координат). Особенно удобный вид имеет симметризованная матрица

$$T_0 = T_{\Psi/2} T_V T_L T_{\Psi/2} = \begin{pmatrix} V_\phi G & LV_\phi \\ (-V_\phi + G V_\phi G)/L & G V_\phi \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$G = E - L\Psi/2 = \text{diag}[\gamma + \delta, \gamma - \delta] = \gamma E + \delta I$$

– безразмерная симметричная диагональная матрица;  $\gamma = 1 - (\psi_x + \psi_y)L/4$ ;  $\delta = (\psi_y - \psi_x)L/4$ . Матрица  $\Psi$ , выраженная через  $\gamma$  и  $\delta$ , имеет вид  $\Psi = 2L^{-1}[(1 - \gamma)E - \delta I]$ .

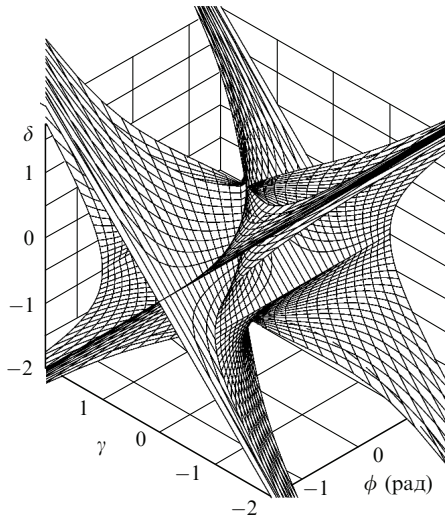


Рис.2. Область устойчивости в пространстве параметров  $\gamma, \delta, \phi$  при  $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Вдоль оси  $\phi$  фигура воспроизводится периодически.

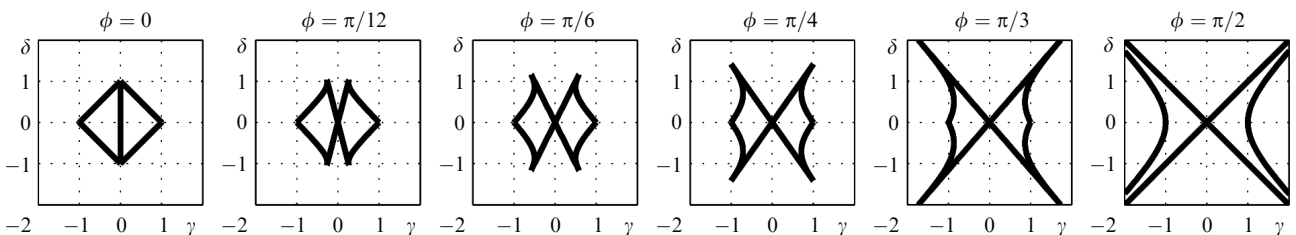


Рис.3. Области устойчивости на плоскости  $\gamma\delta$  при различных значениях  $\phi$ .

Характеристические уравнения для  $\lambda$  – собственных чисел матриц монодромии – приводятся к виду

$$v^2 + (2\delta \cos \phi)v - (\gamma^2 - \delta^2) = 0,$$

где  $v = (\lambda + \lambda^{-1})/2$  – собственные числа матриц вида  $(T + T^{-1})/2$ , а также матрицы  $V_\phi G$  (последнее обстоятельство следует из выражений (2), (4)).

Достаточные условия устойчивости для матриц  $T_\pm$  (значения  $\lambda$  лежат на единичной окружности и различны, значения  $v$  лежат в интервале  $(-1, 1)$  и также различны) имеют вид

$$-1 + 2|a| < \delta^2 - \gamma^2 < a^2 < 1, \quad (5)$$

где

$$a = \delta \cos \phi.$$

Необходимые условия ( $|\lambda| = 1$ ) получаются заменой в (5) строгих неравенств нестрогими.

В пространстве трёх переменных  $(\phi, \gamma, \delta)$  область (5) симметрична относительно плоскостей  $\phi = n\pi/2$  ( $n$  – целое число),  $\gamma = 0, \delta = 0$  и относительно точек  $(n\pi/2, 0, 0)$ , а также периодична по  $\phi$  с периодом  $\pi$ . Общий вид области (5) для  $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$  приведён на рис.2 (уходящие на бесконечность ветви обрезаны). Область (5) разделяется на подобласти (компоненты связности) – по две компоненты (для положительных и отрицательных значений  $\gamma$ ) в каждом периоде  $\phi \in (n\pi, (n+1)\pi)$ . Случаи кратных значений  $\lambda$ , отвечающие точкам на граничных поверхностях

$$|\gamma| = |\delta \sin \phi|, \quad (6)$$

$$\gamma^2 = \delta^2 - 2|\delta \cos \phi| + 1, \quad (7)$$

требуют отдельного рассмотрения в связи с возможностью появления присоединённых векторов. Как показывает анализ, из всех граничных точек условия устойчивости выполняются только в точках на прямой  $\gamma = \delta = 0$  и на прямолинейных участках  $\phi = n\pi, \gamma = 0, \delta \in (-1, 1)$ , соединяющих подобласти множества (5). Таким образом, с учётом этих точек множество значений параметров, при которых резонатор устойчив, оказывается связным.

Сечения области (5) в координатах  $\gamma, \delta$  при различных значениях  $\phi$  приведены на рис.3. В случае  $\phi = n\pi$  эта область представляет собой квадрат  $|\gamma| + |\delta| < 1$ , или  $0 < \psi_{1,2}L < 4$ ; вертикальная ( $\gamma = 0$ ) диагональ этого квадрата лежит на границе трёхмерной области (5). При  $0 < |\cos \phi| < 1$ , как указано выше, область устойчивости распадается на две подобласти, ограниченные отрезками прямых  $|\gamma| = |\delta \sin \phi|$  и дугами гипербола  $\gamma^2 = (|\delta| - |\cos \phi|)^2 + \sin^2 \phi$ , которые касаются прямых в своих крайних точках с координатами  $\delta = \pm \cos^{-1} \phi, \gamma =$

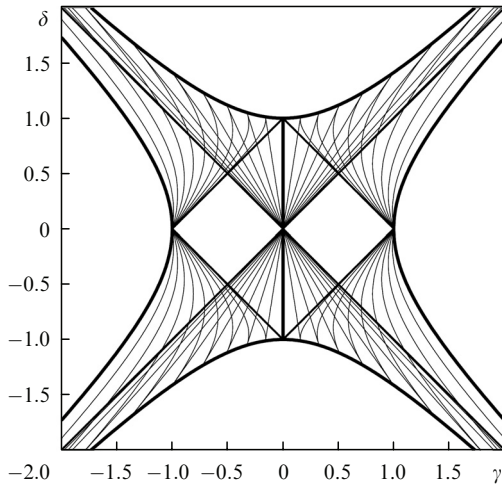


Рис.4. Проекция области устойчивости на плоскость  $\gamma\delta$ . Тонкие линии – границы областей устойчивости для различных  $\phi$  с шагом  $5^\circ$ .

$\pm \tan \phi$ . При  $\phi \in \pi/2 + n\pi$  эти подобласти становятся неограниченными: прямые  $\gamma = \pm\delta$  являются уже не касательными, а асимптотами гиперболы  $\gamma^2 - \delta^2 = 1$ .

