

Пространственно-временная динамика полупроводникового двухчастотного лазера с вертикальным внешним резонатором

Ю.А.Морозов, А.И.Конюхов, Л.А.Кочкуров, М.Ю.Морозов

Сформулирована математическая модель двухчастотного лазера с вертикальным внешним резонатором (ЛВВР) с учетом распределения оптических полей генерации и накачки в поперечном сечении пучков. На плоскости параметров «мощность накачки – время запаздывания в резонаторе» построены карты динамических режимов, на которых выделены области непрерывной генерации, периодических колебаний, а также квазипериодических и хаотических колебаний интенсивности излучения и плотности носителей в активных областях лазера. Показано, что при увеличении коэффициента отражения внешнего зеркала резонатора области сложной динамики на этих картах сужаются. Численными методами проанализирована пространственно-временная динамика двухчастотного ЛВВР в режиме квазипериодических колебаний.

Ключевые слова: лазер с вертикальным внешним резонатором, динамика излучения, двухчастотный полупроводниковый лазер.

1. Введение

Полупроводниковые лазеры с внешним вертикальным резонатором (ЛВВР) занимают особое место среди других источников когерентного излучения [1]. В них сочетаются преимущества твердотельных дисковых лазеров на основе редкоземельных элементов – генерация излучения высокой мощности (до десятков ватт) в дифракционно-ограниченном гауссовом пучке – и достоинства, характерные для полупроводниковых лазеров: возможность выбора частот генерации в широких пределах в зависимости от состава и структуры активных слоев, принципиальная допустимость использования накачки током и др.

Использование возможности управления частотой генерации лазера при варьировании параметров (молярного состава) квантовых ям в одной и той же лазерной структуре позволило создать двухчастотный полупроводниковый ЛВВР [2]. В этом лазере, излучающем одновременно два коаксиальных гауссовых пучка на двух длинах волн, возможно эффективное внутрирезонаторное нелинейно-оптическое взаимодействие, сопровождающееся излучением комбинационных частот, в том числе суммарной и разностной. Излучение суммарной частоты с длиной волны ~ 507 нм было экспериментально продемонстрировано в таком лазере с размещенным в его резонаторе нелинейным кристаллом трибората лития (LBO) [3]. Однако наиболее привлекательна перспектива применения двухчастотного ЛВВР для генерации разностной частоты, соответствующей среднему ИК диапазону (5–50

мкм). Несмотря на выдающиеся успехи квантово-каскадных лазеров, все еще остро стоит вопрос о создании удобных в использовании (без криогенного охлаждения), относительно простых, недорогих и отличающихся высоким качеством пучка генераторов излучения в этом диапазоне. Прежде всего это касается длинноволновой части диапазона.

При создании двухчастотного ЛВВР и его экспериментальном исследовании [2] было установлено, что этот лазер демонстрирует различные типы динамического поведения, зависящие от параметров накачки и лазерного резонатора. Так, в частности, было обнаружено, что при возрастании мощности накачки от порогового значения лазер вначале генерирует в непрерывном режиме, а затем, при достижении определенной мощности накачки, переходит в режим импульсной генерации. Эти особенности динамического поведения были позднее подтверждены и получили физическое истолкование при анализе математической модели двухчастотного ЛВВР, сформулированной в виде системы скоростных уравнений с запаздывающим аргументом [4, 5].

Таким образом, двухчастотный ЛВВР является объектом, представляющим интерес для исследования как с фундаментальной точки зрения – в качестве нелинейной динамической системы с запаздывающим аргументом, так и с прикладной – в качестве устройства для эффективной внутрирезонаторной генерации разностной гармоники в длинноволновой части среднего ИК диапазона.

В упомянутых выше работах [4, 5] математическая модель ограничивалась приближением плоских волн для генерируемого излучения и накачки. При этом некоторые особенности процесса генерации оставались вне пределов рассмотрения. Развитию более адекватной математической модели излучения двухчастотного ЛВВР, в которой учитывается гауссов профиль оптического излучения обеих волн и накачки, а также анализу динамики излучения в пространственно-временной области и посвящена данная работа.

