

## Сингулярности поляризации светового поля второй гармоники, возникающей при отражении от поверхности изотропной хиральной среды падающего вдоль нормали эллиптически поляризованного гауссова пучка

К.С.Григорьев, В.А.Макаров, И.А.Пережогин, Н.Н.Потравкин

*Проанализированы условия возникновения сингулярностей поляризации в поперечном сечении пучка на удвоенной частоте, появляющегося при отражении от поверхности изотропной гиротропной среды однородно эллиптически поляризованного гауссова пучка основного излучения. Показано, что существуют такие состояния эллиптической поляризации падающего света, при которых в поперечном сечении отраженного пучка второй гармоники будут присутствовать одна или две С-линии, а также две, одна или ни одной L-линии (геометрическое место точек пространства, где распространяющееся излучение имеет циркулярную (линейную) поляризацию). Получены формулы, определяющие условия появления L- и С-линий и задающие их ориентацию в плоскости поперечного сечения пучка второй гармоники.*

**Ключевые слова:** сингулярности поляризации, генерация второй гармоники, хиральность, нелокальность нелинейного отклика.

Несмотря на то что генерация второй гармоники (ГВГ) лазерным лучом имеет уже пятидесятилетнюю историю, ее различные схемы продолжают активно исследоваться, применяться и совершенствоваться. В настоящее время с помощью ГВГ, изучают, например, локальный и нелокальный отклики наночастиц [1], микроструктурированного материала [2], рассеяние излучения на наноразмерных поверхностных неоднородностях [3]. ГВГ пытаются использовать для исследования двухфотонных резонансов и колебательных спектров различных молекул [4–6].

ГВГ от поверхности нелинейных оптически активных сред и тонких пленок является одним из наиболее распространенных методов их исследования. Условия возникновения сигнала второй гармоники (ВГ) и методика обнаружения эффектов, обусловленных хиральностью молекул, хорошо известны и описаны в литературе [7–12]. Достаточно давно, в теоретических работах, выполненных в плосковолновом приближении, предпринимались попытки различными способами учесть влияние пространственной дисперсии нелинейного оптического отклика хиральной среды [7–10], а также приповерхностной неоднородности ее оптических свойств [13]. В экспериментах старались разделить вклады в сигнал ВГ от поверхности и объема вещества [14], выделить часть излучения ВГ, обусловленную хиральностью среды [15, 16]. В работах [11, 12] впервые учитывалась ограниченность пучка основного излучения при расчете интенсивности и параметров поляризации сигнала на удвоенной частоте при ГВГ от поверхности среды с пространственной дисперсией квадратичной нелинейности. Были получены

формулы для поперечного пространственного фурье-образа электрического поля отраженной волны на удвоенной частоте в дальней зоне дифракции. Однако основное внимание в этих работах уделялось возможности появления ВГ и расчету энергетических характеристик отраженного излучения на удвоенной частоте (напомним, что в плосковолновом приближении ГВГ невозможна при нормальном падении волны основного излучения на оптически активную среду). Приповерхностная неоднородность оптических свойств нелинейной среды в этих работах учитывалась с помощью модифицированных граничных условий для электрического и магнитного полей. Корректность такого подхода обоснована в [17, 18].

Впоследствии были найдены и проанализированы формулы, описывающие пространственное распределение поляризации распространяющегося излучения на удвоенной частоте [19]. Несмотря на результаты исследований, свидетельствующие о появлении пространственно неоднородных распределений поляризации в сигнальном пучке ВГ, на данный момент отсутствуют работы, посвященные выявлению возможностей и условий возникновения в нем сингулярностей поляризации светового поля (точек или линий в поперечном сечении распространяющегося пучка, в которых интенсивность одной из двух его ортогонально поляризованных компонент становится равной нулю).