На рис.4 изображена проекция фигуры на рис.2 на плоскость  $\gamma\delta$  – двумерная область, ограниченная гиперболами  $\gamma^2 - \delta^2 = \pm 1$  и представляющая собой объединение областей устойчивости при всех возможных значениях  $\phi$ . Сформулируем условия устойчивости относительно  $|\cos \phi|$  для различных подмножеств этой области. Для точек, лежащих на отрезках  $\gamma = 0, 0 < |\delta| < 1$ , резонатор устойчив только при  $\phi = n\pi$  ( $|\cos \phi| = 1$ ). В треугольниках  $|\gamma| < |\delta| < 1 - |\gamma|, 0 < |\gamma| < 1/2$  условие устойчивости имеет вид  $|\sin \phi| < |\gamma/\delta|$  (т.е.  $|\cos \phi| > [1 - (\gamma/\delta)^2]^{1/2}$ ). В областях  $1/2 + ||\delta| - 1/2| < |\gamma| < (1 + \delta^2)^{1/2}$  резонатор устойчив, если  $|\cos \phi| < (1 + \delta^2 - \gamma^2)/(2|\delta|)$ . В областях  $1/2 + ||\gamma| - 1/2| < |\delta| < (1 + \gamma^2)^{1/2}$  должны выполняться два последних условия:  $[1 - (\gamma/\delta)^2]^{1/2} < |\cos \phi| < (1 + \delta^2 - \gamma^2)/(2|\delta|)^{-1}$ . Наконец, для точек внутри квадратов  $|\delta| < 1/2 + ||\gamma| - 1/2|$  резонатор устойчив при любых значениях  $\phi$ . Приведём также условия устойчивости на разделительных линиях и в точках их пересечения:  $\phi \neq (n + 1/2)\pi$  ( $|\cos \phi| \neq 0$ ) при  $0 < |\delta| = |\gamma| < 1/2$ ;  $\phi \neq n\pi$  ( $|\cos \phi| \neq 1$ ) при  $0 < |\delta| = 1 - |\gamma| < 1/2$ ;  $0 < |\cos \phi| < 1/(2|\delta|)$  при  $|\delta| = |\gamma| > 1/2$ ;  $(2|\delta| - 1)^{1/2}/|\delta| < |\cos \phi| < 1$  при  $1/2 < |\delta| = 1 - |\gamma| < 1$ ;  $\phi \neq n\pi/2$  ( $|\cos \phi| \neq 0, 1$ ) при  $|\delta| = |\gamma| = 1/2$ ; при  $|\delta| = |\gamma| = 0$  резонатор устойчив при любом  $\phi$ .

Легко убедиться в том, что за исключением сечений  $\phi = n\pi/2$ , когда  $|\cos \phi|$  обращается в нуль или единицу, геометрия области устойчивости разительно отличается от той, которая имеет место в случае резонатора с чётным числом зеркал [13, 14].

**3.** Весьма часто в качестве фокусирующего элемента используется сферическое зеркало. В этом случае  $\gamma = 1 - (\cos \alpha' + \cos^{-1} \alpha')L/(2R)$ ,  $\delta = (\cos \alpha' - \cos^{-1} \alpha')L/(2R)$ . Видно, что рассматриваемому случаю соответствует на плоскости  $\gamma\delta$  сектор  $\gamma < 1, \gamma - 1 < \delta < 0$ ; все прочие точки, входящие в область устойчивости, требуют использования зеркала иной формы (либо линзы).

Кривыми, объединяющими точки с одинаковыми значениями  $R$  при всех возможных углах падения, являются дуги гипербол  $\delta = -[(1 - \gamma)^2 - (L/R)^2]^{1/2}$ , а линии, отвечающие фиксированному углу падения при различных  $R$ , – это лучи

$$\delta = \frac{(\gamma - 1) \sin^2 \alpha'}{1 + \cos^2 \alpha'} \tag{8}$$

(при  $\gamma < 1$ ). Такие лучи при любых значениях  $\alpha$  и  $\phi$  пересекают правую подобласть области устойчивости; этому соответствуют значения

$$\frac{L}{R} < \frac{2}{(\cos \alpha' + \cos^{-1} \alpha') - |\sin \phi|(\cos \alpha' - \cos^{-1} \alpha')}.$$

Кроме того, если

$$\frac{\cos \alpha' - \cos^{-1} \alpha'}{\cos \alpha' + \cos^{-1} \alpha'} < \frac{1}{|\cos \phi| + |\sin \phi|}, \tag{9}$$

луч пересекает также и левую подобласть при

$$\frac{2}{(\cos \alpha' + \cos^{-1} \alpha') + |\sin \phi|(\cos \alpha' - \cos^{-1} \alpha')} < \frac{L}{R}$$

$$< (\cos \alpha' + \cos^{-1} \alpha') + |\cos \phi|(\cos \alpha' - \cos^{-1} \alpha').$$

Таким образом, для резонатора с нечётным числом зеркал в зависимости от  $\alpha$  и  $\phi$  существует один или два интервала значений  $R$ , при которых резонатор оказывается устойчивым. Последний случай показан на рис.5; на рис.6 ему соответствуют такие  $\alpha$  и  $\phi$ , для которых перпендикуляр, восстановленный из точки на оси абсцисс (на рис.6 не показан) пересекает обе подобласти области устойчивости. В подавляющем большинстве случаев так оно и есть: наименьшее значение правой части неравенства (9) равно  $1/\sqrt{2}$ , в то время как выражение в левой части этого неравенства (угловой коэффициент для луча (8)) оказывается меньше  $1/\sqrt{2}$ , если только  $|\cos \alpha'| > \sqrt{2} - 1$ , и тогда неравенство выполняется при всех  $\phi$ . Луч (8) в этом случае проходит выше гиперболы  $\delta = (1 + \gamma^2)^{1/2}$  (нижней границы фигуры на рис.4), на которой расположены угловые точки областей устойчивости при всех возможных  $\phi$ , и при произвольном  $\phi$  он пересекает левую подобласть этой области. Противоположная ситуация – единственный интервал значений  $R$ , при которых луч пересекает гиперболу и для некоторых  $\phi$  оказывается

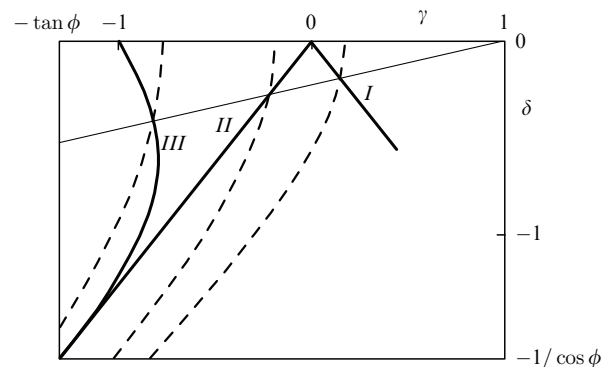


Рис.5. Область устойчивости на плоскости  $\gamma\delta$  для резонатора со сферическим зеркалом. Прямая  $\alpha = \text{const}$  (тонкая сплошная линия) пересекает обе подобласти, гиперболы  $R = \text{const}$  (штриховые кривые) проходят через точки пересечения этой прямой с границами области устойчивости  $L/R = 2/[|\cos \alpha' + \cos^{-1} \alpha'| - |\sin \phi|(\cos \alpha' - \cos^{-1} \alpha')]$  (I),  $L/R = 2/[|\cos \alpha' + \cos^{-1} \alpha'| + |\sin \phi|(\cos \alpha' - \cos^{-1} \alpha')]$  (II) и  $L/R = 2/[|\cos \alpha' + \cos^{-1} \alpha'| + |\cos \phi|(\cos \alpha' - \cos^{-1} \alpha')]$  (III). Точка обрыва прямой I соответствует значению  $\alpha = \pi$  (касательное падение луча на зеркало).

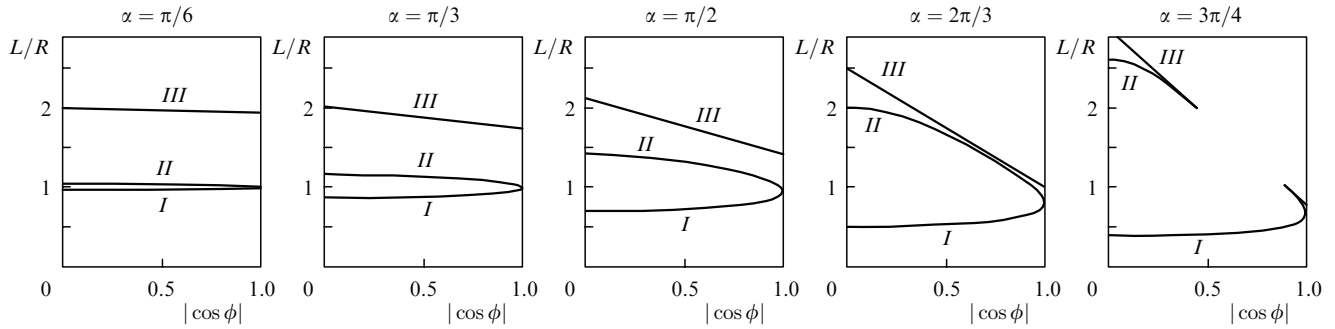


Рис.6. Области устойчивости (ниже кривой *I* и между кривыми *II* и *III*) и неустойчивости (между кривыми *I* и *II* и выше кривой *III*) для резонатора со сферическим зеркалом при различных углах  $\alpha$ . Уравнения для границ *I*, *II*, *III* – те же, что и для рис.5.