Ю.А.Морозов, М.Ю.Морозов. Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН; Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38; e-mail: yuri.mor@ Rambler.ru
А.И.Конюхов, Л.А.Кочкуров. Саратовский государственный университет, Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83; e-mail: KonukhovAI@info.sgu.ru

2. Схема и математическая модель лазера

Схема лазера показана на рис.1. Резонатор лазера имеет V-конфигурацию и состоит из активного лазерного зеркала, поворотного сферического и выходного зеркал в геометрии, обеспечивающей возбуждение обеих генерируемых длин волн на основной гауссовой моде. Оптическую накачку лазера осуществляет диодный лазер с длиной волны 808 нм.

Главное отличие двухчастотного лазера с вертикальным внешним резонатором от обычного ЛВВР состоит в устройстве активного лазерного зеркала. На рис.2 схематически (без соблюдения масштабов) представлена его зонная диаграмма. Это зеркало содержит по крайней мере две активные области, состоящие из квантовых ям (КЯ) различного компонентного состава ($\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ с различными x), разделенных барьерами из GaAs, которые служат для поглощения излучения накачки. Активные области отделены друг от друга широкозонным блокирующим слоем AlAs, предотвращающим диффузионный транспорт носителей, порожденных накачкой в этих областях. При этом снимается проблема преимущественного заселения более глубоких КЯ вследствие меньшего времени захвата и большего времени выброса носителей, характерных для этих ям [6, 7].

Другой важной особенностью двухчастотного ЛВВР является то, что глубокие КЯ располагаются приблизительно в узлах стоячей волны коротковолнового излучения (см. распределение амплитуд полей в длинноволновой активной области на рис.2). При этом обеспечивается наименьший уровень поглощения коротковолнового излучения в КЯ и снижается взаимодействие между длинноволновым и коротковолновым оптическими полями. В то же время как мелкие, так и глубокие квантовые ямы находятся в пучностях стоячей волны «своего» поля, чтобы в максимальной степени использовать доступный коэффициент усиления. Как и в обычном ЛВВР, отражение активного зеркала обеспечивается брэгговским зеркалом, контраст показателей преломления слоев GaAs/AlAs которого достаточен для отражения излучения на обеих генерируемых длинах волн ($\lambda_S = 985$ нм и $\lambda_L = 1042$ нм).

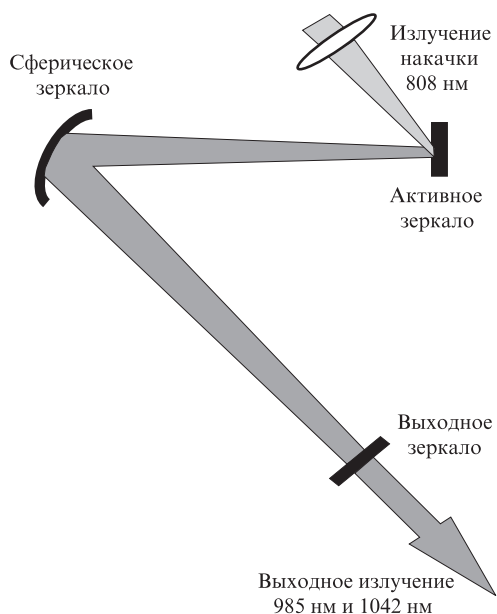


Рис.1. Схема ЛВВР.

Более подробное описание устройства лазера можно найти в [2].

