

Метод Ляпунова и анализ возникновения импульсно-периодического режима в полупроводниковых лазерах с запаздывающей обратной связью

А.П.Напартович, А.Г.Сухарев

Исследован характер перехода стационарного режима генерации в режим импульсно-периодических осцилляций при изменении фазы запаздывающей обратной связи и тока накачки диодного лазера. Возникновение осцилляций может происходить по сценариям мягкого или жесткого возбуждения колебаний. Предложен полуаналитический подход, позволяющий идентифицировать характер перехода, а также определить динамические характеристики и устойчивость возникшего пикового режима при небольшом изменении внешних параметров. Прямое интегрирование уравнений Лэнга–Кобаяши показало приемлемую точность такого подхода.

Ключевые слова: полупроводниковый лазер, динамика генерации, запаздывающая обратная связь, бифуркация.

1. Введение

Полупроводниковые лазеры с запаздывающей обратной связью (ЗОС), созданной отражением части излучения от внешнего зеркала, привлекают внимание разнообразием режимов генерации [1]. Богатство динамических режимов в таком лазере возникает из-за интерференции поля, отраженного от грани полупроводника, служащей внутренним зеркалом, с запаздывающим полем, возвращенным внешним зеркалом. Установившееся поле в лазере, вообще говоря, зависит от заданных начальных распределений поля и инверсии населенности на интервале времени, определяемом запаздыванием. Формально такая ситуация соответствует бесконечномерному фазовому пространству. Даже в этом случае существуют решения, на которые устойчиво выходит генерация из почти любых начальных распределений. Ряд таких решений может служить основой для анализа различных режимов. Возникающая сложная динамика описывается относительно простыми уравнениями [2] известной модели Лэнга–Кобаяши (ЛК). Несмотря на кажущуюся простоту, уравнения дают описание целого ряда явлений, имеющих место в динамике диодных лазеров (ДЛ): это последовательность бифуркаций удвоения периода при переходе к хаосу [3], а также эффект фазовой синхронизации лазеров за счет обмена излучением, в том числе в режиме хаотической генерации [4]. Этот эффект, получивший название синхронизации хаотических лазеров, используется в разрабатываемых системах оптической криптографии [5]. Использование лазеров с ЗОС для систем криптографии дает некоторое преимущество, т. к. последние могут генерировать гиперхаос – т. е. хаос очень высокой размерности [6]. Существует ряд теоретических работ [7, 8], посвященных численному исследова-

нию нелинейной динамики лазеров с ЗОС, в которых изучаются как широко известные явления (бистабильность), так и необычные режимы, например длинноволновые флуктуации. Последние связаны в первую очередь с развитием неустойчивости в моменты времени, когда интенсивность излучения мала. Однако до полного понимания процессов возникновения различных динамических режимов пока далеко. Эксперименты дают представление о сложной картине динамических режимов, но не позволяют прогнозировать поведение лазеров при известных параметрах.

Лазеры с ЗОС могут работать и в стационарном режиме. Разрушение стационарного режима может происходить через бифуркацию с возникновением осцилляций. При классической бифуркации Хопфа мягко включаются гармонические осцилляции, амплитуда которых растет по мере ухода от точки бифуркации. В работе [9] рассмотрен другой вариант бифуркации, когда реализуется жесткое возбуждение осцилляций с переходом в пиковый режим, а также показано, что описание поведения системы вблизи этой границы может быть сведено к решению алгебраического кубического уравнения, коэффициенты которого известным образом зависят от физических параметров лазера и обратной связи. При изменении параметров количество действительных корней найденного кубического уравнения может меняться от трех до одного, что на языке теории катастроф соответствует катастрофе сборки [10]. Бифуркация Хопфа отвечает варианту, когда корней три. Один из корней определяет частоту малых осцилляций системы. В [9] показано, что при наличии одного корня характер перехода жесткий. Это означает, что в точке бифуркации на фазовой плоскости возникает притягивающий предельный цикл конечного радиуса.

Ключевая особенность рассматриваемых ДЛ, приводящая к многообразию динамики, – это запаздывающая обратная связь. Наиболее полное изложение теории уравнений с запаздыванием (difference-differential equations) содержится в [11–14].

В настоящей работе исследуются установившиеся режимы генерации в рамках уравнений ЛК. Анализ стационарных и регулярных динамических решений строится в линейном приближении для возмущений. Для установив-

А.П.Напартович, А.Г.Сухарев. ФГУП «ГНЦ РФ – Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований», Россия, Московская область, 142190 Троицк, ул. Пушкиных, 1; e-mail: napart@mail.ru, sure@triniti.ru

Поступила в редакцию 13 сентября 2010 г., после доработки – 21 октября 2010 г.