целиком ниже указанной подобласти, – имеет место лишь в случае достаточно больших (превышающих  $131^\circ 3' 37''$ ) значений  $\alpha$ .

4. Вернёмся теперь к общему случаю и запишем выражения для матриц  $H_{\mp}$ , отвечающих сечениям, расположенным непосредственно до и после фокусирующего элемента:

$$H_{\mp} = H_0 \pm \frac{\Psi}{2}, \quad (10)$$

где  $H_0$  – чисто мнимая (для внутренних точек области (5)) симметричная матрица вида

$$H_0 = \frac{i[2aG + (1 - \gamma^2 + \delta^2 - d)V_{\phi}]}{Lt} \text{sign}(\gamma a). \quad (11)$$

Здесь величины  $d$  и  $t$ , совпадающие по модулю соответственно с определителем и следом матрицы  $LV_{\phi} \text{Im} H_0$ , определяются равенствами

$$d = \sqrt{(1 - \gamma^2 + \delta^2)^2 - 4a^2}, \quad (12)$$

$$t = \sqrt{2(1 - \gamma^2 + \delta^2 - 2a^2 - d)}. \quad (13)$$

Значение  $d$  обращается в нуль на поверхности (7), а значение  $t$  – на поверхности (6), на плоскости  $\delta = 0$ , а также при  $\cos \phi = 0$  ( $\phi = (n + 1/2)\pi$ ). На поверхности (7) величина  $t(d = 0) = 2[|a|(1 - |a|)]^{1/2}$ , а на поверхности (6) величина  $d(t = 0) = 1 - |a|^2$ . Наибольшее значение  $d$  в замкнутой области (5) равно единице и достигается при  $|\gamma| = |\delta|$  и  $a = 0$ , т.е. при  $\cos \phi = 0$  на прямых  $|\gamma| = |\delta|$  либо в начале координат плоскости  $\gamma\delta$ . Наибольшее значение  $t$  также равно единице и достигается на поверхности (7) при  $|a| = 1/2$ .

Функция  $d$  может быть представлена в виде произведения:

$$d = u_+ u_-,$$

где

$$u_{\pm} = \sqrt{1 - \gamma^2 + \delta^2 \pm 2a}. \quad (14)$$

Функция  $t$  также выражается через  $u_{\pm}$ :

$$t = |u_+ - u_-| \sqrt{1 - \frac{(u_+ + u_-)^2}{4}}.$$

На каждом участке границы (7) обращается в нуль множитель

$$u_{<} = \min\{u_+, u_-\} = \sqrt{1 - \gamma^2 + \delta^2 - 2|a|},$$

при этом другой множитель

$$u_{>} = \max\{u_+, u_-\} = \sqrt{1 - \gamma^2 + \delta^2 + 2|a|}$$

принимает значение  $2\sqrt{|a|}$ .

Матрицы  $H_+$  и  $H_-$  удовлетворяют уравнению (1), где  $A, B, C, D$  суть блоки матриц  $T_+$  и  $T_-$  соответственно. Матрица (11) описывает поперечное распределение поля в эквивалентном резонаторе [7], у которого криволинейное зеркало заменено плоским с примыкающей к нему в сечении, отвечающем плоскому зеркалу, астигматической линзой. Она также удовлетворяет (1); соответствующая матрица монодромии имеет вид (4). Здесь мы не приводим вывода формул (11)–(13): способ, позволяющий в явном виде получать решения уравнений вида (1), подробно изложен в работе [21] (см. также [22, 23]). Проще всего рассмотреть уравнение относительно  $H_0$ ; то обстоятельство, что у матрицы  $T_0$  блок  $B$  симметричен, а блок  $D = A^t$ , заметно облегчает решение уравнения (1), распадающегося в этом случае на систему матричных уравнений

$$H_0 LV_{\phi} H_0 = (-V_{\phi} + GV_{\phi}G)/L, \quad (15)$$

$$H_0 V_{\phi} G = GV_{\phi} H_0, \quad (16)$$

что позволяет воспользоваться упрощённой методикой [24].

Матрица  $\text{Im} H_0$  положительно определена и её собственные числа положительны в области (5), поскольку положительны её след

$$\text{tr} \text{Im} H_0 = \frac{4|\gamma a|}{Lt} \quad (17)$$

и определитель

$$\det \text{Im} H_0 = \frac{d}{L^2} \quad (18)$$

(откуда, между прочим, с учётом условия  $d \leq 1$  следует ограничение на площадь эллипса интенсивности:  $\pi w_1 \times w_2 \geq 2\pi L/k$ ). Углы между собственными векторами этой матрицы, определяющими направления осей эллипса интенсивности, и координатными осями равны

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{1 - \gamma^2 + \delta^2 - d}{1 - \gamma^2 - \delta^2 - d} \tan \phi \right) \quad (19)$$

(с точностью до слагаемого, кратного  $\pi/2$ ).

На границе (7), где  $d = 0$ , площадь этого эллипса, согласно (18), обращается в бесконечность, и резонатор теряет устойчивость. На границе (6), где  $t = 0$ , величина (17) обращается в бесконечность (при ненулевом числителе), а величина (18) ограничена; это значит, что одно из собственных чисел матрицы  $\text{Im } H_0$  обращается в бесконечность, а другое – в нуль, и резонатор также теряет устойчивость. Ниже будет специально рассмотрено поведение матрицы  $H_0$  в окрестности границы области устойчивости, а также при некоторых особых значениях параметров (в частности, тех, при которых обращается в нуль  $t$  (13)).

Что касается матриц  $H_{\pm}$ , то их мнимые части, совпадающие с  $\text{Im } H_0$ , положительно определены, а вещественные, равные  $\mp \Psi/2$ , диагональны в отличие от резонатора с чётным числом зеркал, в котором диагональны мнимые части соответствующих матриц.

5. Формулы (11), (17) не определены при значениях параметров, обращающих в нуль знаменатель. Для того чтобы описать поведение матрицы  $H_0$  при значениях  $\delta$  и  $\cos \phi$ , близких к нулю, преобразуем эти формулы, домножив их числители и знаменатели на сопряжённые выражения. Тогда мы приходим к равенствам

$$H_0 = \frac{it' \text{sign } \gamma}{2L\sqrt{\eta}} (G + \xi V_{\phi}), \quad (20)$$

$$\text{tr } \text{Im } H_0 = \frac{|\gamma|t'}{L\sqrt{\eta}}, \quad (21)$$

где

$$\xi = \frac{2a}{1 - \gamma^2 + \delta^2 + d}$$

по модулю не превышает единицы, значение

$$\eta = \gamma^2 - (\delta \sin \theta)^2 \quad (22)$$

лежит в промежутке между нулём и  $(1 - |a|)^2$ , а

$$t' = \sqrt{2(1 - \gamma^2 + \delta^2 - 2a^2 + d)}. \quad (23)$$

Из равенства  $\gamma^2 - \delta^2 = \eta - a^2$  следует, что

$$d = \sqrt{(1 + a^2 - \eta)^2 - 4a^2},$$

$$t' = \sqrt{2(1 - a^2 - \eta + d)}.$$

Величина  $t'$  обращается в нуль там, где одновременно выполняются равенства  $t = d = 0$ . Это происходит в точках  $\delta = 0$ ,  $|\gamma| = 1$  плоскости  $\gamma\delta$  (при произвольных  $\phi$ ), а также на кривых  $\gamma^2 = \delta^2 + 1$  в сечениях  $\phi = (n + 1/2)\pi$  ( $\cos \phi = 0$ ). При этом  $H_0$  обращается в нулевую матрицу, и эллипс интенсивности неограниченно расширяется по всем направлениям. Все указанные точки лежат на границе (7) области устойчивости (5). Кроме того,  $t' = 0$  на пространственных кривых

$$\delta^2 = \gamma^2 + 1 = \cos^{-2} \phi \quad (24)$$

(точки «заострения» границы области устойчивости, общие для выражений (6) и (7)), на которых, однако, одновременно обращается в нуль и величина  $\eta$  (22) – подкоренное выражение в знаменателях формул (20), (21), поэтому, как видно из (11), (17), матрица  $H_0$  на этих кривых в нуль не обращается, и более того – её элементы и след неограниченно растут. На поверхности (6) величина  $t'(t=0) = [2(1 - a^2)]^{1/2}$ , а на поверхности (7) величина  $t'(d=0) = t'(t=0) = 2[|a|(1 - |a|)]^{1/2}$ . Наибольшее значение  $t'$  в замкнутой области (5) равно двум и достигается при тех же значениях параметров, при которых  $d = 1$ .