Модификация скоростных уравнений динамики двухчастотного ЛВВР из [5] с учетом радиальной неоднородности генерируемых оптических полей и накачки [8] приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{S}_i(t) &= v_g \left\{ \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij} G_{ij}(t) - \alpha_i + \frac{1}{2L_i} \ln \left[\frac{S_i(t - \tau_{\text{ext}})}{S_i(t)} \right] \right\} S_i(t), \\ \dot{N}_i(t,r) &= \frac{J_i(r)}{t_w} - \frac{N_i(t,r)}{\tau_r} - \frac{v_g}{m_i t_w} \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ji} g_{ji} L_j \frac{\psi_j^2}{\langle \psi_j^2 \rangle} S_j(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь динамические переменные и параметры с индексом $i = 1, 2$ относятся к коротковолновому и длинноволновому излучению соответственно; S_i – плотность фотонов; Γ_{ij}, g_{ij} – продольный коэффициент оптического ограничения и локальный коэффициент усиления i -го оптического поля в j -й эквивалентной квантовой яме; v_g – групповая скорость; L_i – эффективная длина активного зеркала для соответствующего поля; N_i – плотность носителей в эквивалентных КЯ; τ_r и τ_{ext} – время жизни в КЯ и время однократного обхода внешнего резонатора соответственно; $J_i(r) = J_{i0} \exp[-(r/w_p)^2]$ – плотность диффузионного потока носителей в i -ю эквивалентную КЯ вследствие накачки; w_p – радиус пучка накачки; t_w – ширина КЯ; m_i – количество КЯ в соответствующей активной области; α_i – коэффициент поглощения i -го поля. Модальный коэффициент усиления поля с номером i в эквивалентной КЯ с номером j можно определить следующим образом:

$$G_{ij}(t) = \frac{1}{\langle \psi_i^2 \rangle} \int_0^\infty g_{ij}(t,r) \psi_i^2 r dr,$$

где $\psi_i^2 = \exp[-(r/w_i)^2]$; $\langle \psi_i^2 \rangle = \int_0^\infty \psi_i^2 r dr$; w_i – радиус пучка i -го поля на поверхности активного зеркала.

При выводе уравнений (1) мы, как и в [5], воспользовались несколькими упрощающими предположениями. Во-первых, мы ввели в рассмотрение по одной эквивалентной КЯ для каждого набора, состоящего из m_i квантовых ям одинакового состава, сохранив при этой замене общий коэффициент усиления i -го поля. Это можно сде-

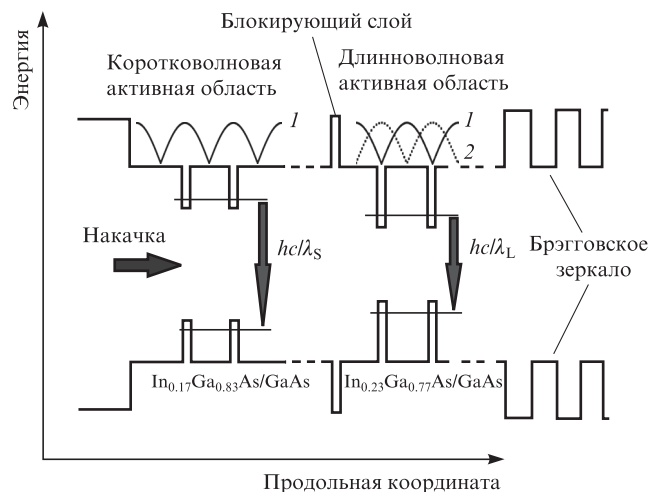


Рис.2. Зонная диаграмма активного зеркала; 1 и 2 – распределения амплитуд коротковолнового и длинноволнового излучений соответственно.

лять, вводя для каждой эквивалентной КЯ продольный коэффициент оптического ограничения, учитывающий наличие всех ям в данном наборе. Во-вторых, поскольку для рассматриваемого лазера параметр связи активного зеркала с внешним резонатором $\chi = r_{\text{ext}}(1 - r_f^2)/r_f \gg 1$, мы не учитывали многократные отражения излучения во внешнем резонаторе, и поэтому в уравнениях (1) фигурирует лишь член $S_f(t - \tau_{\text{ext}})$ – плотность фотонов после однократного отражения внешним зеркалом (здесь r_{ext} и r_f – коэффициенты отражения внешнего зеркала и внутренней поверхности активного зеркала). Кроме того, мы пренебрегали насыщением усиления, обусловленного выжиганием провалов с спектре усиления, а также вкладом спонтанного излучения в лазерные моды. Следует отметить, что активные области лазера, содержащие КЯ различного молярного состава, становятся независимыми при $\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = 0$. Иначе говоря, при выполнении этих условий двухчастотный ЛВВР можно рассматривать как совокупность двух независимых парциальных лазеров, помещенных в один внешний резонатор. Причем влияние второго из этих условий на связанность активных областей ЛВВР можно считать пренебрежимо малым, поскольку в уравнения (1) входят только комбинации $\Gamma_{21}g_{21}$, а коэффициент усиления $g_{21} \approx 0$. Поэтому в дальнейшем будем полагать $\Gamma_{21} = 0$. Для определения взаимосвязи J_{0s} с мощностью накачки P_{in} был использован подход, подробно изложенный в [9].

