PACS 42.50.–p; 32.80.–t; 51.70.+f

Частоты столкновений в кинетических уравнениях для матрицы плотности, описывающих нелинейные эффекты в крыльях спектральных линий

А.И.Пархоменко, А.М.Шалагин

В приближении эйконала рассчитаны эффективные частоты столкновений в кинетических уравнениях для матрицы плотности, описывающих нелинейные эффекты в крыльях спектральных линий. Установлена связь вероятностей поглощения и вынужденного испускания с характеристиками излучения и элементарного акта рассеяния. На примере степенного потенциала взаимодействия показано, что квантовомеханический расчет частот столкновений в приближении эйконала и известная ранее теория крыла спектральной линии дают близкие результаты для вероятности поглощения излучения.

Ключевые слова: *матрица плотности, кинетические уравнения, столкновения, крыло спектральной линии, коэффициенты Эйнштейна, инверсия населенностей, генерация излучения.*

1. Введение

До недавнего времени считалось, что вследствие равенства вероятностей процессов поглощения и вынужденного испускания непрерывное лазерное излучение способно лишь выравнять населенности уровней в двухуровневой системе, но никак не создать инверсию населенностей. Однако, как оказалось, это укоренившееся представление в определенных условиях не соответствует действительности. В целом ряде работ [1–10] было показано, что в крыле линии поглощения активных частиц газа при наличии частых столкновений с буферными частицами (термостат) вероятности поглощения и вынужденного испускания не равны друг другу. Как выяснилось, спектральные плотности коэффициентов Эйнштейна для поглощения ($b_{12}(\Omega)$) и вынужденного испускания ($b_{21}(\Omega)$) связаны между собой соотношением [7, 8]

$$b_{21}(\Omega) = b_{12}(\Omega)\exp[-\hbar\Omega/(k_{\rm B}T)], \tag{1}$$

где $\Omega = \omega - \omega_{21}$ – отстройка частоты излучения ω от частоты перехода ω_{21} между уровнями $|2\rangle$ и $|1\rangle$; $\hbar$ – постоянная Планка; $k_{\rm B}$ – постоянная Больцмана; T – температура. Соотношение (1) сохраняет силу при любом знаке Ω. В случае $\hbar|\Omega| \ll k_{\rm B}T$ из (1) следует каноническое равенство для вероятностей поглощения и индуцированного испускания.

В соответствии с (1) возможны установление инверсии населенностей в двухуровневой системе при нерезонансном поглощении непрерывного излучения и, как следствие, генерация излучения на резонансной частоте. В работах [6, 8–10] этот эффект зарегистрирован экспериментально – наблюдалось возникновение лазерной генерации в режиме суперлюминесценции (за один проход активной среды) на резонансном переходе атомов натрия при поглощении излучения накачки в «синем» крыле спектральной линии. Генерация возникала только в присутствии буферного газа при достаточно высоком его давлении (более 200 Тор).

Обнаруженный эффект не описывается широко используемыми в настоящее время квантовыми кинетическими уравнениями для матрицы плотности (см., напр., [11, 12]). Из этих уравнений не следуют соотношение (1) и возможность возникновения инверсии населенностей в двухуровневой системе при нерезонансном оптическом возбуждении. В недавней нашей работе [13] выведены квантовые кинетические уравнения для матрицы плотности двухуровневых частиц с интегралами столкновений, описывающими нелинейные эффекты в крыльях спектральных линий. Из этих уравнений следует установленный ранее факт неравенства спектральных плотностей коэффициентов Эйнштейна для поглощения и вынужденного испускания двухуровневой квантовой системой излучения в далеком крыле спектральной линии в условиях частых столкновений. Установлена также связь частот столкновений, входящих в эти уравнения, с характеристиками излучения и элементарного акта рассеяния. При этом задача их вычисления сводится к стандартной задаче вычисления частот столкновений при известном потенциале взаимодействия сталкивающихся частиц. В работе [13] конкретный расчет частот столкновений выходил за рамки предпринятого анализа и не проводился. Настоящая работа восполняет этот пробел и посвящена расчету частот столкновений в кинетических уравнениях для матрицы плотности, полученных в [13] и описывающих нелинейные эффекты в крыльях спектральных линий.

2. Постановка задачи

Кинетические уравнения для матрицы плотности, определенной в базисе невозмущенных атомных состояний, получены в работе [13] при следующей постановке задачи. Рассматривался газ поглощающих излучение двухуровневых частиц (с основным уровнем $|1\rangle$ и возбужденным уровнем $|2\rangle$), находящийся в смеси с буферным газом. Столкновения между поглощающими частицами не учи-

А.И.Пархоменко, А.М.Шалагин. Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Коптюга, 1; e-mail: par@iae.nsk.su, shalagin@iae.nsk.su

Поступила в редакцию 26 июня 2011 г., после доработки – 30 августа 2011 г.

тывались ввиду того, что концентрация буферного газа N_b полагалась много большей концентрации поглощающего газа N. Считалось, что при столкновениях внутренние состояния двухуровневых частиц не меняются (упругие столкновения). На поглощающие частицы воздействует монохроматическое поле $\mathcal{E} = \mathrm{Re}\boldsymbol{E}\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ с частотой ω, близкой к частоте ω_{21} перехода $|2\rangle - |1\rangle$ между уровнями (здесь $\boldsymbol{E}$ – напряженность электрического поля излучения). Рассматривался случай однородного уширения линии поглощения, когда доплеровская ширина мала по сравнению с ударной (случай достаточно высокого давления буферного газа). Полагалось, что отстройка $\varOmega = \omega - \omega_{21}$ частоты излучения от резонанса мала по сравнению с частотой перехода, $|\varOmega| \ll \omega_{21}$ (резонансное приближение, или приближение вращающейся волны), но в то же время велика по сравнению с ударной полушириной линии поглощения $\varGamma$,

$$|\varOmega| \gg \varGamma. \tag{2}$$

В работе [13] при выводе кинетических уравнений для матрицы плотности основной задачей являлось нахождение интегралов столкновений, описывающих изменение элементов матрицы плотности за счет упругих столкновений с частицами буферного газа в области отстроек частоты излучения, сильно превышающих ударную полуширину линии поглощения (см. условие (2)), когда радиационные переходы осуществляются в акте столкновения, а не на свободном пробеге (это так называемые оптические столкновения [14–16]). Столкновительная задача решалась на основе представлений о компаунд-системах «взаимодействующие атом + поле» (атом, «одетый» полем) [16, 17] как о самостоятельном физическом объекте, с которым можно обращаться примерно так же, как и с обычной частицей. При таком подходе естественным образом учитывается участие поля излучения в актах столкновений «одетого» атома с буферными частицами.