Приведём формулы, связывающие использованные в (20) величины с функциями  $u_{\pm}$  (14):

$$\xi = \frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-},$$

$$\eta = \left[ 1 - \frac{(u_+ - u_-)^2}{4} \right] \left[ 1 - \frac{(u_+ + u_-)^2}{4} \right],$$

$$t' = (u_+ + u_-) \sqrt{1 - \frac{(u_+ - u_-)^2}{4}},$$

и тогда

$$H_0 = i \text{sign } \gamma \left[ 2L \sqrt{1 - \frac{(u_+ - u_-)^2}{4}} \right]^{-1} \times [(u_+ + u_-)G + (u_+ - u_-)V_{\phi}],$$

$$\text{tr } \text{Im } H_0 = |\gamma|(u_+ + u_-) \left[ L \sqrt{1 - \frac{(u_+ + u_-)^2}{4}} \right]^{-1}.$$

Преобразуем также формулу (11) для угла  $\theta_0$  так, чтобы исключить неопределённость при  $\delta = 0$  и  $\cos \phi = 0$ :

$$\theta_0 = -\frac{1}{2} \arctan \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{1 - \gamma^2 + \delta^2 - 2 \cos^2 \phi + d}. \quad (25)$$

При  $a = 0$ , когда  $d = 1 - \eta$  и  $t' = 2\sqrt{1 - \eta}$ , матрица (20) обращается в матрицу

$$H_0(a=0) = \frac{i \text{sign } \gamma}{L} \sqrt{\frac{1 - \eta}{\eta}} G.$$

В частности, если  $\cos \phi = 0$ , то  $\eta = \gamma^2 - \delta^2$ ,

$$Y_0(a=0) = \frac{i}{L} \sqrt{\frac{1 - \gamma^2 + \delta^2}{\gamma^2 - \delta^2}} G \text{sign } \gamma,$$

матрицы  $H_0$  и  $H_{\pm}$  диагональны,  $\theta_0(\cos \phi = 0) = 0$  и в резонаторе формируется пучок с простым астигматизмом (при  $\delta \neq 0$ ).

В случае  $\delta = 0$ , когда  $\eta = \gamma^2$ , при произвольном  $\phi$  мы получим

$$H_0(\delta = 0) = iL^{-1} \sqrt{1 - \gamma^2} E \quad (26)$$

(учитывая, что  $d(\delta = 0) = 1 - \gamma^2$ ,  $t'(\delta = 0) = 2(1 - \gamma^2)^{1/2}$ ); в этом случае  $\Psi = 2L^{-1}(1 - \gamma)E$ , астигматизм отсутствует и пучок аксиально симметричен.

Есть, однако, особый случай  $\gamma = \delta = 0$ , когда следующее из (26) решение  $iL^{-1}E$  оказывается не единственным: в этом случае искомым решением является любая матрица вида

$$H_0(\delta - \gamma = 0) = \frac{i}{L} \frac{(1 + \zeta^2)E + 2\zeta V_{\phi+\pi/2}}{1 - \zeta^2}, \quad (27)$$

где  $\zeta$  – комплексный параметр ( $|\zeta| < 1$ ). Это связано с тем, что точки прямой  $\gamma = \delta = 0$  лежат на границе области (5), и матрица  $T_0$  в этих точках имеет кратные собственные значения. Пучки, описываемые матрицами (27), при  $\zeta \neq 0$  обладают простым астигматизмом, при этом  $\theta_0 = \phi/2 + \pi/4$ .

Матрицы семейства (27) тесно связаны с асимптотическим поведением решения  $H_0$  (20) в окрестности указанной прямой: если  $\gamma$  и  $\delta$  одновременно близки к нулю, то (20) в главном приближении совпадает с той из матриц семейства (27), для которой

$$\zeta = (\gamma - \sqrt{\eta} \operatorname{sign} \gamma)(\delta \sin \phi)^{-1}. \quad (28)$$

Варьируя значения  $\gamma$  и  $\delta$ , лежащие в области устойчивости, мы, однако, получаем не всё семейство (27), а лишь его подсемейство с вещественными  $\zeta$ .

6. Пусть теперь  $\phi = n\pi$ , тогда  $\sqrt{\eta} = |\gamma|$ ,

$$\begin{aligned} d(\sin \phi = 0) &= d_0 = \sqrt{[1 - (\gamma + \delta)^2][1 - (\gamma - \delta)^2]}, \\ t'(\sin \phi = 0) &= t'_0 = \sqrt{2(1 - \gamma^2 - \delta^2 + d_0)} \\ &= \sqrt{1 - (\gamma + \delta)^2} + \sqrt{1 - (\gamma - \delta)^2}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$H_0(\sin \phi = 0) = \frac{i}{L} \operatorname{diag} \left[ \sqrt{1 - (\gamma + \delta)^2}, \sqrt{1 - (\gamma - \delta)^2} \right],$$

$$\operatorname{tr} \operatorname{Im} H_0(\sin \phi = 0) = \frac{t'_0}{L}.$$

Это случай разделяющихся переменных, основная мода представляется в виде произведения решений двух двумерных задач.

При  $\gamma = 0$  мы снова сталкиваемся с неоднозначностью: решением оказывается не только матрица  $iE(1 - \delta^2)^{1/2}/L$ , которую даёт формула (29), но и любая матрица из семейства

$$H_0(\gamma = \sin \phi = 0) = \frac{i\sqrt{1 - \delta^2}}{L} \frac{(1 + \zeta^2)E - 2(-1)^n \zeta \sigma}{1 - \zeta^2}. \quad (30)$$

В частности, такая неоднозначность имеет место в трёхзеркальном резонаторе, рассмотренном в работе [25]. Как и прежде, это связано с тем, что рассматриваемые точки с координатами  $\gamma = 0$ ,  $|\delta| < 1$ ,  $\phi = n\pi$  лежат на границе области (5), и матрица  $T_0$  в этих точках имеет кратные собственные значения. Если  $\delta \neq 0$ , то пучки, описываемые решениями вида (30), обладают простым (при  $\zeta = 0$ ) или сложным (при  $\zeta \neq 0$ ) астигматизмом, и в последнем случае  $\theta_0 = \pi/4$ . Семейство (30) связано с асимптотическим поведением матрицы  $H_0$  в окрестности прямых  $\gamma = 0$ ,  $\phi = n\pi$ : при близких к нулю значениях  $\gamma$  и  $\sin \phi$

матрица (20) в главном приближении совпадает с матрицей вида (30), где  $\zeta$  снова определяется формулой (28). Как и раньше, мы таким способом получаем подсемейство семейства (30), отвечающее вещественным значениям  $\zeta$ .

Если  $\gamma = \delta = \sin \phi = 0$ , семейство решений описывается формулой

$$H_0(\gamma = \delta = \sin \phi = 0) = \frac{i}{L} \frac{(1 + \zeta^2)E - 2(-1)^n \zeta \sigma}{1 - \zeta^2}, \quad (31)$$

$$|\zeta| < 1,$$

вытекающей из (27) или (30). Соответствующие этим решениям пучки при  $\zeta \neq 0$  обладают простым астигматизмом, при этом  $\theta_0 = \pi/4$ . Матрицы семейства (31) при вещественных  $\zeta$  (28) описывают в главном приближении поведение решений (20) при значениях  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\sin \phi$ , одновременно близких к нулю.

Все рассмотренные случаи неоднозначности решений (27), (30), (31) имеют общую природу: неоднозначность возникает, если  $G = \delta V_\phi$ , и уравнение (16) выполняется тождественно. В этом случае уравнению (15) удовлетворяет произвольная симметричная матрица вида

$$H_0(G = \delta V_\phi) = \frac{i\sqrt{1 - \delta^2}}{L} \frac{(1 + \zeta^2)E + 2\zeta V_{\phi+\pi/2}}{1 - \zeta^2}; \quad (32)$$

мнимая часть (32) положительно определена при  $|\zeta| < 1$ . Нетрудно убедиться, что (27), (30) и (31) представляют собой частные случаи формулы (32).