3. Результаты расчетов

В статье [5] получен практически важный вывод о том, что в отсутствие связи между оптическими полями, т.е. при $\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = 0$, состояние двухчастотной стационарной генерации является устойчивым. Если по каким-либо причинам, например при неточном совпадении положения глубоких КЯ с узлами коротковолнового поля, поля лазерного излучения взаимосвязаны, то непрерывный режим может терять устойчивость с переходом к автомодуляции или к импульсной генерации.

Наиболее наглядное представление о возможных типах поведения исследуемой динамической системы дает карта режимов, т.е. диаграмма на плоскости двух параметров, на которой выделены области, отвечающие различным динамическим режимам. При построении таких карт мы использовали математический пакет DDE-BIFTOOL [10] для численного бифуркационного анализа динамических систем с запаздывающим аргументом. На рис.3 показаны карты динамических режимов, построенные на плоскости параметров P_{in} , τ_{ext} для $r_{\text{ext}}^2 = 0.98$ и 0.985. Остальные параметры, используемые в расчетах, имеют следующие значения: $L_1 = L_2 = 10$ мкм, $\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = 0.0112$, $\Gamma_{12} = \Gamma_{11}/5$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ см⁻¹, $\tau_f = 2$ нс, $t_w = 7$ нм, $m_1 = m_2 = 8$, $w_1 = w_2 = w = 50$ мкм, $w_p = 60$ мкм. Локальные коэффициенты усиления для КЯ были рассчитаны численно [11] и для удобства использования выражены в виде следующих зависимостей: $g_{11} = 2200 \ln[N_1(r)/1.9]$, $g_{21} = -1.216N_1^2(r) + 24.55N_1(r) - 59.765$, $g_{22} = 2250 \ln[N_2(r)/2.04]$, $g_{12} = -47.64N_2^2(r) + 1236.2N_2(r) - 5288.8$. Здесь объемные концентрации носителей $N_{1,2}$ нормированы на 10^{18} см⁻³.

Незакрашенные области на картах рис.3, помеченные CW (continuous wave), характеризуют интервалы изменения мощности накачки P_{in} и времени обхода внешнего резонатора τ_{ext} , внутри которых лазер работает в непрерывном режиме излучения. Начало оси абсцисс прибли-

зительно совпадает с пороговой мощностью для обоих генерируемых частот. Видно, что если величина запаздывания во внешнем резонаторе τ_{ext} не превышает приблизительно 0.1 нс, непрерывная двухчастотная генерация оказывается устойчивой во всем интервале изменения мощности накачки.