Условия возникновения сингулярностей поляризации и динамика их распространения в пространстве являются предметом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований в линейной оптике. В одной из первых работ [20] была определена активно используемая в настоящее время терминология, согласно которой геометрическое место точек пространства, где распространяющееся излучение имеет циркулярную (линейную) поляризацию, стали называть С-линиями (L-поверхностями). В плоскости поперечного сечения светового пучка они превращаются в С-точки (L-линии). В отличие от обычных оптических вихрей (или винтовых фазовых дис-

К.С.Григорьев, В.А.Макаров, И.А.Пережогин, Н.Н.Потравкин.  
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,  
физический факультет, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы;  
e-mail: iap1@mail.ru; vamakarov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 9 августа 2011 г.

локаций), где интенсивность «скалярного» поля равна нулю, изучаемых обычно в приближении неизменности поляризации распространяющегося излучения, С-точки, в которых не определена ориентация эллипса поляризации напряженности электрического поля электромагнитной волны, можно назвать «компонентными» оптическими вихрями. В их окрестностях возможны три типа морфологических распределений эллипсов поляризации светового поля, получивших в англоязычной, а затем и в русскоязычной литературе названия «star», «lemon» и «monstar».

Позднее были исследованы условия образования и динамика развития сингулярностей поляризации в различных задачах линейной оптики [20–31]. Отдельно следует отметить разработанные высокоэффективные экспериментальные методы детектирования световых пучков с точками сингулярности фазы и поляризации [26–31]. Сингулярности поляризации являются устойчивыми объектами в распространяющемся световом пучке, а их появление, уничтожение и взаимодействие происходит по строго определенным сценариям.

Отсутствие исследований формирования сингулярностей поляризации в сигнальном пучке при ГВГ и суммарной частоты от поверхности изотропной хиральной среды, а также незначительный объем исследований формирования сингулярностей поляризации в задачах нелинейной оптики и стимулировало настоящую работу. В ней рассмотрены сингулярности поляризации, появляющиеся в поперечном сечении пучка на удвоенной частоте, который возникает при ГВГ однородно поляризованным гауссовым пучком основного излучения от поверхности изотропной хиральной среды в геометрии нормального падения. Именно в условиях нормального падения неоднородность распределения поляризации в сигнальном пучке наиболее заметна [12]. При этом распределение поляризации в отраженном пучке является цилиндрически симметричным [19], т.е. состояние поляризации одинаково вдоль любой прямой линии, проведенной в плоскости поперечного сечения пучка через его центр. Это условие «запрещает» появление в нем «точечных» сингулярностей (С-точек), однако допускает появление L- и С-линий, пересекающихся в центре пучка, где интенсивность равна нулю. Их исследованию и посвящена настоящая работа.

Пусть из вакуума параллельно оси  $z$  вдоль нормали к плоской поверхности изотропной гиротропной среды падает эллиптически поляризованный монохроматический гауссов пучок, напряженность электрического поля в котором задается формулой

$$E(x, y, z) = \left[ e + \frac{i\mathbf{e}_z(\mathbf{e}\nabla)}{k} \right] \frac{E_0}{\beta(z)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2\beta(z)} - i\omega t + ikz\right) = E_{\perp}e + E_z e_z. \tag{1}$$

Здесь  $e_z$  – параллельный оси единичный вектор;  $E_0$  – амплитуда;  $\omega$  – частота;  $w$  – полуширина падающего пучка;  $k = \omega/c$  – модуль волнового вектора;  $\beta(z) = 1 + 2iz/(kw^2)$ . Выражение (1) содержит продольную составляющую  $E_z e_z$  и поперечную составляющую  $E_{\perp}e = [E_+(e_x - ie_y) + E_-(e_x + ie_y)]/\sqrt{2}$ , где  $E_{\pm} = E_x \pm iE_y$  – циркулярно поляризованные компоненты поля, а  $e_x$  и  $e_y$  – параллельные осям  $x$  и  $y$  единичные векторы. Падающий световой пучок удобно характеризовать зависящей от поперечных координат