Рассмотренная в [13] картина столкновительной релаксации позволила свести задачу к эффективной двухуровневой модели «одетых» атомов (с двумя уровнями $|\varphi_1(n)\rangle$ и $|\varphi_2(n)\rangle$, рис.1). Эти уровни характеризуются волновыми функциями [16, 17]

$$\begin{aligned} |\varphi_1(n)\rangle &= b_1|1\rangle|n\rangle + b_2|2\rangle|n-1\rangle, \\ |\varphi_2(n)\rangle &= b_2^*|1\rangle|n\rangle - b_1|2\rangle|n-1\rangle, \end{aligned} \tag{3}$$

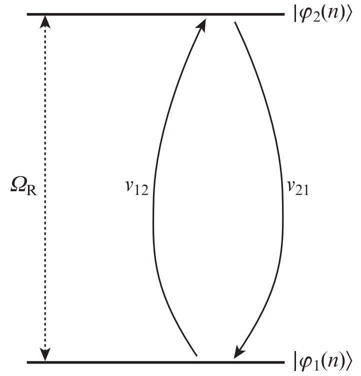

Рис.1. Эффективная двухуровневая модель «одетых» атомов для столкновительной задачи. Между уровнями $|\varphi_1(n)\rangle$ и $|\varphi_2(n)\rangle$ происходят столкновительные переходы с частотами ν_{12} и ν_{21}.

где b_1, b_2 – коэффициенты разложения функций компаунд-системы по волновым функциям невзаимодействующих атома (состояния $|1\rangle$, $|2\rangle$) и поля (состояние $|n\rangle$, n – число фотонов в лазерном поле):

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{\varOmega}{\varOmega_\text{R}}}; \quad b_2 = \frac{G}{|G|}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\varOmega}{\varOmega_\text{R}}};$$

$$\hbar\varOmega_\text{R} = \sqrt{4|G|^2 + \varOmega^2}; \quad G = \frac{d_{21}E}{2\hbar}; \tag{4}$$

d_{21} – матричный элемент дипольного момента перехода $|2\rangle - |1\rangle$. Строго говоря, коэффициенты b_1 и b_2 зависят от n. Однако мы пренебрегли их изменением в зависимости от n, полагая, что в квантовомеханическом состоянии лазерного поля неопределенность числа фотонов Δn много меньше среднего числа фотонов $\bar{n}$, которое считаем большим:

$$\Delta n \ll \bar{n}, \quad \bar{n} \gg 1. \tag{5}$$

Состояниям $|\varphi_i(n)\rangle$ «одетого» атома соответствуют энергии $E_i(n)$ ($i = 1, 2$), связанные между собой соотношением

$$E_2(n) = E_1(n) + \hbar\varOmega_\text{R}. \tag{6}$$

Согласно (6) состояние $|\varphi_2(n)\rangle$ «одетого» атома расположено выше состояния $|\varphi_1(n)\rangle$ на величину обобщенной частоты Раби $\varOmega_\text{R}$ (в частотной шкале) (рис.1). Между уровнями $|\varphi_1(n)\rangle$ и $|\varphi_2(n)\rangle$ происходят столкновительные переходы с частотами ν_{12} и ν_{21} (эти переходы показаны на рис.1 изогнутыми стрелками), а релаксация низкочастотной когерентности между состояниями $|\varphi_2(n)\rangle$ и $|\varphi_1(n)\rangle$ характеризуется частотой ν. Изменением частот при изменении n с учетом условия (5) можно пренебречь. Именно эти частоты столкновений (ν_{12}, ν_{21} и ν) входят в итоговые кинетические уравнения для матрицы плотности, описывающие нелинейные эффекты в крыльях спектральных линий [13].

Для эффективной двухуровневой модели «одетых» атомов (рис.1) можно использовать уже известные выражения для интегралов столкновений [12, 18], полученные в рамках ударного приближения (это приближение означает, что время столкновения значительно меньше времени свободного пробега). Предполагая, что активные и буферные частицы имеют равновесное (максвелловское) распределение по скоростям, для частот столкновений ν_{12}, ν_{21} из формул, приведенных в [12, 18], можно получить следующие выражения, описывающие их через характеристики элементарного акта рассеяния (через амплитуды рассеяния) [13]:

$$\begin{aligned} \nu_{12} &= \frac{2N_\text{b}}{(\sqrt{\pi}\,\bar{u})^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1 \exp\left(-\frac{\boldsymbol{u}^2}{\bar{u}^2}\right)|f_{21}(\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u})|^2 \\ &\quad\times\delta\left(\boldsymbol{u}_1^2 - \boldsymbol{u}^2 + \frac{2\hbar\varOmega_\text{R}}{\mu}\right), \\ \nu_{21} &= \frac{2N_\text{b}}{(\sqrt{\pi}\,\bar{u})^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1 \exp\left(-\frac{\boldsymbol{u}^2}{\bar{u}^2}\right)|f_{12}(\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u})|^2 \\ &\quad\times\delta\left(\boldsymbol{u}_1^2 - \boldsymbol{u}^2 - \frac{2\hbar\varOmega_\text{R}}{\mu}\right), \quad \bar{u} = \sqrt{\frac{2k_\text{B}T}{\mu}}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}_1$ – относительные скорости сталкивающихся частиц соответственно до и после столкновения; μ – приведенная масса сталкивающихся частиц; $\delta(x)$ – дельта-функция; $f_{ji}(\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u})$ – амплитуды рассеяния «одетого» атома на бесструктурной буферной частице; индексами i и j ($i, j = 1,2$) обозначена совокупность квантовых чисел соответственно начального и конечного состояний «одетого» атома (индексу 1 отвечает состояние $|\varphi_1(n)\rangle$ с энергией $E_1(n)$, а индексу 2 – состояние $|\varphi_2(n)\rangle$ с энергией $E_2(n)$, см. рис.1).