шихся колебаний возмущения описываются линейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. Периодичность – очень сильное свойство, которое используется в теории Ляпунова о приводимости уравнений к простым. Поэтому действие запаздывающей обратной связи в режиме установившихся колебаний может быть учтено вычислением эффективной ЗОС. Учитывая простоту возникающих колебаний, мы строим решение вблизи точки бифуркации из стационарного решения в периодическое. Из линейной задачи удастся получить систему двух трансцендентных характеристических уравнений для частоты повторения осцилляций. Из условия их совместимости и уравнения для коэффициента эффективной ЗОС можно найти характеристики самого нелинейного решения.

2. Основные уравнения модели

Уравнения ЛК описывают динамику лазерной генерации в диодном лазере с внешней ЗОС (рис.1). В работе [2] действие ЗОС учитывается введением эффективного коэффициента отражения r_{eff} на торце лазерного кристалла. Поле E_r на данном зеркале (для волны с частотой Ω) формируется в результате отражения волны E на первой границе с амплитудным коэффициентом отражения r и (с некоторой фазовой задержкой) на второй, внешней, границе

$$E_r e^{i\Omega t} = r_{\text{eff}} E e^{i\Omega t} = [r + (1 - r^2)r_m e^{-i\Omega\tau_d}] E e^{i\Omega t}.$$

Амплитудный коэффициент отражения r_m от внешнего зеркала предполагается малым. Тогда пассивные потери в лазерном резонаторе длиной L с учетом запаздывания сигнала на время τ_d определяется выражением

$$\begin{aligned} P &= \frac{c}{2nL} \ln \frac{1}{r_{\text{eff}}^2} = \frac{c}{nL} \ln \frac{1}{r[1 + (r_m/r)(1 - r^2)e^{-i\Omega\tau_d}]} \\ &= \frac{c}{nL} \ln \frac{1}{r} - 2M_d e^{-i\Omega\tau_d}. \end{aligned}$$

Потери на зеркале в модели ЛК (первое слагаемое) определяют время жизни фотона и далее рассматриваются как распределенные потери. Второе слагаемое задает вклад внешнего зеркала с учетом временного запаздывания отраженного сигнала. Для лазера с собственным резонатором длиной L и амплитудным коэффициентом отражения от грани кристалла r время жизни фотона в среде со скоростью света c и групповым показателем преломления n определяется как $\tau_{\text{ph}}^{-1} = (c/n)(L^{-1} \ln r^{-1})$. Так как отражение от внешнего зеркала мало и $\ln(1 + x) \approx x$, то $M_d = (c/2nL)(1 - r^2)(r_m/r)$.

Расположим начало отсчета системы координат (z', t') на глухом зеркале. С помощью замены $z = z'n/c\tau_{\text{ph}}$, $t = t'/\tau_{\text{ph}}$

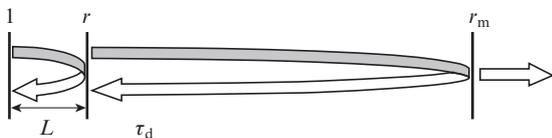


Рис.1. Диодный лазер с внешней запаздывающей обратной связью. Длина резонатора L ; левое зеркало глухое, правое имеет коэффициент отражения r , внешнее – r_m . Время запаздывания сигнала τ_d .

перейдем к безразмерным координатам. Тогда уравнения ЛК имеют следующий вид ($z_L \equiv nL/c\tau_{\text{ph}} = \ln r^{-1}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial E(t, z)}{\partial z} &= (1 - iR)NE + iMe^{i\kappa} E(t - \tau_d, z - \tau_d), \\ T \frac{\partial N}{\partial t} &= P - N - (2N + 1)I(t, z), \end{aligned} \quad (1)$$

$$I(t, z) = |E(t, z)|^2 e^z + |E(t, 2z_L - z)|^2 e^{-z}, \quad 0 < z < z_L.$$

Первое из уравнений описывает поведение плавной огибающей амплитуды поля $E(t, z)$ в виде бегущей волны с круговым обходом резонатора L (это накладывает периодические краевые условия $E(t, z + \tau_{2L}) = E(t, z)$, $\tau_{2L} = 2nL/c\tau_{\text{ph}}$ – время обхода резонатора в долях τ_{ph}), второе уравнение – временную динамику инверсии населенностей N , обусловленную эволюцией интенсивности поля. Обратная связь в уравнении распределенная; M – безразмерный модуль константы связи, который определяется через амплитудный коэффициент отражения от внешнего зеркала r_m : $M = (1 - r^2)(r_m/r)/\tau_{2L}$; параметр κ – фаза константы связи, определяющая набег фазы на несущей частоте поля в петле ЗОС.