Отметим, что если аналитически продолжить наше решение на случай невещественных  $\gamma$  и  $\delta$  (что соответствует резонаторам с неидеальными зеркалами, коэффициент отражения которых зависит от поперечных координат) и устремить мнимые части к нулю, то матрицы из семейства (32) с невещественными  $\zeta$  могут быть получены в результате такого предельного перехода при определённом соотношении между параметрами резонатора.

7. Сформулируем без доказательства некоторые результаты анализа поведения матрицы  $H_0 = i \operatorname{Im} H_0$  и её собственных чисел в окрестности других граничных точек области устойчивости (5). (Этот анализ базируется в основном на соотношениях (17), (18), (21) и (23).)

На поверхности (7) величина  $d$  (12) равна нулю, одно из собственных чисел матрицы  $\operatorname{Im} H_0$  также обращается в нуль, а другое принимает значение

$$\frac{2|\gamma|}{L} \sqrt{\frac{|a|}{1 - |a|}}, \quad (33)$$

при этом

$$\theta_0(d = 0) = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\sin \phi}{|\cos \phi| - |\delta|} \right) \operatorname{sign} \cos \phi.$$

В окрестности (7) значение  $d$  мало, и в случае, когда  $|a|$  не близок к нулю,

$$d \sim 2^{3/2} \sqrt{|\gamma \delta \Delta \gamma \cos \phi|}, \quad (34)$$

где  $\Delta \gamma$  – расстояние до границы по переменной  $\gamma$ . Наличие корневой особенности приводит к тому, что в малой окрестности границы резко изменяются значения  $d$ ,  $\theta_0$ , а

также собственные числа матрицы  $\text{Im} H_0$ . При этом, в отличие от резонатора с чётным числом зеркал, уменьшаются оба собственных числа. Соответственно, происходит быстрый поворот эллипса интенсивности, сопровождаемый неограниченным ростом длины одной из его полуосей и менее выраженным увеличением длины другой. С уменьшением значения  $|a|$  одновременно уменьшаются как предельное значение (33) второго собственного числа на границе, так и размер приграничной области. Ширина этой области, где продолжает выполняться соотношение (34), определяется неравенством  $\Delta\gamma \ll 2|a/\gamma|$ . При выполнении противоположного неравенства  $1 \gg \Delta\gamma \gg 2|a/\gamma|$  (в частности, при  $\cos \phi = 0$ ) зависимость  $d$  от  $\Delta\gamma$  близка к линейной:

$$d \sim 2|\gamma\Delta\gamma|.$$

Если значение  $\delta$  близко к нулю, а  $\gamma -$  к единице, собственные числа матрицы  $\text{Im} H_0$  малы и в главном приближении совпадают с величинами  $u_{\pm}/L$ . Значение  $\theta_0$  в этом случае близко к  $\phi/2$ , если  $|\cos \phi|$  не мал. Если же  $1 - |\gamma|$ ,  $\delta$  и  $\cos \phi$  близки к нулю одновременно, то в зависимости от соотношения этих параметров возможны самые разные варианты асимптотического поведения угла

$$\theta_0 = -\frac{1}{2} \arctan \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{d + \sqrt{d^2 + 4a^2 - 2 \cos^2 \phi}}.$$

Рассмотрим теперь окрестность поверхности (6), на которой

$$\eta \sim 2|\gamma|(|\gamma| - |\delta| \sin \phi)$$

обращается в нуль, при этом  $\theta_0(\eta = 0) = \phi/2 - \pi/4$  и

$$H_0(\eta \rightarrow 0) \sim \frac{i \text{sign } \gamma}{L} \sqrt{\frac{1-a^2}{\eta}} (G + aV_{\phi}).$$

При приближении к поверхности (6) одно из собственных чисел матрицы  $\text{Im} H_0$  стремится к нулю, а другое – к бесконечности:

$$\frac{2}{kw_1^2} \sim \sqrt{\frac{(1-a^2)\eta}{2L|\gamma|}},$$

$$\frac{2}{kw_2^2} \sim \frac{2|\gamma|}{L} \sqrt{\frac{1-a^2}{\eta}},$$

эллипс интенсивности в одном из направлений неограниченно удлиняется, а в другом сужается в линию, при этом его площадь остаётся ограниченной и стремится к величине  $2\pi L/[k(1-a^2)^{1/2}]$ . В этом состоит качественное отличие данного случая от рассмотренного выше случая окрестности поверхности (7), где эллипс интенсивности превращался не в прямую, а в полосу. Общим в этих ситуациях является наличие корневой особенности (на этот раз в знаменателе), из-за которой резкие изменения формы пучка происходят в узком пограничном слое, а за его пределами параметры пучка меняются достаточно плавно. В данном случае при приближении к границе устойчивости не происходит быстрого изменения направления полуосей эллипса, в отличие от рассмотренного выше случая окрестности поверхности (7). Отметим, что проведённый анализ требует уточнения в области малых  $|\gamma|$ ,

когда поведение собственных чисел определяется отношением  $\sqrt{\eta}/|\gamma|$ ; этот случай был рассмотрен выше.

Ещё один особый случай – окрестность точек «заострения» области устойчивости, лежащих на пространственных кривых (24). На этих кривых  $|a| = 1$ , поэтому в их окрестности мала разность  $1 - |a|$ , а также величина  $\eta$ , не превышающая  $(1 - |a|)^2$ . Тогда, положив

$$p = \frac{\eta}{(1 - |a|)^2}$$

(значение  $p$  лежит в интервале  $(0, 1)$ ), получим

$$H_0 \sim \frac{i \text{sign } \gamma}{L\sqrt{p(1-|a|)}} \sqrt{1 + \sqrt{1-p}} (G + V_{\phi}),$$

$$\theta_0(|a| = 1) = \frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{2}{kw_1^2} \sim \frac{(1-|a|)^{3/2}}{L|\gamma|} \sqrt{\frac{p(1-p)}{1 + \sqrt{1-p}}},$$

$$\frac{2}{kw_2^2} \sim \frac{2|\gamma|}{L} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1-p}}{p(1-|a|)}}.$$

В предположении, что значение  $|\gamma|$  отделено от нуля, второе собственное число при  $a \rightarrow 1$  стремится к бесконечности, а первое – к нулю (отметим, что оно содержит дополнительный множитель  $[p(1-p)]^{1/2}$ , обращающийся в нуль на границах). В случае же малых значений  $|\sin \phi|$  множитель  $|\gamma|$  тоже мал, в связи с чем в выражениях для собственных чисел возникает неопределённость, так что при некоторых соотношениях параметров может оказаться, что первое собственное число велико, а второе мало, или что они малы одновременно. В любом случае, однако, их произведение при  $a \rightarrow 1$  стремится к нулю, а площадь эллипса интенсивности – к бесконечности.

Наконец, последний случай – большие по модулю значения  $\gamma$ ,  $\delta$ , принадлежащие области устойчивости, когда величина  $\cos \phi$  близка к нулю, и лежащие (см. рис.4) в малых окрестностях биссектрис координатных углов, а также гипербол  $\gamma^2 - \delta^2 = \pm 1$ , для которых эти биссектрисы являются асимптотами. Разумеется, эти точки близки также и к границам устойчивости (6) и (7), лежащим между указанными гиперболами. Между границами величина  $\eta$  быстро меняется от нуля до  $(1 - |a|)^2$ , и вместе с нею столь же быстро меняется сама матрица  $H_0$ . Собственное число

$$\frac{2}{kw_1^2} \sim \frac{d\sqrt{\eta}}{L|\gamma|t'}$$

в рассматриваемой области мало и обращается в нуль на обеих границах, а собственное число

$$\frac{2}{kw_2^2} \sim \frac{|\gamma|t'}{L\sqrt{\eta}}$$

изменяется от значения (33) на поверхности (7) до бесконечности на поверхности (6). Хотя в выражение (33) входит большой множитель  $|\gamma|$ , значение этого выражения в рассматриваемом случае не обязательно велико (в частности, при  $\cos \phi = 0$  оно обращается в нуль). Тем



не менее в любом случае в рассматриваемой области эксцентриситет эллипса интенсивности всегда велик, угол  $\theta_0$  близок к нулю, а матрица  $\text{Im}H_0$  близка к диагональной (точнее, один из диагональных элементов много больше всех остальных элементов этой матрицы).