При увеличении τ_{ext} свыше 0.1 нс и при мощности накачки, превышающей 1.8 Вт (рис.3,а) или 2 Вт (рис.3,б), устойчивость стационарного состояния (непрерывной генерации) нарушается и динамика системы усложняется. Нарушение устойчивости происходит в результате раскачки релаксационных колебаний, частота которых Q для независимых активных областей лазера (т.е. при $\Gamma_{12} = 0$) была определена в [5] как $Q = \omega(2/\epsilon)^{0.25}$, где ω – частота релаксационных колебаний в отсутствие внешнего резонатора (приблизительно одинаковая для обоих парциальных лазеров), $\epsilon = 1 - r_{\text{ext}}^2$ – коэффициент пропускания выходного зеркала по мощности. При наличии связи между осцилляторами, представляющими собой отдельные лазеры, собственная частота Q порождает две частоты нормальных колебаний – $Q_{n1,2}$ [12]. Основные черты колебаний в этом случае определяются нормальными колебаниями с минимальным затуханием (предположим, что этим колебаниям отвечает частота Q_{n1}). При слабой связи изменение частот нормальных колебаний по сравнению с релаксационной частотой невелико, поэтому качественно характер зависимости Q_{n1} , например от ω , не изменится. Таким образом, мы вправе ожидать, что $Q_{n1} \propto \omega \propto \sqrt{P_{\text{in}}/P_{\text{th}} - 1}$ (P_{th} – пороговая мощность) [11]. Кроме того, наличие связи между активными областями лазера может привести к тому, что затухание нормаль-

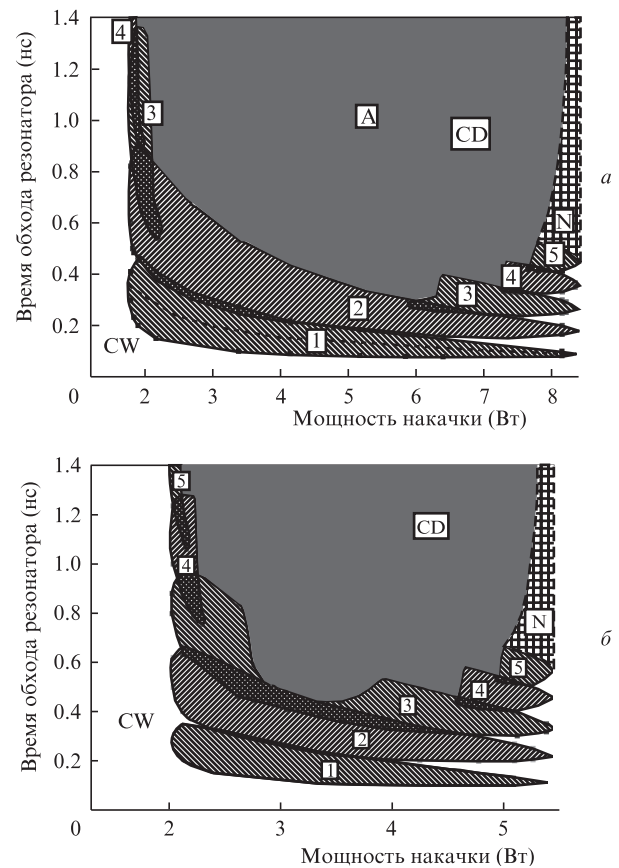


Рис.3. Карта динамических режимов двухчастотного ЛВВР при $r_{\text{ext}}^2 = 0.98$ (а) и 0.985 (б).

ных колебаний сменится нарастанием. При этом в результате бифуркации Хопфа в фазовом пространстве системы рождается предельный цикл с частотой обращения по нему, равной частоте нормальных колебаний.

Внутри заштрихованных областей 1 – 5 на рис.3 лазер демонстрирует устойчивые периодические колебания интенсивности излучения и плотности носителей с периодом T , находящимся в дробном отношении к времени задержки, т.е. $T \approx \tau_{ext}/n$, причем целому значению n соответствует номер области на карте. По нашему мнению, объяснить наличие устойчивых периодических движений системы с особенностями, представленными на рисунке, можно в рамках концепции о затягивании (синхронизации) частоты нормальных колебаний частотой межмодовых биений (при $n = 1$) или гармониками этой частоты (при $n > 1$).