Для расчета амплитуд рассеяния, входящих в формулу (7), нужно знать матричные элементы W_{ij} оператора взаимодействия сталкивающихся частиц $\hat{U}$ в базисе «одетых» состояний:

$$W_{ij} = \langle \varphi_i(n)|\hat{U}|\varphi_j(n)\rangle, \quad i, j = 1, 2. \tag{8}$$

Матричные элементы W_{11} и W_{22} оператора взаимодействия $\hat{U}$ характеризуют столкновительные сдвиги уровней $|\varphi_1(n)\rangle$ и $|\varphi_2(n)\rangle$ компаунд-системы, а матричные элементы W_{12} и W_{21} характеризуют столкновительные переходы между уровнями $|\varphi_1(n)\rangle$ и $|\varphi_2(n)\rangle$ этой системы.

Принимая во внимание соотношения (3), для матричных элементов W_{ij} получаем следующие выражения, описывающие их через матричные элементы U_{ii} оператора взаимодействия в базисе невозмущенных состояний атома (полагаем, что между уровнями активной частицы столкновительных переходов нет, поэтому $U_{12} = U_{21} = 0$) [6, 14, 16]:

$$W_{11} = \frac{U_{11} + U_{22}}{2} - \frac{\Omega}{2\Omega_{\rm R}}(U_{11} - U_{22}),$$

$$W_{22} = \frac{U_{11} + U_{22}}{2} + \frac{\Omega}{2\Omega_{\rm R}}(U_{11} - U_{22}), \tag{9}$$

$$W_{12} = \frac{G^*}{\Omega_{\rm R}}(U_{11} - U_{22}),\ W_{21} = W_{12}^*,\ U_{ii} = \langle\, i\,|\hat{U}|\, i\,\rangle,\ i = 1, 2.$$

Матричные элементы U_{ii} характеризуют сдвиги уровней $|\,i\rangle$ активной частицы за счет столкновений. Заметим, что матричные элементы W_{ij} содержат в себе как параметры исходного потенциала взаимодействия сталкивающихся частиц, так и параметры излучения. Это значит, что в акте столкновения участвует квант излучения. В базисе невозмущенных состояний атома столкновения не приводят к переходам между состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$ ($U_{12} = 0$) и в этом смысле являются «упругими». Ненулевая интенсивность излучения ($G \neq 0$) вызывает появление столкновительных переходов между уровнями $|\varphi_1(n)\rangle$ и $|\varphi_2(n)\rangle$ «одетого» атома ($W_{12} \neq 0$), т. е. при столкновениях возникает неупругий канал с энергетическим «зазором» $\hbar\Omega_{\rm R}$. Происходит изменение и упругого канала рассеяния.

Для частот столкновительных переходов ν_{12} и ν_{21} из выражений (7) с использованием теоремы взаимности для амплитуд прямого и обратного процессов [12, 19] нетрудно получить соотношение

$$\frac{\nu_{12}}{\nu_{21}} = \exp\Big(-\frac{\hbar\Omega_{\rm R}}{k_{\rm B}T}\Big), \tag{10}$$

отражающее принцип детального равновесия (см., напр., [20]).

Итоговые кинетические уравнения для матрицы плотности в невозмущенном атомном базисе, описывающие нелинейные эффекты в крыльях спектральных линий, имеют достаточно сложный вид [13] и мы их здесь не приводим. При не слишком высокой интенсивности излучения, такой, что

$$|G| \ll |\Omega|, \tag{11}$$

кинетические уравнения для матрицы плотности существенно упрощаются и сводятся к балансному уравнению для населенностей уровней [13]:

$$\Big(\frac{\rm d}{{\rm d}t} + A\Big)\rho_{22} = \begin{cases} \nu_{21}\rho_{11} - \nu_{12}\rho_{22}, & \Omega > 0, \\ \nu_{12}\rho_{11} - \nu_{21}\rho_{22}, & \Omega < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь ρ_{ii} – населенность уровня $|i\rangle$ ($i = 1, 2$); A – скорость спонтанного распада возбужденного уровня $|2\rangle$. Населенности уровней связаны с концентрацией N поглощающих частиц соотношением (условие нормировки)

$$\rho_{11} + \rho_{22} = N. \tag{13}$$

При не слишком высокой интенсивности излучения (11) в соотношении (10) для частот столкновений ν_{12} и ν_{21} можно положить

$$\Omega_{\rm R} = |\Omega|. \tag{14}$$

С учетом этого балансное уравнение (12) принимает вид

$$\Big(\frac{\rm d}{{\rm d}t} + A\Big)\rho_{22} = \begin{cases} \nu_{21}\{\rho_{11} - \rho_{22}\exp[-\hbar\,|\Omega|/(k_{\rm B}T)]\}, & \Omega > 0, \\ \nu_{21}\{\rho_{11}\exp[-\hbar\,|\Omega|/(k_{\rm B}T)] - \rho_{22}\}, & \Omega < 0. \end{cases} \tag{15}$$

В этом уравнении неизвестной является только одна величина – частота столкновений ν_{21}. Остальные величины либо хорошо известны (скорость A спонтанного распада возбужденного уровня), либо задаются условиями эксперимента (отстройка частоты Ω, температура T). Далее мы займемся конкретным расчетом частоты столкновений ν_{21}, входящей в уравнение (15).

3. Расчет частоты столкновений ν_{21} в приближении эйконала

Вычисление частоты столкновений ν_{21} по формуле (7) фактически сводится к расчету амплитуды рассеяния $f_{12}(\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u})$. Ее расчет в общем случае является сложной задачей и трудоемкость вычислений требует применения различных приближенных методов. При рассеянии быстрых частиц применимо приближение эйконала [12, 19]. В этом приближении для амплитуды рассеяния $f_{12}(\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u})$ справедливо выражение [12, 18]

$$f_{12}(\boldsymbol{u}_1\,|\,\boldsymbol{u}) = -{\rm i}\frac{\mu u_1}{2\pi\hbar}\int S_{12}(\boldsymbol{\rho})\exp\Big[{\rm i}\frac{\mu u_1}{\hbar}(\hat{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}_1)\boldsymbol{\rho}\Big]{\rm d}\boldsymbol{\rho},$$

$$\hat{\boldsymbol{u}} \equiv \frac{\boldsymbol{u}}{u}, \quad \hat{\boldsymbol{u}}_1 \equiv \frac{\boldsymbol{u}_1}{u_1}, \quad u_1^2 = u^2 + \frac{2\hbar\Omega_{\rm R}}{\mu}, \tag{16}$$