нормированной интенсивностью  $I(x, y) = (|E_+|^2 + |E_-|^2)/2$  и двумя константами: степенью эллиптичности эллипса поляризации  $M_0 = (|E_+|^2 - |E_-|^2) / (|E_+|^2 + |E_-|^2)$  и углом наклона его главной оси  $\Psi_0 = 0.5\text{arg}\{E_+ E_-^*\}$ . Величина  $M_0$  в общем случае изменяется от  $-1$  (циркулярная поляризация с левым вращением) до  $1$  (циркулярная поляризация с правым вращением), проходя через ноль (линейная поляризация). Изотропная гиротропная среда относится к предельной группе  $\infty\infty$ , а ее поверхность – к группе  $\infty$ . Поэтому угол  $\Psi_0$  можно, не нарушая общности, положить равным нулю (фактически направление оси  $x$  задается направлением главной оси эллипса поляризации падающего излучения). В этом случае единичный комплексный вектор поляризации  $e = 0.5(1 - M_0)^{1/2}(e_x + ie_y) + (1 + M_0)^{1/2}(e_x - ie_y)$ . Подчеркнем, что выражение (1) удовлетворяет уравнению Максвелла  $\text{div}E = 0$  в первом приближении по углу расходимости пучка, который в дальнейшем будем считать малым.

Распределение электрического поля  $E_{SH} = E_{SH+}e_{-} + E_{SH-}e_{+}$  в пучке на удвоенной частоте задается формулой

$$E_{SH\pm}(r, \varphi, z) = \frac{32\pi i E_0^2 r}{w^2 \omega (1 + n_{2\omega})^2 (1 + n_{2\omega}) [\beta^*(z)]^2} \times \{-C_0 \sqrt{1 - M_0^2} \exp(\pm i\varphi) + [\sqrt{1 + M_0} \exp(-i\varphi) + \sqrt{1 - M_0} \exp(i\varphi)] \sqrt{1 \pm M_0} C_{\pm}\} \times \exp[-2i\omega t - i2\omega z/c - 2r^2/(w^2\beta^*(z))], \tag{2}$$

ранее полученной в [19]. В (2)  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$  и  $\varphi = \arctan(y/x)$  – полярный радиус и полярный угол в цилиндрической системе координат;  $C_0 = n_{2\omega} b_1 + i\gamma_0/n_{2\omega}$ ;  $C_{\pm} = n_{\omega}(b_3 \mp ib_5)$ ;  $n_{\omega}$  и  $n_{2\omega}$  – линейные показатели преломления среды на частотах  $\omega$  и  $2\omega$ ;  $b_1 = \kappa_{xx}^{(2)} = \kappa_{yy}^{(2)}$ ,  $b_3 = \kappa_{yz}^{(2)} = \kappa_{xz}^{(2)} = \kappa_{zy}^{(2)} = \kappa_{zx}^{(2)}$ ;  $b_5 = \kappa_{xy}^{(2)} = -\kappa_{yx}^{(2)} = \kappa_{xy}^{(2)} = -\kappa_{yx}^{(2)}$ ;  $\gamma_0 = \omega\gamma_{xxyy}^{(2)}$ .

Тензоры  $\hat{\gamma}^{(2)}(2\omega; \omega, \omega)$  и  $\hat{\kappa}^{(2)}(2\omega; \omega, \omega)$  описывают пространственную дисперсию квадратичной нелинейности хиральной среды и квадратичный по полю отклик ее поверхности в рамках подхода [17, 18]. Численные значения параметров, характеризующих нелинейность изотропных хиральных жидкостей, и обзор экспериментальных работ, в которых они измерялись, можно найти в [19, 32].