Рассмотрим поведение динамической системы при некотором фиксированном значении мощности накачки и увеличении времени запаздывания во внешнем резонаторе τ_{ext} (движение рабочей точки вдоль оси ординат). В области 1 имеем $\Omega \approx \Omega_b$, где $\Omega = 2\pi/T$ – круговая частота наблюдаемых периодических колебаний, а $\Omega_b = 2\pi/\tau_{ext}$ – круговая частота межмодовых биений. То есть при движении рабочей точки внутри области 1 частота Ω уменьшается. При переходе рабочей точки на карте в смежную область 2 частота Ω скачком возрастает в два раза, чтобы удовлетворить соотношению $T \approx \tau_{ext}/2$. При дальнейшем увеличении времени τ_{ext} частота Ω снова уменьшается.

Если мощность накачки выбрана такой, что при своем движении по карте рабочая точка пересекает и другие области периодических колебаний, то характер процесса изменения частоты повторяется. Таким образом, физическая картина зависимости частоты периодических колебаний от времени запаздывания τ_{ext} выглядит как процесс синхронизации, когда частота нормальных колебаний системы становится равной межмодовой частоте или ее гармоникам. При возрастании мощности накачки ширины областей синхронизации периодических колебаний уменьшаются. Так, при мощности накачки ~ 8.4 Вт (рис.3,а) или 5.3 Вт (рис.3,б) области стягиваются почти в точку. По величине τ_{ext} , к которой стягивается область 1, можно судить о частоте нормальных колебаний системы при данной мощности накачки: $Q_{n1} = 2\pi/\tau_{ext}$. Ход зависимости частоты нормальных колебаний для других значений мощности накачки отвечает приведенному выше соотношению $Q_{n1} \propto \sqrt{P_{in}/P_{th}} - 1$ и показан на рис.3,а пунктирной кривой, пересекающей область 1.

Из рис.3 также следует, что, начиная с $n = 3$ (рис.3,а) или $n = 4$ (рис.3,б), области периодических движений системы при малых (порядка 1.8–2.3 Вт) и больших (~ 8 Вт для рис.3,а и ~ 5 Вт для рис.3,б) мощностях накачки имеют двухсвязный характер, т.е. состоят из двух подобластей, расположенных вблизи границ устойчивости непрерывного режима генерации. На карты подробно нанесены лишь области периодических колебаний системы до $n = 5$. Внутри областей, обозначенных N , попадают периодические движения системы с $n > 5$ – они показаны качественно.

Видно, что области периодических движений попарно перекрываются. Это означает, что внутри областей пересечения возможны периодические колебания динамических переменных с периодом, соответствующим одной или другой из перекрывающихся областей, в зависимости от задаваемых начальных условий. То есть области пере-

крытия являются областями, в которых возможен гистерезис периода колебаний, зависящий от направления движения рабочей точки при пересечении этих областей.

В закрашенной серым области CD (complex dynamics) реализуются сложные квазипериодические и, возможно, хаотические колебания. Разделение движений на квазипериодические и хаотические требует анализа спектра ляпуновских показателей на аттракторе для системы с запаздыванием [13], что выходит за рамки данной работы.

Из сравнения рис.3,а и б видно, как видоизменяется карта динамических режимов при увеличении коэффициента отражения внешнего зеркала: сужаются области одноименных периодических, квазипериодических и хаотических колебаний. Дополнительный анализ показывает, что если коэффициент отражения внешнего зеркала r_{ext} увеличить до 0.99, непрерывный режим двухчастотного ЛВВР сохранит устойчивость во всей области изменения мощности накачки P_{in} и времени задержки τ_{ext} .

Прямой расчет динамического поведения двухчастотного ЛВВР на основе решения системы уравнений (1) подтверждает выводы, полученные с помощью бифуркационного анализа. На рис.4 демонстрируется динамика излучения на интервале времени, равном одному периоду колебаний, для значений параметров, отвечающих точке А карты на рис.3,а. Согласно приведенной выше классификации, в этой точке наблюдается сложный квазипериодический режим излучения с несколькими несоизмеримыми периодами. Анализ показывает, что среди них обязательно имеется период, равный времени обхода внешнего резонатора τ_{ext} (колебания мощности излучения внутри этого периода длительностью 1 нс показаны на рис.4). Кроме того, колебания интенсивности излучения промодулированы на более медленном масштабе времени, с периодами порядка сотен наносекунд – единиц микросекунд. Из рис.4 следует, что колебания мощности длинноволнового излучения практически повторяют колебания коротковолнового излучения с тем отличием, что мощность в длинноволновом излучении больше и оно несколько запаздывает во времени относительно коротковолнового. Как показано в [14], запаздывание, при котором сохраняется значительное временное перекрытие импульсов излучения на разных частотах, не препятствует эффективной генерации разностной частоты в результате внутррезонаторного нелинейно-оптического преобразования.