где функция $S_{12}(\boldsymbol{\rho})$ (вектор $\boldsymbol{\rho}$ – проекция радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$, соединяющего сталкивающие частицы, на плоскость, перпендикулярную скорости $\boldsymbol{u}$; обычно $\boldsymbol{\rho}$ интерпретируется как вектор параметра удара) определяется из системы уравнений

$$\left(\hat{u}\nabla + \mathrm{i}\frac{W_{11}}{\hbar u_1}\right)S_{12} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar u_1}W_{12}S_{22}\exp\left[\mathrm{i}\frac{\mu}{\hbar}(u-u_1)\boldsymbol{r}\hat{\boldsymbol{u}}\right],$$
$$\left(\hat{u}\nabla + \mathrm{i}\frac{W_{22}}{\hbar u}\right)S_{22} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar u}W_{21}S_{12}\exp\left[\mathrm{i}\frac{\mu}{\hbar}(u_1-u)\boldsymbol{r}\hat{\boldsymbol{u}}\right]. \tag{17}$$

Как отмечалось выше, приближение эйконала (формулы (16), (17)) применимо при рассеянии быстрых частиц в условиях, когда длина волны де Бройля сталкивающихся частиц много меньше характерного радиуса взаимодействия ρ_W и матричные элементы W_{ij} оператора взаимодействия значительно меньше кинетической энергии сталкивающихся частиц [12, 19]:

$$\frac{\hbar}{\mu u} \ll \rho_W, \quad |W_{ij}| \ll \frac{\mu u^2}{2}. \tag{18}$$

Кроме того, передаваемая при столкновениях энергия должна быть относительно мала [19], что означает выполнение условия

$$\hbar\Omega_{\mathrm{R}} \ll \frac{\mu u^2}{2}. \tag{19}$$

Для дальнейших вычислений уравнения (17) удобно рассматривать в системе координат с осью z, совпадающей с направлением свободного движения (вдоль вектора $\hat{\boldsymbol{u}}$), в этом случае вектор $\boldsymbol{\rho}$ лежит в плоскости xy и вектор $\boldsymbol{r}$ представляется в виде двух компонент: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} + \hat{\boldsymbol{u}}z$. Взаимодействие между частицами будем считать центральным, при этом матричные элементы W_{ij} зависят только от расстояния $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$ между сталкивающимися частицами. В данной системе координат уравнения (17) принимают следующий вид:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \mathrm{i}\frac{W_{11}}{\hbar u_1}\right)S_{12} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar u_1}W_{12}S_{22}\exp\left[\mathrm{i}\frac{\mu}{\hbar}(u-u_1)z\right],$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \mathrm{i}\frac{W_{22}}{\hbar u}\right)S_{22} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar u}W_{21}S_{12}\exp\left[\mathrm{i}\frac{\mu}{\hbar}(u_1-u)z\right]. \tag{20}$$

Из выражений (9) видно, что при не слишком высокой интенсивности излучения (11) можно полагать

$$W_{11} = \begin{cases} U_{22}, & \Omega > 0, \\ U_{11}, & \Omega < 0, \end{cases} \qquad W_{22} = \begin{cases} U_{11}, & \Omega > 0, \\ U_{22}, & \Omega < 0, \end{cases} \tag{21}$$

так что выполнено условие

$$|W_{12}|, |W_{21}| \ll |W_{11}|, |W_{22}|. \tag{22}$$

Это позволяет искать решение уравнений (20) в виде

$$S_{ij} = S_{ij}^{(0)} + S_{ij}^{(1)}, \tag{23}$$

где $S_{ij}^{(0)}$ – решение уравнений (20) при $W_{12} = W_{21} = 0$, а малые добавки $S_{ij}^{(1)}$ обусловлены матричными элементами W_{12} и W_{21}. Ввиду того, что при $W_{12} = 0$ столкновительные переходы между уровнями «одетого» атома отсутствуют, следует полагать $S_{12}^{(0)} = 0$. Поэтому $S_{12} = S_{12}^{(1)}$. Из (20) с учетом (22) и (23) для величины $S_{12}^{(1)}$ имеем уравнение

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \mathrm{i}\frac{W_{11}}{\hbar u_1}\right)S_{12}^{(1)} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar u_1}W_{12}S_{22}^{(0)}\exp\left[\mathrm{i}\frac{\mu}{\hbar}(u-u_1)z\right],$$
$$S_{22}^{(0)} = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar u}\int_{-\infty}^{z} W_{22}\,\mathrm{d}z\right). \tag{24}$$

Решая это линейное неоднородное дифференциальное уравнение, для $S_{12} = S_{12}^{(1)}$ получаем следующее выражение:

$$S_{12}(\rho) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar u_1}\int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\rho, z)\exp[\mathrm{i}g(\rho, z)]\,\mathrm{d}z, \tag{25}$$

где

$$g(\rho, z) = -\int_{-\infty}^{z}\frac{W_{22}(\rho, z')}{\hbar u}\mathrm{d}z' - \int_{z}^{\infty}\frac{W_{11}(\rho, z')}{\hbar u_1}\mathrm{d}z' + \frac{\mu}{\hbar}(u-u_1)z. \tag{26}$$

Вычислим интеграл в формуле (25) методом стационарной фазы. Вклад в интеграл дает окрестность точек, в которых функция $g(\rho, z)$ стационарна, т. е. где производная $\partial g/\partial z = 0$. Фаза $g(\rho, z)$ стационарна в двух точках: $z_{1,2} = \pm\sqrt{r_0^2 - \rho^2}$, которым отвечает расстояние r_0 между сталкивающимися частицами. Величина r_0 соответствует точке пересечения термов компаунд-системы и определяется из равенства

$$W_{11}(r_0) - W_{22}(r_0) = \hbar\Omega_{\mathrm{R}}, \tag{27}$$

которое следует из уравнения $\partial g/\partial z = 0$ при условиях (11), (18), (19) и дополнительном к ним условии

$$\frac{\hbar\Omega_{\mathrm{R}}}{2\mu u^2} \ll \left|\frac{U_{11} - U_{22}}{U_{11} + U_{22}}\right|, \tag{28}$$