8. Возведём в квадрат матрицу монодромии  $T_0$  (4):

$$T_0^2 = \begin{pmatrix} 2G'G - E & 2LG' \\ 2(GG'G - G/L) & 2GG' - E \end{pmatrix}, \quad (35)$$

где

$$G' = V_\phi G V_\phi.$$

Нетрудно убедиться, что матрица (35) совпадает с матрицей монодромии линейного резонатора длиной  $L$ , ограниченного двумя одинаковыми эллиптическими зеркалами, главные направления кривизны которых развёрнуты на угол  $\phi$  относительно друг друга, а значения главных кривизн совпадают с собственными числами матрицы  $\Psi/2$  [26, 27]. Это означает, что гауссов пучок при обходе такого линейного резонатора преобразуется так же, как при двукратном обходе кольцевого, так что любое решение задачи для кольцевого резонатора одновременно описывает и поле в соответствующем ему линейном. Обратное утверждение справедливо, если все собственные числа матрицы (4) отличны от  $\pm i$ : в этом случае все собственные векторы матрицы (35), через которые могут быть выражены решения уравнения (1), также являются собственными векторами матрицы (4), поскольку соответствующие собственные числа матриц (4) и (35) имеют одинаковую кратность. Если же собственные числа матрицы (4) (простые или двукратные) равны  $\pm i$ , матрица (35) обладает собственным подпространством размерностью соответственно 2 или 4, отвечающим собственному числу  $-1$ , и тогда уравнение (1) для матрицы (35) имеет решения, не удовлетворяющие аналогичному уравнению для матрицы (4). Такие решения описывают пучки, которые воспроизводятся не после однократного, а после двукратного обхода рассматриваемого кольцевого резонатора, и тогда мода представляет собой суперпозицию двух гауссовых пучков, переходящих при обходе резонатора друг в друга.

9. Вернёмся к случаю, когда отражающее зеркало является сферическим. На рис. 7 представлены зависимости от  $L/R$  собственных чисел безразмерной матрицы  $L\text{Im}H_0$  и углов наклона  $\theta_{1,2}$  к координатной оси  $x$  соответствующих собственных векторов (осей эллипса интенсивности) при постоянных  $\phi$  и  $\alpha$  для рассмотренного выше случая, когда прямая  $\alpha = \text{const}$  на рис. 5 пересекает обе подобласти области устойчивости. Рисунок 7 иллюстрирует отмеченные выше качественные различия между резонаторами с чётным и нечётным числом зеркал: в последнем случае число подобластей устойчивости не превышает двух (а не трёх); на границах подобластей одновременно с обращением одного из собственных чисел в нуль другое стремится к бесконечности (при чётном числе зеркал оно резко возрастает, но остаётся конечным); наконец, при наибольшем значении  $L/R$  в нуль обращается только одно собственное число (при чётном числе зеркал – оба).

На рис. 8 приведены зависимости аналогичных характеристик размерной матрицы  $\text{Im}H_0$  от  $|\cos \phi|$  для резонатора с нечётным числом зеркал, параметры которого совпадают с параметрами рассмотренного в работах [9, 14] четырёхзеркального резонатора. Как видно из

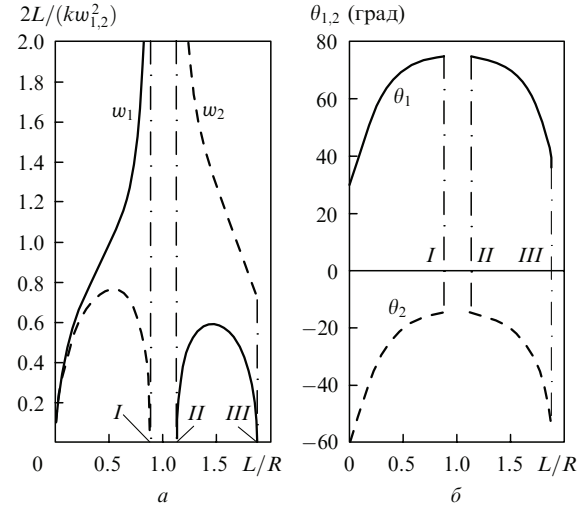


Рис. 7. Зависимости собственных чисел безразмерной матрицы  $L\text{Im}H_0$  (а) и углов наклона соответствующих собственных векторов к оси  $x$  (б) от  $L/R$  ( $\alpha = \pi/3$ ,  $\phi = \pi/3$ ). Римскими цифрами указаны значения  $L/R$ , соответствующие формулам, приведённым в подписи к рис. 5.

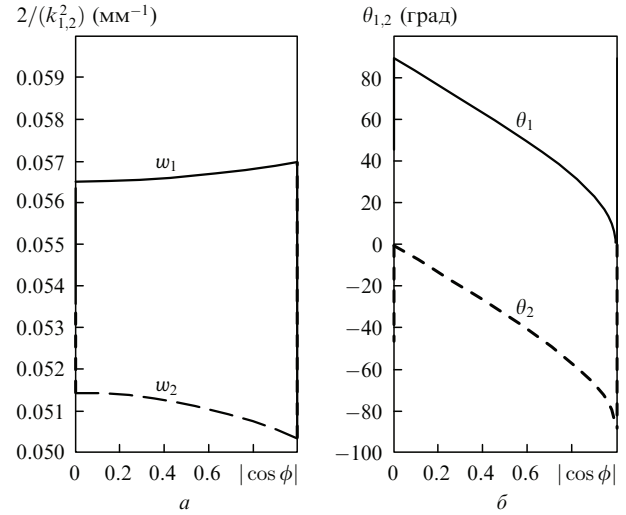


Рис. 8. Зависимости собственных чисел матрицы  $\text{Im}H_0$  (а) и углов наклона соответствующих собственных векторов к оси  $x$  (б) от  $|\cos \phi|$  при  $R = 50$  мм,  $L \approx 12.22$  мм,  $\alpha = \pi/3$  ( $\gamma \approx 0.7531$ ,  $\delta \approx -0.0353$ ,  $\phi = \pi/3$ ). В случае  $\tan \phi < 0$  значения углов отличаются от приведённых на этом рисунке знаком.

рис. 6, такой резонатор устойчив при любых значениях  $\phi$ , что в случае чётного числа зеркал невозможно ни при каких значениях параметров.

10. Рассмотрим теперь вопрос об эволюции матрицы  $H$  при распространении пучка вдоль контура резонатора. Анализ будет основываться на формуле [28]

$$H(z) = \frac{H_+ + (z \det H_+) E}{1 + z \text{tr} H_+ + z^2 \det H_+}, \quad (36)$$

где матрица  $H_+ = H(0)$  определяется из (10),

$$\text{tr} H_+ = \frac{1}{L} \left[ 2(\gamma - 1) + \frac{i|\gamma|t'}{\sqrt{\eta}} \right],$$

$$\det H_+ = \frac{(1 - \gamma)^2 - \delta^2 - d}{L^2} \left( 1 + \frac{it'}{2\sqrt{\eta}} \right),$$

при этом матрицы  $H(L)$  и  $H_-$  связаны соотношением подобия

$$H_- = V_\phi H(L) V_\phi.$$

Пучок имеет центр симметрии в точке  $z = L/2, x = y = 0$ , при этом

$$H(L/2) = \frac{1}{L[(1+\gamma)^2 - \delta^2 - d]} \times \left[ 4\delta V_{\phi+\pi/2} \sin \phi + \frac{it'(1+\gamma^2 - \delta^2 - d)}{\sqrt{\eta}} (E + \xi V_\phi) \right],$$

$$\text{tr } H(L/2) = i|\text{tr } H(L/2)| = \frac{2it'(1+\gamma^2 - \delta^2 - d)}{L\sqrt{\eta}[(1+\gamma)^2 - \delta^2 - d]}, \quad (37)$$

$$\det H(L/2) = -\frac{4(\gamma d + \delta^2 \sin^2 \phi)}{L^2\{\gamma[(1+\gamma)^2 - \delta^2] - \delta^2 \sin^2 \phi\}}.$$

Из (37) следует, что при  $z = L/2$  главные полуоси эллипса интенсивности направлены под углами  $(\phi + n\pi)/2$  к оси  $x$ , а направления главных кривизн волнового фронта совпадают с биссектрисами углов между этими полуосями и образуют с осью  $x$  углы  $\phi/2 + (2n+1)\pi/4$ . Волновой фронт в этом сечении имеет форму седла, главные радиусы кривизны которого по модулю равны  $L[(1+\gamma)^2 - \delta^2 - d]/(4\delta \sin \phi)$ .