Условие появления в поперечном сечении пучка на удвоенной частоте L-линии  $\varphi = \varphi_L$ , направленной под углом  $\varphi_L$  к оси  $x$ , таково:

$$|E_{SH+}(r, \varphi = \varphi_L, z)| = |E_{SH-}(r, \varphi = \varphi_L, z)|. \tag{3}$$

В точках, принадлежащих этой линии, степень эллиптичности эллипса поляризации  $M_{SH}(r, \varphi, z) = (|E_{SH+}|^2 - |E_{SH-}|^2) / (|E_{SH+}|^2 + |E_{SH-}|^2)$  второй гармоники обращается в ноль. В [19] было показано, что уравнение (3) при определенных значениях параметров нелинейной среды и степени эллиптичности падающего излучения может иметь два корня,

$$\varphi_{L1, L2} = \arctan[(-B \pm \sqrt{B^2 - AC})/A], \tag{4}$$

если входящие в (4) величины

$$A = (1 - \sqrt{1 - M_0^2})[M_0 n_{\omega}(b_3^2 + b_5^2) + b_5 \gamma_0/n_{2\omega}]$$

$$-M_0[M_0 b_5 \gamma_0 / n_{2\omega} + \sqrt{1 - M_0^2} n_{2\omega} b_1 b_3],$$

$$B = \sqrt{1 - M_0^2} (b_3 \gamma_0 / n_{2\omega} + n_{2\omega} b_1 b_5 M_0),$$

$$C = M_0 n_{\omega} (b_3^2 + b_5^2) + (1 - M_0^2) b_5 \gamma_0 / n_{2\omega}$$

удовлетворяют условию  $B^2 - AC > 0$ . В этом случае плоскость поперечного сечения пучка ВГ делится двумя пересекающимися в точке  $(0,0,z)$  L-линиями  $\varphi = \varphi_{L1}$  и  $\varphi = \varphi_{L2}$  на четыре сектора, таких, что направление вращения вектора напряженности электрического поля меняется каждый раз при переходе через L-линию. При  $B^2 - AC = 0$  имеем  $\varphi_{L1} = \varphi_{L2}$ , и в пучке присутствует одна L-линия, а вращение поляризации всюду одинаково. Если  $B^2 - AC < 0$ , то уравнение (4) не имеет решений. Сингулярности поляризации L-типа в этом случае не возникают.

Условия появления C-линии ( $\varphi = \varphi_{C+}$ ) ( $\varphi = \varphi_{C-}$ ) с левым (правым) вращением вектора напряженности электрического поля, на которой  $M_{SH}(\varphi_{C+}) = -1$  ( $M_{SH}(\varphi_{C-}) = 1$ ), имеют, соответственно, следующий вид:

$$E_{SH+}(r, \varphi = \varphi_{C+}, z) = 0, \quad (5)$$

$$E_{SH-}(r, \varphi = \varphi_{C-}, z) = 0. \quad (6)$$

Каждое из уравнений (5), (6) на самом деле представляет собой систему из двух уравнений, т.к.  $E_{SH\pm}(r, \varphi, z)$  являются комплексными величинами. Поэтому их решения,  $\varphi = \varphi_{C+}$  и  $\varphi = \varphi_{C-}$ , существуют только при некотором ограничении на параметры  $M_0$ ,  $b_1$ ,  $b_3$ ,  $b_5$  и  $\gamma_0$ , которое разумно представить в виде зависимости поляризации падающего излучения от параметров нелинейной среды. При

$$M_0 = M_{0\pm}(b_1, b_3, b_5, \gamma_0) = \pm \frac{G_{\pm} - G_1}{G_{\pm} + G_1}, \quad (7)$$

где  $G_1 = n_{\omega}^2 (b_3^2 + b_5^2)$  и  $G_{\pm} = (\gamma_0 / n_{2\omega} \pm n_{\omega} b_5)^2 + (n_{\omega} b_3 - n_{2\omega} b_1)^2$ , решения (5), (6) соответственно имеют вид

$$\varphi = \varphi_{C\pm} = \arctan \frac{n_{\omega} b_3 \sqrt{G_{\pm}} + (-n_{2\omega} b_1 + n_{\omega} b_5) \sqrt{G_1}}{n_{\omega} b_5 \sqrt{G_{\pm}} - (\pm \gamma_0 / n_{2\omega} + n_{\omega} b_5) \sqrt{G_1}}. \quad (8)$$