означающем не слишком близкое совпадение потенциалов взаимодействия буферных частиц с атомами в основном и возбужденном состояниях. Расчет интеграла в формуле (25) методом стационарной фазы дает

$$S_{12}(\rho) = \mathrm{i}G^{*}\mathrm{sgn}\Omega\sqrt{\frac{2\pi\hbar r_0}{uF}} \times \frac{\exp\{\mathrm{i}[\delta_1(\rho) + \alpha_1]\} + \exp\{\mathrm{i}[\delta_2(\rho) + \alpha_2]\}}{(r_0^2 - \rho^2)^{1/4}}, \tag{29}$$

где величина

$$F = \left|\frac{\mathrm{d}[U_{11}(r) - U_{22}(r)]}{\mathrm{d}r}\right|_{r = r_0} \tag{30}$$

характеризует разность наклонов термов компаунд-системы в точке пересечения; функции $\delta_{1,2}(\rho)$ определяются выражением (верхний и нижний знаки относятся к $\delta_1(\rho)$ и $\delta_2(\rho)$ соответственно)

$$\delta_{1,2}(\rho) = -\int_{\mp\sqrt{r_0^2-\rho^2}\,\mathrm{sng}\Omega}^{\infty}\frac{U_{11}(r)}{\hbar u}\mathrm{d}z - \int_{\pm\sqrt{r_0^2-\rho^2}\,\mathrm{sng}\Omega}^{\infty}\frac{U_{22}(r)}{\hbar u}\mathrm{d}z \mp \frac{|\Omega|}{u}\sqrt{r_0^2 - \rho^2}; \tag{31}$$

$\alpha_{1,2} = \pm\pi/4$ при $\partial^2 g(z_{1,2})/\partial z^2 \gtrless 0$. Здесь и далее при расчетах в силу условий (11), (19) полагаем $u_1 = u$ и $\Omega_{\mathrm{R}} = |\Omega|$.

Рассмотрим теперь формулу (16) для амплитуды рассеяния $f_{12}(\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u})$. В той же системе координат, в которой записаны уравнения (20), она принимает следующий вид (полагаем, что вектор $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ лежит в плоскости xz и $u_1 = u$):

$$f_{12}(\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u}) = -\mathrm{i}\frac{\mu u}{2\pi\hbar}\int_0^\infty \rho S_{12}(\rho)\mathrm{d}\rho \times\int_0^{2\pi}\exp(-\mathrm{i}q\rho\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi, \quad q = \frac{\mu u \sin\theta}{\hbar}, \tag{32}$$

где θ – угол рассеяния ($\cos\theta = \hat{\boldsymbol{u}}_1\hat{\boldsymbol{u}}$). Используя интегральное представление для функции Бесселя первого рода нулевого порядка $J_0(x)$ (см., напр., [21]), находим, что в (32) интеграл по φ равен $2\pi J_0(q\rho)$. При рассеянии на углы, отвечающие законам классической механики (при $\theta \gg \theta_{\rm d}$, где $\theta_{\rm d} \sim \hbar/(\mu u \rho_W)$ – угол квантовомеханической дифракции), можно считать $q\rho \gg 1$. Это условие позволяет воспользоваться асимптотическим разложением [21]

$$J_0(q\rho) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi q\rho}}\{\exp[\mathrm{i}(q\rho - \pi/4)] + \exp[-\mathrm{i}(q\rho - \pi/4)]\}. \tag{33}$$

С учетом (29) и (33) формула (32) принимает вид

$$f_{12}(\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u}) = G^*\mathrm{sng}\Omega\sqrt{\frac{\mu r_0}{F\sin\theta}}[J_1^{(+)} + J_1^{(-)} + J_2^{(+)} + J_2^{(-)}],$$

$$J_k^{(\pm)} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\rho}\exp\left[\mathrm{i}\varphi_k^{(\pm)}(\rho)\right]}{(r_0^2 - \rho^2)^{1/4}}\mathrm{d}\rho, \tag{34}$$

$$\varphi_k^{(\pm)}(\rho) = \delta_k(\rho) + \alpha_k \pm (q\rho - \pi/4), \quad k = 1,2.$$

Вычисляя интеграл $J_k^{(\pm)}$ в формуле (34) методом стационарной фазы (проводя разложение фазы $\varphi_k^{(\pm)}(\rho)$ до квадратичного члена), получаем

$$J_k^{(\pm)} = \sqrt{2\pi\rho_k^{(\pm)}\left|\frac{\mathrm{d}^2\delta_k(\rho_k^{(\pm)})}{\mathrm{d}\rho^2}\right|^{-1}}\,\frac{\exp\{\mathrm{i}[\varphi_k^{(\pm)}(\rho_k^{(\pm)}) + \beta_k]\}}{\left[r_0^2 - (\rho_k^{(\pm)})^2\right]^{1/4}}, \tag{35}$$

где $\beta_k = \pm\pi/4$ при $\mathrm{d}^2\delta_k(\rho_k^{(\pm)})/\mathrm{d}\rho^2 \gtrless 0$, а точки $\rho_k^{(\pm)}$ стационарной фазы определяются из уравнения

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_k^{(\pm)}(\rho_k^{(\pm)})}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\mathrm{d}\delta_k(\rho_k^{(\pm)})}{\mathrm{d}\rho} \pm q = 0. \tag{36}$$

Для расчета частоты столкновений ν_{21} по формуле (7) в нее нужно подставить амплитуду рассеяния (34) с величинами $J_k^{(\pm)}$ из (35). При этом из-за различия фаз величин $J_k^{(\pm)}$ в подынтегральном выражении для ν_{21} можно пренебречь осциллирующими перекрестными членами, возникающими в квадрате модуля суммы величин $J_k^{(\pm)}$. С учетом этого для частоты столкновений ν_{21} получаем следующее выражение:

$$\nu_{21} = \frac{2|G|^2\mu r_0}{\sqrt{\pi}F}\frac{N_{\rm b}}{\bar{u}^3}\int_0^\infty u^3\exp\left(-\frac{u^2}{\bar{u}^2}\right)\mathrm{d}u \times\int\frac{B_1^{(+)} + B_1^{(-)} + B_2^{(+)} + B_2^{(-)}}{\sin\theta}\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{u}}_1, \tag{37}$$

где

$$B_k^{(\pm)} = \rho_k^{(\pm)}\left[\left|\frac{\mathrm{d}^2\delta_k(\rho_k^{(\pm)})}{\mathrm{d}\rho^2}\right|\sqrt{r_0^2 - (\rho_k^{(\pm)})^2}\right]^{-1}, \quad k = 1,2. \tag{38}$$