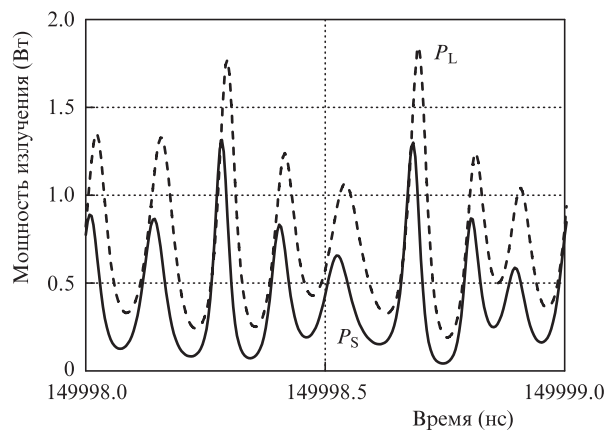


Рис.4. Мощность излучения коротковолновой (сплошная кривая) и длинноволновой (штриховая кривая) компонент излучения на интервале времени, равном одному периоду.

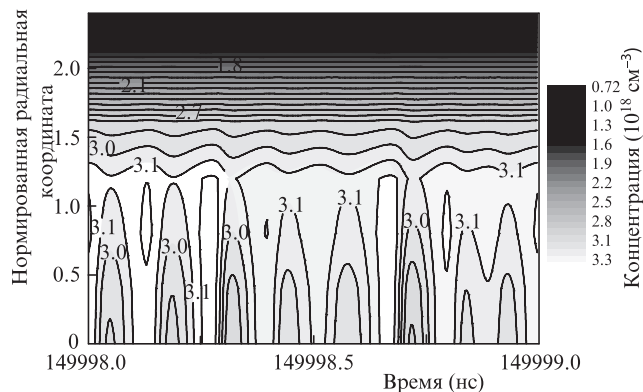


Рис.5. Пространственно-временная динамика концентрации носителей в КЯ коротковолновой активной области. Метки на графике соответствуют линиям уровня концентрации, нормированным на 10^{18} см^{-3} .

На рис.5 в виде линий уровня постоянной концентрации показано пространственно-временное распределение носителей в КЯ коротковолновой активной области при тех же параметрах и на том же интервале времени, что использовались при расчете зависимостей, приведенных на рис.4. По вертикальной оси рис.5 отложены значения радиальной координаты r , нормированные на радиус пучков излучения w . Видно, что наиболее значительные временные изменения концентрации заряда в КЯ наблюдаются вблизи оси пучка. Эти изменения (достигающие 10% от среднего значения) обусловлены выжиганием оптическим излучением провалов в профиле концентрации. Действительно, как следует из сравнения рис.4 и рис.5, наибольшие провалы приосевой концентрации носителей наблюдаются вблизи 149998.3 и 149998.7 нс, где мощность оптического излучения достигает максимальных значений. При удалении от оси пучка уменьшается как амплитуда пульсаций, так и средний уровень концентрации носителей в КЯ. Такое поведение является вполне предсказуемым вследствие принятой при анализе радиальной зависимости плотности мощности накачки (и, следовательно, скорости генерации носителей накачкой) и полей излучения.