При переходе в плоскости поперечного сечения пучка через линию  $\varphi = \varphi_{C+}$  или  $\varphi = \varphi_{C-}$  угол поворота главной оси эллипса поляризации испытывает скачок на величину  $\pi/2$ . Заметим, что оба значения степени эллиптичности  $M_{0\pm}$  существуют при любых действительных значениях  $b_1$ ,  $b_3$ ,  $b_5$  и  $\gamma_0$  (т.е. в отсутствие поглощения на частотах  $\omega$  и  $2\omega$ ). Только если все компоненты тензоров  $\hat{\gamma}^{(2)}(2\omega; \omega, \omega)$  и  $\hat{\kappa}^{(2)}(2\omega; \omega, \omega)$  равны нулю (сигнал на удвоенной частоте отсутствует),  $G_{\pm} + G_1 = 0$ .

В качестве примера на рис.1 показаны распределения поляризации излучения в поперечном сечении пучка ВГ. Эллипсы, построенные в различных точках рисунка, центры которых имеют координаты  $x_0$ ,  $y_0$ , подобны эллипсам поляризации света в точках поперечного сечения пучка с такими же координатами. Угол между главной осью эллипса с центром в точке  $(x_0, y_0)$  и осью  $x$  на рис.1 совпадает с углом  $\Psi_{SH}(x_0, y_0) = 0.5 \arg\{E_{SH+} E_{SH-}^*\}$  наклона главной оси эллипса поляризации ВГ. Точка на краю каждого из них задает направление вектора напряженно-

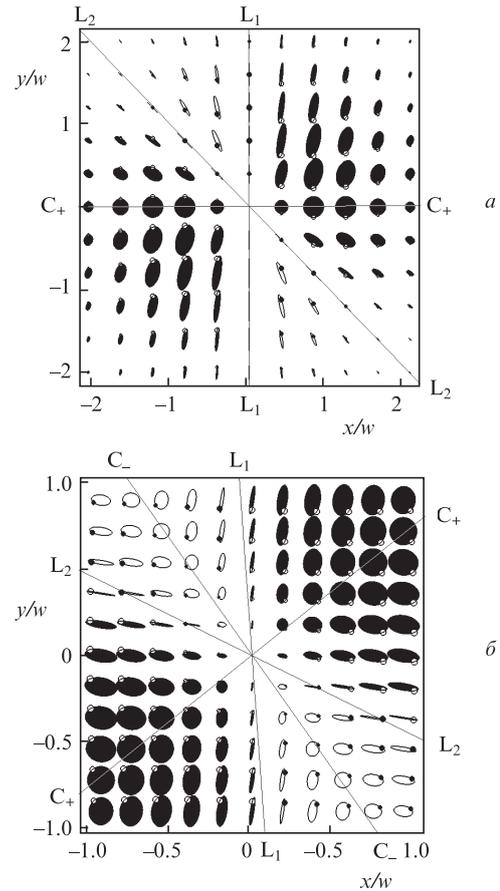


Рис.1. Неоднородное распределение поляризации света в отраженном пучке на удвоенной частоте при  $M_0 = 0$ ,  $n_{\omega} = 1.33$ ,  $n_{2\omega} = 1.35$ ,  $b_3/b_1 = 0.508$ ,  $b_5 = b_3 \gamma_0 / b_1 = -1.823$  (присутствуют одна C-линия и две L-линии) (а) и  $M_0 = -0.27$ ,  $n_{\omega} = 1.32$ ,  $n_{2\omega} = 1.34$ ,  $b_3/b_1 = 1.1$ ,  $b_5 = 0.322$ ,  $\gamma_0/b_1 = -2.1$  (присутствуют две C-линии и две L-линии) (б). Концы C- и L-линий отмечены буквами  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $C_+$  и  $C_-$ .

сти электрического поля в фиксированный момент времени, т.е. определяет угол  $\Phi_{SH} = \arg\{E_{SH+} + E_{SH-}^*\}$ . Белые эллипсы показывают, что вращение вектора напряженности электрического поля в точке с координатами  $x_0$ ,  $y_0$  происходит по часовой стрелке, а черные – против.