Формула, аналогичная (36), позволяет выразить  $H(z)$  через матрицу  $H(L/2)$ , её след и определитель. Умножив и разделив (36) на выражение, комплексно сопряжённое со знаменателем, можно выделить вещественную и мнимую части матрицы  $H(z)$ . Эти формулы мы не приводим ввиду их громоздкости; запишем лишь выражения для углов наклона к оси  $x$  полуосей эллипсов интенсивности и фазы  $\theta_{\text{Im}}$  и  $\theta_{\text{Re}}$  (т.е. собственных векторов матриц  $\text{Im } H(z)$  и  $\text{Re } H(z)$ ):

$$\theta_{\text{Im}} = \frac{1}{2} \left\{ \phi - \arctan \frac{(2\kappa - 1)[(1+\gamma)(1-\gamma^2 + \delta^2 + d) - 2\delta^2 \cos^2 \phi] \tan \phi}{\gamma[(1+\gamma)^2 - \delta^2 - (2\kappa - 1)^2 d] - 2[1 - 2\kappa(1-\kappa)]\delta^2 \sin^2 \phi} + n\pi \right\}, \quad (38)$$

$$\theta_{\text{Re}} = \frac{1}{2} \left\{ \phi - \text{arccot} \frac{(2\kappa - 1)[\gamma[(1+\gamma)^2 - \delta^2 - d] - 2\delta^2 \sin^2 \phi] \cot \phi}{\gamma[(1+\gamma)^2 - \delta^2 - (2\kappa - 1)^2 d] - 2[1 - 2\kappa(1-\kappa)]\delta^2 \sin^2 \phi} + n\pi \right\}, \quad (39)$$

где  $\kappa = z/L$  (формулы приведены для внутренних точек области (5), когда все входящие в них выражения определены).

Углы (38) и (39) определяются с точностью до слагаемого  $n\pi/2$  (полуоси эллипсов ортогональны) и отсчитываются от первоначального направления оси  $x$  или от направления, в которое оно переходит после одного или нескольких отражений от плоских зеркал; направление отсчёта определяется ориентацией системы координат, т.е. числом отражений. Переход к другим системам координат приводит к добавлению постоянного слагаемого и (при смене ориентации) к изменению знака в выражениях (38), (39).

Легко убедиться в том, что угол  $\theta_{\text{Re}}(0)$  кратен  $\pi/2$ : направления главных кривизн волнового фронта совпадают с координатными осями. В частности, при  $-\pi < \phi < 0$  или  $0 < \phi < \pi$  указанный угол равен  $n\pi/2$  или  $(n+1)\pi/2$  соответственно. При этом значения  $\theta_{\text{Re}}(\kappa = 1)$

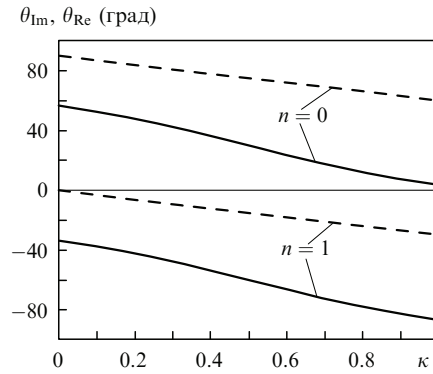


Рис.9. Зависимости углов наклона полуосей эллипса интенсивности  $\theta_{\text{Im}}$  (сплошные кривые) и фазы  $\theta_{\text{Re}}$  (штриховые кривые) от  $\kappa = z/L$  для  $\gamma \approx 0.7531, \delta \approx -0.0353, \phi = \pi/3$ .

равны  $\phi + (n+1)\pi/2$  и  $\phi + n\pi/2$ , а  $\theta_{\text{Re}}(1/2) = \phi/2 + (n+1)\pi/4$  (при любых  $\phi$ ). Несколько сложнее проверить, что  $\theta_{\text{Im}}(0)$  для некоторого  $n$  совпадает с  $\theta_0$  (19), (25); для этого, в частности, достаточно убедиться, что  $\tan[2\theta_{\text{Im}}(0)] = \tan(2\theta_0)$ . В середине контура  $\theta_{\text{Im}}(1/2) = (\phi + n\pi)/2$ . Зависимости  $\theta_{\text{Im}}$  и  $\theta_{\text{Re}}$  от  $\kappa$  для резонатора с выбранными параметрами представлены на рис.9.

На рис.10 приведены зависимости от  $\kappa$  собственных чисел  $2/(k\omega_{1,2}^2)$  матрицы  $\text{Im } H$  ( $\omega_{1,2}$  — полуоси эллипса интенсивности) и собственных чисел  $\rho_{1,2}^{-1}$  матрицы  $\text{Re } H$  ( $\rho_{1,2}$  — главные радиусы кривизны волнового фронта) для указанного резонатора. В середине контура собственные числа матрицы  $\text{Im } H$  принимают максимальные значения, а значения  $\omega_{1,2}$  оказываются, следовательно, минимальными. Собственные числа матрицы  $\text{Re } H$  в этой точке совпадают по модулю и различаются знаком, волновой фронт имеет форму седла. В симметрично расположенных относительно середины контура точках одно из собственных чисел обращается в нуль, а форма волнового фронта становится цилиндрической. Отметим, что

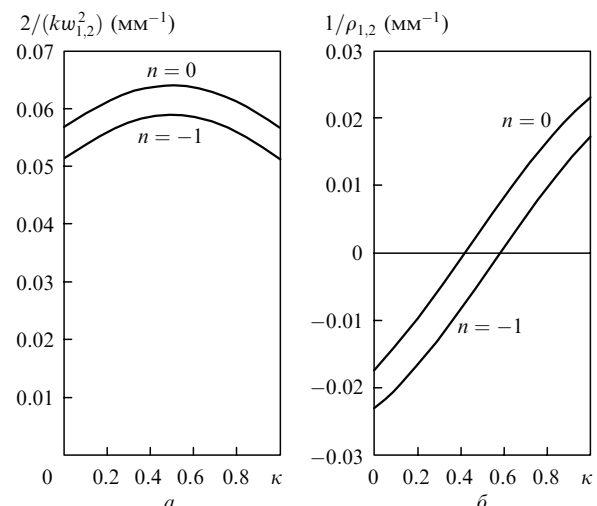


Рис.10. Зависимости собственных чисел матриц  $\text{Im } H_0$  (а) и  $\text{Re } H_0$  (б) от  $\kappa = z/L$  для  $\gamma \approx 0.7531, \delta \approx -0.0353, \phi = \pi/3$ .

вид этих кривых очень близок к аналогичным кривым для резонатора с чётным числом зеркал [14]. Явные аналитические формулы для собственных чисел, так же как и для самих матриц  $\text{Im} H$ ,  $\text{Re} H$ , мы не приводим ввиду их громоздкости.

**11.** Несколько слов о возможных обобщениях полученных результатов.

1. В настоящей работе речь шла только о формулах для фундаментальной моды. С целью построения формул для высших мод требуется выписать операторы рождения, аналогичные квантово-механическим, для чего необходимо определить собственные векторы матрицы монодромии [1, 3, 20]. Оказывается [29], что выражения для таких векторов в рассматриваемой задаче могут быть найдены в явном виде, причём существенную помощь в этом оказывает найденная матрица  $H_0$ : по сути дела, здесь происходит обращение традиционной методики, при которой эта матрица выражается через компоненты указанных векторов. Отметим, что определение собственных векторов матрицы монодромии для случая чётного числа зеркал представляет собой существенно более сложную задачу.

2. Мы до сих пор сосредоточивали наше внимание на описании формы поперечного распределения и совсем не касались собственных частот (точнее, собственных значений волнового числа  $k$ ), поскольку этот вопрос был исследован в работах [1, 3]. Тем не менее используемая нами методика позволяет несколько модифицировать соответствующие формулы.

3. В настоящей работе мы ограничились рассмотрением главного члена асимптотического разложения поля в резонаторе. Могут представлять интерес вопросы о погрешности полученных формул, о пределах их применимости, о введении поправочных членов или даже полного асимптотического ряда – точнее, о возможных упрощениях описанной в [1, 3] процедуры его построения, связанных со спецификой задачи.