Формула (37) допускает некоторое упрощение и для дальнейших расчетов ее удобно представить в виде

$$\nu_{21} = QK_{\rm oc}, \tag{39}$$

где

$$K_{\rm oc} = \frac{8\pi^2|G|^2\hbar r_0^2 N_{\rm b}}{F} \tag{40}$$

имеет размерность частоты столкновений, а Q – безразмерная величина, определяемая выражением

$$Q = \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}\hbar r_0\bar{u}^3}\int_0^\infty u^3\exp\left(-\frac{u^2}{\bar{u}^2}\right)\mathrm{d}u \times\int_0^\pi[B_1^{(+)} + B_1^{(-)} + B_2^{(+)} + B_2^{(-)}]\mathrm{d}\theta. \tag{41}$$

Величина $K_{\rm oc}$ введена в работе [16] (мы сохраняем принятое в [16] обозначение) и определена как «число оптико-столкновительных переходов в единице объема в единицу времени», рассчитанное в квазиклассическом приближении. По сути она является аналогом частоты столкновений ν_{21}, рассчитанной в квазиклассическом приближении. Таким образом, безразмерная величина Q характеризует степень совпадения квантовомеханического (ν_{21}) и квазиклассического ($K_{\rm oc}$) расчетов частоты оптических столкновений (расчеты совпадают при $Q = 1$).

Для дальнейших расчетов необходимо задать конкретный вид матричных элементов $U_{ii}(r)$. Ниже мы рассмотрим случай степенного потенциала взаимодействия сталкивающихся частиц.

4. Степенной потенциал взаимодействия

В случае степенного потенциала взаимодействия матричные элементы $U_{ii}(r)$ имеют вид

$$U_{ii}(r) = \frac{c_i}{r^l}, \quad i = 1,2. \tag{42}$$

Мы полагаем, что для атомов в основном ($i = 1$) и в возбужденном ($i = 2$) состояниях показатель степени l одинаков, а константы взаимодействия c_1 и c_2 различны. Для определенности при расчетах далее будем полагать, что l – четное число, а $c_2 > c_1$.

Расчеты безразмерной величины Q по формуле (41) с учетом (42) приводят к следующему выражению:

$$Q = \frac{2\varepsilon_0}{\sqrt{\pi}\,la}[Q_1^{(+)} + Q_1^{(-)} + Q_2^{(+)} + Q_2^{(-)}], \tag{43}$$

$$Q_k^{(\pm)} = \int_0^\infty x^4\exp(-x^2)\mathrm{d}x\int_0^{\pi/2}g_k^{(\pm)}\mathrm{d}\theta,$$

$$g_k^{(\pm)} = 2(x_k^{(\pm)})^2\left|(-1)^k\left[1 + (x_k^{(\pm)})^2\right]x_k^{(\pm)} \pm\frac{\varepsilon_0 x^2\sin\theta}{a}\sqrt{1 - (x_k^{(\pm)})^2}\right|^{-1}, \quad \varepsilon_0 = \mu\bar{u}^2\left(\frac{c_1 + c_2}{r_0^l}\right)^{-1},$$

$$a = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2}, \quad x = \frac{u}{\bar{u}}, \quad x_k^{(\pm)} = \frac{\rho_k^{(\pm)}}{r_0}, \quad k = 1, 2.$$

Здесь безразмерные точки стационарной фазы $x_k^{(\pm)}$ определяются из уравнения (36), которое для рассматриваемого нами степенного потенциала взаимодействия (42) принимает вид

$$\frac{b(l)}{(x_k^{(\pm)})^l}\left[\frac{\pi}{2} \pm a\arctan\sqrt{\frac{1}{(x_k^{(\pm)})^2} - 1}\right] \pm a\sqrt{1 - (x_k^{(\pm)})^2}$$

$$\times \sum_{m=1}^{l/2} \frac{b_m}{(x_k^{(\pm)})^{2m-1}} \pm \varepsilon_0 x^2 \sin\theta = 0, \qquad (44)$$

$$b(l) = \frac{l}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(l+1))}{\Gamma(\frac{1}{2}(l+2))},$$

$$b_m = \begin{cases} 1, & m = 1, \\ \dfrac{(l-1)(l-2)\dots(l+3-2m)}{(l-2)(l-4)\dots(l+2-2m)}, & m \geqslant 2, \end{cases}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция. В этом уравнении точкам $x_1^{(\pm)}$ и $x_2^{(\pm)}$ соответствуют знаки «+» и «−» перед параметром a, а знаку «±» в $x_k^{(\pm)}$ отвечает знак «±» перед параметром ε_0 (точке $x_1^{(\pm)}$ соответствуют $+a, \pm\varepsilon_0$, а точке $x_2^{(\pm)}$ отвечает $-a, \pm\varepsilon_0$). Из анализа уравнения (44) следует, что в случае $c_2 > c_1 > 0$ существуют только две точки стационарной фазы – $x_1^{(-)}$ и $x_2^{(-)}$. В этом случае в формуле (43) остаются два интеграла – $Q_1^{(-)}$ и $Q_2^{(-)}$, т.к. интегралы $Q_1^{(+)}$ и $Q_2^{(+)}$ отсутствуют.

Интеграл $Q_2^{(-)}$ при его вычислении по формуле (43) расходится вследствие того, что знаменатель величины $g_2^{(-)}$ обращается в нуль при некоторых значениях угла рассеяния θ и безразмерной скорости x. Эта особенность обусловлена тем, что в формуле (35) для $J_2^{(-)}$ в этих точках величина $\mathrm{d}^2\delta_2(\rho_2^{(-)})/\mathrm{d}\rho^2$ обращается в нуль. Это означает, что интеграл $J_2^{(-)}$ (34) в этих точках нужно рассчитывать по иной, нежели (35), формуле. А именно, при расчете интеграла $J_2^{(-)}$ методом стационарной фазы саму фазу в окрестности стационарной точки нужно разложить в ряд Тейлора до кубического члена (а не до квадратичного члена, как при выводе формулы (35)). Вычисляя интеграл $J_2^{(-)}$ в формуле (34) методом стационарной фазы, проводя разложение фазы $\varphi_2^{(-)}(\rho)$ до кубического члена (квадратичным членом в этом разложении пренебрегаем ввиду его малости вблизи критических точек), получаем

$$J_2^{(-)} = \frac{(4/3)^{1/6}\Gamma(1/3)}{\left|\mathrm{d}^3\delta_2(\rho_2^{(-)})/\mathrm{d}\rho^3\right|^{1/3}} \frac{\sqrt{\rho_2^{(-)}}\exp[\mathrm{i}\varphi_2^{(-)}(\rho_2^{(-)})]}{\left[r_0^2 - (\rho_2^{(-)})^2\right]^{1/4}}, \qquad (45)$$