На рис.1,а представлено распределение поляризации в поперечном сечении пучка ВГ при значениях параметров нелинейной среды, допускающих присутствие в нем одной C-линии и двух L-линий. C-линия совпадает с осью  $x$ . На ней эллипс принимает форму окружности. При переходе через C-линию угол поворота главной оси эллипса поляризации испытывает скачок на  $\pi/2$ . Две L-линии пересекаются в центре пучка. Первая из них вертикальна, а вторая составляет с ней угол в  $45^\circ$  и проходит через второй и четвертый квадранты системы координат  $x, y$ . Рис.1,б построен при значениях параметров падающего излучения и нелинейной хиральной среды, допускающих появление в плоскости поперечного сечения пучка ВГ двух C-линий и двух L-линий. Все они проходят через его центр. Одна из C-линий проходит через первый и третий квадранты, а другая – через второй и четвертый. Первая из L-линий практически вертикальна, а вторая проходит через второй и четвертый квадранты.

Отметим ряд особых случаев, реализующихся при специальных соотношениях между параметрами  $b_1$ ,  $b_3$ ,  $b_5$  и  $\gamma_0$ . Если  $n_{2\omega} b_1 = n_{\omega} b_3$  и выполняется условие (7), то пучок отраженного излучения на удвоенной частоте во всех

точках поперечного сечения поляризован по левому кругу при  $\gamma_0 = -n_\omega n_{2\omega} b_5$  и по правому кругу при  $\gamma_0 = n_\omega n_{2\omega} b_5$ . В отсутствие пространственной дисперсии ( $\gamma_0 = 0$ ), но при справедливости (7) и выполнении хотя бы одного из равенств,  $b_1 = 0$  или  $n_{2\omega} b_1 = 2n_\omega b_3$ , пучок ВГ линейно поляризован во всех точках плоскости поперечного сечения. При этом в последней существует проходящая через центр пучка прямая, в точках которой интенсивность поля ВГ обращается в ноль из-за совпадения ориентаций двух С-линий. Наконец, если среда такова, что  $b_3 = b_5 = 0$ , то пучок ВГ радиально поляризован (см. [19]). В этом случае условие (7) превратится в  $M_0 = \pm 1$ , а сигнал ВГ исчезнет.

Аналитические выражения (4), (7), (8) представляют практический интерес для задач нелинейной лазерной спектроскопии. Действительно, при линейной поляризации падающего излучения полярные углы (4), определяющие ориентацию L-линий в плоскости поперечного сечения пучка ВГ, становятся равными  $\pi/2$  и  $-\arctan(b_5/b_3)$ . Зная интегральную мощность пучка при циркулярно поляризованной накачке, в этом случае можно найти  $b_3$  и  $b_5$  (более подробно см. [19]). Если значения  $n_\omega$  и  $n_{2\omega}$  известны, то теперь с помощью (4), (7), (8) можно найти  $\gamma_0$  и  $b_1$ .

Таким образом, при нормальном падении однородно эллиптически поляризованного гауссова пучка основного излучения на поверхности изотропной гиротропной среды в поперечном сечении отраженного пучка на удвоенной частоте возможно появление сингулярностей поляризации. При любых действительных значениях параметров, описывающих квадратичный оптический отклик хиральной среды и ее поверхности, существуют такие состояния эллиптической поляризации падающего света, при которых в поперечном сечении отраженного пучка ВГ будут присутствовать одна или две С-линии. Исключением являются несколько единичных случаев, когда параметры среды точно удовлетворяют особым связывающим их соотношениям. В поперечном сечении пучка на удвоенной частоте также могут присутствовать две, одна или ни одной L-линии. Аналитические выражения, описывающие условия появления L- и С-линий, а также формулы, задающие их ориентацию, могут быть использованы для нахождения компонент тензоров, характеризующих квадратичные по полю нелокальный оптический отклик среды и локальный отклик ее поверхности. Особый интерес представляет значительно более сложное наклонное падение. Нахождение условий возникновения сингулярностей поляризации в этом случае составит предмет отдельной работы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-02-00796-а).