4. Полученные в работе результаты могут быть обобщены на случай комплексных  $\gamma$  и  $\delta$ , когда коэффициент отражения астигматического зеркала зависит от поперечных координат по гауссову закону. В модификации нуждаются формулы, содержащие модули и знаки величин, которые теперь уже оказываются комплексными, и заново придётся рассмотреть вопросы о выборе знаков при радикалах, обеспечивающем знакоопределённость матрицы  $\text{Im} H$ , о возможности и единственности такого выбора (т. е. вопрос об устойчивости резонатора с невещественной матрицей монодромии [18, 19]), вопросы о потерях фундаментальной и высших мод в таких резонаторах, о полевой невзаимности и т. п. В особом анализе нуждаются ситуации, когда вещественные части  $\gamma$  и  $\delta$  лежат вне области (5), а также в окрестности её границ (6), (7). Некоторые сложности технического плана могут возникнуть также в случае гауссова зеркала, описываемого симметричной комплексной матрицей  $\Psi$  общего вида, не диагоналируемой поворотом осей координат, так что и матрица  $G$  также не будет диагональной.

5. Как показывает анализ, математическая структура задачи не изменится, если в середину контура резонатора поместить аксиально-симметричную линзу. В этом случае матрица монодромии по-прежнему будет иметь вид (4), но с иначе определённой матрицей  $G$  и некоторым эффективным значением  $L$ , отличным от длины контура резонатора. Отметим, что если коэффициент пропускания

линзы считать зависящим от радиуса по гауссову закону или если линзу заменить гауссовой диафрагмой, то комплексными оказываются значения не только  $\gamma$ ,  $\delta$ , но и  $L$ .

6. Следующим естественным обобщением является задача, в которой указанная линза будет астигматической. В частном случае, когда описывающая линзу матрица коммутирует с матрицей  $V_\phi$ , такая задача весьма близка к рассмотренной в [26, 27] задаче о двухзеркальном резонаторе с несовпадающими направлениями главных кривизн, не слишком превосходя последнюю по уровню сложности.

7. Задача рассматривалась нами в скалярной постановке, однако никаких сложностей не возникает при переформулировке её для системы уравнений Максвелла. В главном приближении возникающая электромагнитная волна будет поперечной и плоскополяризованной (в отличие от случая чётного числа зеркал, где поляризация круговая [10]), поскольку вектор поляризации должен, очевидно, быть собственным вектором матрицы  $V_\phi$ . Каждый из двух таких векторов порождает свою серию собственных частот резонатора.

**12.** Сформулируем основные результаты проведённого исследования.

В настоящей работе изучены кольцевые резонаторы с неплоским осевым контуром и нечётным числом зеркал, одно из которых неплоское. В таких резонаторах в результате обхода контура изменяется ориентация системы координат, т. е. происходит отражение этой системы относительно некоторого направления, никак не связанного, вообще говоря, с главными направлениями кривизны неплоского зеркала. Формирующаяся фундаментальная мода в этом случае имеет вид гауссова пучка с астигматизмом общего вида. Подробно исследована геометрия области устойчивости резонатора в пространстве безразмерных параметров, определяющих свойства резонатора. Приведены явные выражения для матрицы квадратичной формы, описывающей поперечное распределение поля фундаментальной моды при всех допустимых значениях параметров. Подробно проанализированы поведение матрицы и характер поля в окрестности границ области устойчивости и особых значений параметров. Исследованы особые точки и поверхности в области устойчивости, для которых матрица квадратичной формы определяется неоднозначно, а также поведение матрицы в окрестности этих точек и поверхностей. Изучена зависимость поперечного распределения поля от продольной координаты и, в частности, приведены явные выражения для углов наклона полуосей эллипсов интенсивности и фазы в зависимости от этой координаты.

Результаты конкретизированы для случая, когда неплоское зеркало имеет сферическую форму. Для таких резонаторов исследованы зависимости характеристик пучка от радиуса кривизны, угла падения и от направления, относительно которого происходит отражение координатной системы при обходе контура.

Полученные результаты выявили резкие качественные различия между резонаторами с нечётным и чётным числом зеркал (последний случай был исследован ранее [14]). Эти различия касаются как формы области устойчивости (в частности, не совпадает даже число подобластей, на которые эта область распадается), так и поперечного распределения поля. В частности, если в резонаторе с чётным числом зеркал вдоль главных направлений кривизны неплоского зеркала направлены полуоси эллипса

интенсивности, то в случае нечётного числа зеркал – полуси эллипса фазы. Общим является лишь то, что в обоих случаях фундаментальная мода – это гауссов пучок со сложным астигматизмом, симметричный относительно середины контура.

В качестве тестового примера использовался резонатор, параметры которого совпадают с параметрами рассмотренного в [9, 14] резонатора с чётным числом зеркал. В этом случае обнаружилось неожиданное сходство в форме пучков, формирующихся в резонаторах с нечётным и чётным числом зеркал, причём не только качественное, но и количественное.

1. Попов М.М. *Вестник Ленингр. ун-та. Сер. физ.-хим.*, **22**, 42 (1969).
2. Arnaud J.A. *Appl. Opt.*, **8**, 189 (1969).
3. Бабич В.М., Булдырев В.С. *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн* (М.: Наука, 1972).
4. Панкратова Т.Ф. В сб. *Записки научных семинаров ЛОМИ* (Л.: Наука, 1969, т. 15, с. 122).
5. Панкратова Т.Ф. *Оптика и спектроскопия*, **36**, 969 (1974).
6. Савельев И.И., Хромых А.М. *Квантовая электроника*, **3**, 1517 (1976).
7. Ананьев Ю.А. *Оптические резонаторы и лазерные пучки* (М.: Наука, 1990).
8. Кравцов Н.В., Наний О.Е. *Квантовая электроника*, **20**, 322 (1993).
9. Головин И.В., Ковригин А.И., Коновалов А.Н., Лаптев Г.Д. *Квантовая электроника*, **22**, 461 (1995).
10. Азарова В.В., Голяев Ю.Д., Дмитриев В.Г. *Квантовая электроника*, **30**, 96 (2000).
11. Быков В.П., Силичев О.О. *Лазерные резонаторы* (М.: Физматлит, 2004).
12. Брославец Ю.Ю., Зайцева Т.Ф., Казаков А.А., Фомичёв А.А. *Квантовая электроника*, **36**, 447 (2006).
13. Plachenov A.B., Kudashov V.N., Radin A.M. *Proc. Int. Conf. «Days on Diffraction 2008»* (SPb, Faculty on Physics SPbU, 2008, p. 157).
14. Плаченов А.Б., Кудашов В.Н., Радин А.М. *Квантовая электроника*, **39**, 261 (2009).
15. Arnaud J.A., Kogelnik H. *Appl. Opt.*, **8**, 1687 (1969).
16. Гончаренко А.М. *Гауссовы пучки света* (М.: КомКнига, 2005).
17. Бабич В.М. *Записки научных семинаров ЛОМИ* (Л.: Наука, 1968, т. 9, с. 15).
18. Кудашов В.Н., Плаченов А.Б., Радин А.М. *Оптика и спектроскопия*, **93**, 843 (2002).
19. Кудашов В.Н., Плаченов А.Б., Радин А.М. *ЖТФ*, **73**, 111 (2003).
20. Habraken S.J.M., Nienhuis G. *Phys. Rev. A*, **75**, 033819 (2007).
21. Плаченов А.Б., Кудашов В.Н., Радин А.М. *Квантовая электроника*, **37**, 290 (2007).
22. Плаченов А.Б., Радин А.М., Кудашов В.Н. *Радиотехника и электроника*, **52**, 1422 (2007).
23. Plachenov A.B., Kudashov V.N., Radin A.M. *Proc. Int. Conf. «Days on Diffraction 2006»* (SPb, Faculty on Physics SPbU, 2006, p. 243).
24. Кудашов В.Н., Плаченов А.Б., Радин А.М. *Оптика и спектроскопия*, **88**, 127 (2000).
25. Кудашов В.Н., Плаченов А.Б., Радин А.М. *Оптика и спектроскопия*, **88**, 130 (2000).
26. Плаченов А.Б., Кудашов В.Н., Радин А.М. *Радиотехника и электроника*, **54**, 1230 (2009).
27. Plachenov A.B., Kudashov V.N., Radin A.M. *Proc. Int. Conf. «Days on Diffraction 2009»* (SPb, Faculty on Physics SPbU, 2009, p. 162).
28. Плаченов А.Б., Кудашов В.Н., Радин А.М. *Оптика и спектроскопия*, **106**, 998 (2009).
29. Plachenov A.B. *Abstr. Int. Conf. «Days on Diffraction 2010»* (SPb, Faculty on Physics SPbU, 2010, p. 65).