где точка $\rho_2^{(-)}$ стационарной фазы по-прежнему определяется из (36). Замена формулы (35) формулой (45) означает, что в критических точках θ, x функцию $g_2^{(-)}$ (43) следует заменить функцией $g_{2N}^{(-)}$, определяемой выражением

$$g_{2N}^{(-)} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{lak_0}{\varepsilon_0 x}\right)^{1/3} \frac{(x_2^{(-)})^{5/3}\sqrt{1 - (x_2^{(-)})^2}}{\left|H_2^{(-)}\right|^{2/3}}, \qquad (46)$$

$$k_0 = \frac{\mu\bar{u}r_0}{\hbar}, \quad H_2^{(-)} = 2(l+2)(x_2^{(-)})^6 - (2l+5)(x_2^{(-)})^4$$

$$+ (l+3)(x_2^{(-)})^2 - l + \frac{(l+1)\varepsilon_0 x^2 \sin\theta}{ax_2^{(-)}}\left[1 - (x_2^{(-)})^2\right]^{3/2}.$$

При численном расчете интеграла $Q_2^{(-)}$ мы будем заменять функцию $g_2^{(-)}$ функцией $g_{2N}^{(-)}$ в том случае, если выполнено условие $g_2^{(-)} > g_{2N}^{(-)}$.

На рис.2 показаны результаты численных расчетов величины $Q = \nu_{21}/K_{oc}$ по формулам (43), (44), (46) в зависимости от отношения констант взаимодействия c_1/c_2 при различных параметрах l для степенного потенциала взаимодействия и при различных значениях параметра ε_0, равного отношению тепловой энергии сталкивающихся частиц к характерной величине потенциала взаимодействия. Численный анализ показывает, что отношение ν_{21}/K_{oc} малочувствительно к величине параметра k_0 и поэтому расчеты проводились только при одном значении $k_0 = 45$, характерном, например, для системы Na + He при температуре $T = 580$ K и $r_0 = 5 \times 10^{-8}$ см. Значения ε_0 выбирались достаточно большими для того, чтобы было выполнено

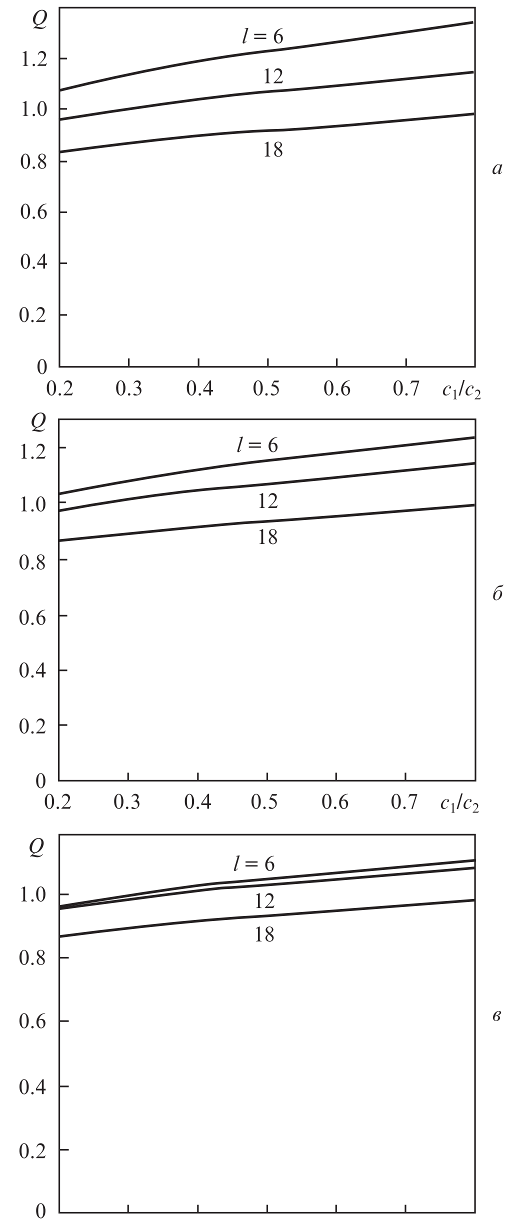

Рис.2. Зависимости величины $Q = \nu_{21}/K_{oc}$ от отношения констант взаимодействия c_1/c_2 при различных параметрах l для степенного потенциала взаимодействия и при $k_0 = 45$, $\varepsilon_0 = 500$ (*а*), 1000 (*б*) и 2000 (*в*).

условие применимости эйконального приближения $|U_{11}|$, $|U_{22}| \ll \mu u^2/2$ при скоростях, значительно меньших тепловой скорости (это условие необходимо для корректности подынтегрального выражения в формуле для Q (43) при скоростях $u \ll \bar{u}$). Из рис.2 видно, что отношение $\nu_{21}/K_{\rm oc}$ близко к единице и медленно растет с увеличением отношения c_1/c_2. Для степенных потенциалов с l = 6, 12 и 18 отличие отношения $\nu_{21}/K_{\rm oc}$ от единицы уменьшается с ростом параметра ε_0 и при $\varepsilon_0 = 2000$ составляет около 10%.

Итак, квантовомеханический (ν_{21}) и квазиклассический ($K_{\rm oc}$) расчеты частоты оптических столкновений дают близкие результаты: отношение $\nu_{21}/K_{\rm oc}$ близко к единице при выполнении условия применимости эйконального приближения (при достаточно больших параметрах ε_0).