- Bachelier G., Butet J., Russier-Antoine I., Jonin C., Benichou E., Brevet P.-F. *Phys. Rev. B*, **82**, 235403 (2010).
- Zheng C.C., Xu S.J., Ning J.Q., Zhang S.F., Wang J.Y., Che C.M., Hao J. H. *J. Appl. Phys.*, **109**, 013528 (2011).
- Cao L., Panoiu N.C., Bhat R.D.R., Osgood R.M. Jr. *Phys. Rev. B*, **79**, 235416 (2009).
- Bisio F., Winkelmann A., Lin W.-C., Chiang C.-T., Nývlt M., Petek H., Kirschner J. *Phys. Rev. B*, **80**, 125432 (2009).
- Casillas-Ituarte N.N., Allen H.C. *Chem. Phys. Lett.*, **483**, 84 (2009).
- Groenzin H., Li I., Shultz M.J. *J. Chem. Phys.*, **128**, 214510 (2008).
- Maki J.J., Kauranen M., Persoons A. *Phys. Rev. B*, **51**, 1425 (1995).
- Kauranen M., Verbiest T., Persoons A. *Nonlinear Opt. Princ. Mater. Phenom. Devices*, **8**, 243 (1994).
- Van Elshocht S., Verbiest T., Kauranen M., et al. *J. Chem. Phys.*, **107**, 8201 (1997).
- Kauranen M., Maki J.J., Verbiest T., et al. *Phys. Rev. B*, **55**, R1985 (1997).
- Волков С.Н., Коротеев Н.И., Макаров В.А. *Квантовая электроника*, **24**, 531 (1997).
- Волков С.Н., Коротеев Н.И., Макаров В.А. *Оптика и спектроскопия*, **85**, 309 (1998).
- Stolle R., Loddoch M., Marowsky G. *Nonlinear Opt. Princ. Mater. Phenom. Devices*, **8**, 79 (1994).
- Shen Y. R. *Appl. Phys. B*, **68**, 295 (1999).
- Conboy J.C., Kriech M.A. *Anal. Chim. Acta*, **496**, 143 (2003).
- Huttunen M.J., Erkintalo M., Kauranen M. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **11**, 034006 (2009).
- Голубков А. А., Макаров В.А. *Изв. РАН. Сер. физич.*, **59**, 93 (1995).
- Голубков А.А., Макаров В.А. *УФН*, **165**, 339 (1995).
- Makarov V.A., Perezhogin I.A. *Opt. Commun.*, **281**, 3906 (2008).
- Nye J.F. *Proc. Royal. Soc. Lond. A*, **389**, 279 (1983).
- Berry M.V., Dennis M.R. *Proc. Royal. Soc. Lond. A*, **457**, 141 (2001).
- Berry M.V., Dennis M.R. *Proc. Royal. Soc. Lond. A*, **459**, 1261 (2003).
- Berry M.V., Dennis M.R., Dennis M.R., Lee R.L. *New J. Phys.*, **6**, 162 (2004).
- Dennis M.R. *Opt. Lett.*, **33**, 2572 (2008).
- Dennis M.R. *Opt. Commun.*, **213**, 201 (2002).
- Angelsky O.V., Mokhun I.I., Mokhun A.I., Soskin M.S. *Phys. Rev. E*, **65**, 036602 (2002).
- Chen Y.F., Lu T.H., Huang K.F. *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 033901 (2006).
- O'Holleran K., Flossmann F., Dennis M.R., Padgett M.J. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **11**, 094020 (2009).
- Egorov Yu.A., Fadeyeva T.A., Volyar A.V. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **6**, 217 (2004).
- Flossmann F., Ulrich T., Schwarz U.T., Maier M., Dennis M.R. *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 253901 (2005).
- Bogatyrzova G.V., Felde K.V., Polyanskii P.V., Soskin M.S. *Оптика и спектроскопия*, **97**, 833 (2004).
- Makarov V.A., Perezhogin I.A. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **11**, 074008 (2009).