4. Заключение

С учетом экспериментально наблюдаемых пространственных распределений полей накачки и оптического излучения построена математическая модель двухчастотного ЛВВР в виде системы скоростных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Выполнен бифуркационный анализ динамического поведения двухчастотного ЛВВР и построены карты динамических режимов на плоскости параметров «мощность накачки – время обхода резонатора излучением», на которых выделены области, отвечающие непрерывной стационарной генерации, генерации периодической импульсной последовательности с периодом, находящимся в дробном отношении к времени обхода, и режиму излучения с квазипериодическими (или хаотическими) колебаниями интенсивности. В качестве возможной причины реализации устойчивых периодических движений рассматриваемой динамической системы предложена синхронизация ре-

лакционных колебаний частотой межмодовых биений или ее гармониками.

Показано, что при возрастании коэффициента отражения внешнего зеркала r_{ext} (снижении потерь в системе) сужаются интервалы значений мощности накачки и времени задержки в резонаторе, внутри которых наблюдаются периодические, квазипериодические или хаотические колебания интенсивности излучения. При $r_{\text{ext}} = 0.99$ система демонстрирует лишь непрерывную стационарную генерацию.

Выполнен расчет динамики излучения в соответствии с системой уравнений (1). Установлено, что среди набора периодических движений, представляющих собой сложные квазипериодические (или хаотические) колебания плотности фотонов и носителей заряда в КЯ, обязательно существуют движения с периодом, равным времени запаздывания в резонаторе. Для квазипериодических (хаотических) колебаний характерно также наличие других движений, происходящих за большие времена (с периодами порядка сотен наносекунд – единиц микросекунд), которые проявляются в виде модуляции быстрых колебаний. Переход квазипериодических колебаний в хаотические происходит, по-видимому, путем усложнения квазипериодических колебаний.

Анализ пространственно-временной динамики распределения носителей в КЯ показывает, что наиболее заметные колебания их концентрации в зависимости от времени происходят в приосевой области пучка. Показано, что эти колебания могут быть результатом пространственно-временного выжигания провалов оптическим излучением.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-02-01074).

1. Tropper A.C., Foreman H.D., Carnache A., Wilcox K.G., Hoogland S.H. *J. Phys. D*, **37**, R75 (2004).
2. Leinonen T., Morozov Yu.A., Härkönen A., Pessa M. *IEEE Phot. Techn. Lett.*, **17**, 2508 (2005).
3. Härkönen A., Rautiainen J., Leinonen T., Morozov Yu. A., Orsila L., Guina M., Pessa M., Okhotnikov O. G. *IEEE Phot. Techn. Lett.*, **19**, 1550 (2007).
4. Morozov Yu. A., Leinonen T., Härkönen A., Pessa M. *IEEE J. Quantum Electron.*, **42**, 1055 (2006).
5. Морозов М.Ю., Морозов Ю.А., Красникова И.В. *Радиотехника и электроника*, **55**, 1243 (2010).
6. Морозов М.Ю., Морозов Ю.А., Красникова И.В. *Письма в ЖТФ*, **34**, 80 (2008).
7. Tsai C.-Y., Tsai C.-Y., Lo Y.-H., Spencer R., Eastman L. *IEEE J. Sel. Topics Quantum Electron.*, **1**, 316 (1995).
8. Valle A., Pesquera L. *J. Opt. Soc. Am. B*, **19**, 1549 (2002).
9. Morozov Yu., Leinonen T., Morozov M., Ranta S., Saarinen M., Popov V., Pessa M. *New J. Phys.*, **10**, 063028 (2008).
10. Engelborghs K., Luzyanina T., Samaey G. DDE-BIFTOOL v.2.00 user manual: a Matlab package for bifurcation analysis of delay differential equations. *Tehn. Rep. TW-330* (Leuven, Belgium, 2001, p. 60).
11. *Quantum-well Lasers*. Ed. by Zory P.S., Jr. (San Diego: Acad. Press, 1993).
12. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. *Колебания, волны, структуры* (М.: Физматлит, 2003, с.31).
13. Farmer J.D. *Phys. 4D*, 366 (1982).
14. Морозов Ю.А., Морозов М.Ю., Красникова И.В. *Сборник статей 8-го Белорусско-Российского семинара «Полупроводниковые лазеры и системы на их основе*. (Минск, 2011, с.46–49).