5. Результаты и выводы

Таким образом, нами проведен квантовомеханический расчет частоты столкновений ν_{21}, которая входит в кинетические уравнения для матрицы плотности, описывающие нелинейные эффекты в крыльях спектральных линий. Частота столкновений сложным образом зависит от потенциала взаимодействия сталкивающихся частиц и от характеристик излучения (интенсивности и отстройки частоты излучения). Численный анализ показал, что квантовомеханический расчет частоты столкновений в приближении эйконала дает результат, близкий к тому, который уже известен из квазиклассической теории крыла спектральной линии [16]. А именно, частота столкновений ν_{21} оказалась близкой к величине $K_{\rm oc}$, введенной в работе [16] и определенной как «число оптико-столкновительных переходов в единице объема в единицу времени» (см. рис.2,*в*).

Проведенный анализ позволяет заключить, что в рассматриваемых условиях для частоты столкновений ν_{21} в кинетических уравнениях для матрицы плотности, полученных в работе [13] и описывающих нелинейные эффекты в крыльях спектральных линий, с небольшой погрешностью можно полагать

$$\nu_{21} = K_{\rm oc}. \qquad (47)$$

Это соотношение позволяет представить частоту столкновений ν_{21} в таком же виде, в каком была представлена частота $K_{\rm oc}$ в работах [14–16]:

$$\nu_{21} = \frac{2|G|^2}{\Omega^2}\Gamma_{\rm oc}(\Omega). \qquad (48)$$

Величина $\Gamma_{\rm oc}(\Omega)$ входит в модифицированную формулу Лоренца [15, 16], описывающую весь контур спектральной линии, включая далекие крылья. В общем случае $\Gamma_{\rm oc}(\Omega)$ зависит от отстройки частоты Ω и интенсивности излучения (от параметра $|G|$). В случае не слишком сильного поля (11) зависимость $\Gamma_{\rm oc}(\Omega)$ от интенсивности излучения исчезает, остается зависимость только от отстройки частоты [16]. При небольшой отстройке частоты излучения ($|\Omega| \ll \Omega_{\rm W}$, где $\Omega_{\rm W}$ – вайскопфовская частота [16]) величина $\Gamma_{\rm oc}(\Omega)$ равна ударной полуширине линии поглощения Γ [16], а при большой отстройке ($|\Omega| \gg \Omega_{\rm W}$) она может быть как существенно больше, так и существенно меньше Γ [16]. Частота столкновений ν_{21} уменьшается с ростом модуля отстройки $|\Omega|$ [16].

В стационарных условиях из (15) с учетом соотношения (48) и условия нормировки (13) получаем известное выражение [10, 22] для разности населенностей возбужденного ($|2\rangle$) и основного ($|1\rangle$) уровней:

$$\rho_{22} - \rho_{11} = N\frac{\varkappa\{1 - \exp[-\hbar|\Omega|/(k_{\rm B}T)]\}{\rm sgn}\Omega - 1}{1 + \varkappa\{1 + \exp[-\hbar|\Omega|/(k_{\rm B}T)]\}}, \qquad (49)$$

$$\varkappa = \frac{2|G|^2\Gamma_{\rm oc}(\Omega)}{A\Omega^2}.$$

Величина $\varkappa$ имеет смысл параметра насыщения для перехода $|2\rangle - |1\rangle$ (при $|\Omega| \gg \Gamma$). Из (49) следует, что при достаточно высокой интенсивности возбуждающего излучения (при $\varkappa > 1$) и при положительной отстройке частоты излучения ($\Omega > 0$) на переходе $|2\rangle - |1\rangle$ возникает инверсия населенностей. Как уже говорилось во Введении, этот эффект зарегистрирован экспериментально в виде генерации когерентного излучения на резонансном переходе атомов натрия при воздействии излучения накачки на «синее» крыло линии поглощения [6, 8–10].

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке программы ОФН РАН «Фундаментальная оптическая спектроскопия и её приложения» (проект 9.5) и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (№ НШ-4339.2010.2).

1. Hedges R.E.M., Drummond D.L., Gallagher A. *Phys. Rev. A*, **6**, 1519 (1972).
2. Галлагер А. В кн.: *Эксимерные лазеры*. Под ред. Ч.Роудза (М.: Мир, 1981, с. 173).
3. Земцов Ю.К., Старостин А.Н. *ЖЭТФ*, **103**, 345 (1993).
4. Земцов Ю.К., Сечин А.Ю., Старостин А.Н. *ЖЭТФ*, **110**, 1654 (1996).
5. Земцов Ю.К., Сечин А.Ю., Старостин А.Н. *ЖЭТФ*, **114**, 135 (1998).
6. Марков Р.В., Плеханов А.И., Шалагин А.М. *ЖЭТФ*, **120**, 1185 (2001).
7. Шалагин А.М. *Письма в ЖЭТФ*, **75**, 301 (2002).
8. Markov R.V., Plekhanov A.I., Shalagin A.M. *Phys. Rev. Lett*., **88**, 213601 (2002).
9. Markov R.V., Plekhanov A.I., Shalagin A.M. *Acta Phys. Polonica A*, **101**, 77 (2002).
10. Марков Р.В., Пархоменко А.И., Плеханов А.И., Шалагин А.М. *ЖЭТФ*, **136**, 211 (2009).
11. Алексеев В.А., Андреева Т.Л., Собельман И.И. *ЖЭТФ*, **62**, 614 (1972).
12. Раутиан С.Г., Смирнов Г.И., Шалагин А.М. *Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул* (Новосибирск: Наука, 1979).
13. Пархоменко А.И., Шалагин А.М. *ЖЭТФ*, **140** (5), 879 (2011).
14. Лисица В.С., Яковленко С.И. *ЖЭТФ*, **68**, 479 (1975).
15. Бакаев Д.С., Вдовин Ю.А., Ермаченко В.М., Яковленко С.И. *ЖЭТФ*, **83**, 1297 (1982).
16. Яковленко С.И. *УФН*, **136**, 593 (1982).
17. Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J., Grynberg G. *Atom – Photon Interactions: Basic Processes and Applications* (Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2004).
18. Rautian S.G., Shalagin A.M. *Kinetic Problems of Nonlinear Spectroscopy* (Amsterdam, New York: Elsevier Science Publishing Company, 1991).
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика* (М.: Наука, 1989).
20. *Физическая энциклопедия* (М.: Советская энциклопедия, 1988, т. 1, с. 585).
21. *Справочник по специальным функциям*. Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган (М.: Наука, 1979).
22. Пархоменко А.И., Шалагин А.М. *Квантовая электроника*, **39**, 1143 (2009).