Во втором уравнении интенсивность поля I является суммарной интенсивностью двух встречных волн, две зеркальные точки z и $\tau_{2L} - z$ пространственно совпадают (здесь используется алгебра по модулю τ_{2L}).

Усиление поля G в линейном приближении вблизи порога пропорционально инверсии населенностей N . Безразмерная величина N выражается через концентрацию носителей N_c : $N = 0.5g\tau_{\text{ph}}(N_c - N_{\text{th}})$, где g – дифференциальное усиление среды ($g = (cn)\partial G/\partial N_c$ [мкм³·пс⁻¹]). Пороговая концентрация носителей $N_{\text{th}} = N_{\text{tr}} + (g\tau_{\text{ph}})^{-1}$ определяется потерями излучения на торцах кристалла и распределенными потерями. Последние можно описать, используя понятие эффективной концентрации прозрачности N_{tr} , которая дополнительно включает в себя пассивные потери в объеме. Далее введем $P = 0.5g\tau_{\text{ph}}(j\tau_s - N_{\text{th}})$ – нормированную интенсивность накачки над порогом, где τ_s – время жизни носителей в отсутствие вынужденных переходов; j – скорость инжекции носителей в квантовую яму толщиной d . Безразмерное время вводится нормированием на время жизни фотона τ_{ph} . В частности, безразмерное время релаксации инверсии определяется как $T = \tau_s/\tau_{\text{ph}}$. Типичное значение $T \approx 1000$.

В ДЛ коэффициент усиления G , как правило, велик, так что обычно амплитудный коэффициент отражения выходного зеркала меньше единицы (~ 0.5). При численном интегрировании уравнений (1) возникают сложности, связанные с необходимостью учета разрыва амплитуды поля на правом зеркале резонатора ДЛ. В представлении встречных волн интенсивность поля $I = I_+ e^z + I_- e^{-z}$, где волны I_{\pm} на зеркалах преобразуются друг в друга уже с сохранением гладкости. Величина разрыва интенсивности поля на правом зеркале находится (с учетом малости обратной связи) из условия $J(z_L) = P_{z_L}$, где $J = I_+ e^z - I_- e^{-z}$.

Для больших времен запаздывания τ_d по сравнению с τ_{2L} распределение поля в резонаторе меняется во времени как целое, т.к. время установления поля того же по-

рядка, что и время жизни фотона, а осцилляции возмущений из-за обратной связи имеют масштаб, связанный с временем запаздывания. Поэтому с точностью до формы поля внутри резонатора и нормировки интенсивности динамику возмущений, создаваемых обратной связью, можно изучать, задавая интенсивность простой формулой $I(t, z) = |E(t, z)|^2$. Эта формула удобна при аналитическом рассмотрении, а сравнения с расчетами по полной модели показывают совпадение динамики с поведением решений, полученных для нульмерной модели ЛК. Анализ, приведенный в приложении, дает необходимые условия применимости такой модели. Сравнение частот инкрементов нарастания возмущений без ЗОС с частотой ω для осциллирующих возмущений из-за обратной связи дает дополнительное условие $\omega T \gg 1$, при выполнении которого динамика решений уравнений (2) с распределенными потерями будет близка к динамике нульмерной модели. Здесь ω – безразмерная частота, нормированная на обратное время жизни фотона.

Стационарное состояние (СС) определяется условиями [1]: $\partial E(\tau, z)/\partial z = i\beta$ и $\partial N/\partial \tau = 0$. Тогда при подстановке $E = E_s \exp(i\beta z + \psi(\tau, z))$ первое уравнение системы (1) в движущейся системе координат ($\tau = t - z$, $z = z$) преобразуется к виду

$$i\beta + \frac{\partial}{\partial z} \psi(\tau, z) = (1 - iR)N + iMe^{-i\chi} \exp[\psi(\tau, z - \tau_d) - \psi(\tau, z)],$$

где новая фаза обратной связи $\chi = \beta\tau_d - \kappa$. Пусть стационарное значение $N = N_0$, тогда из второго уравнения системы (1) следует $P - N_0 = (2N_0 + 1)E_s^2$. Амплитуда поля, описывающая плавную огибающую излучения, имеет отстройку частоты от несущей частоты (из равенства нулю вещественных компонент следует $N_0 = -M \sin \chi$):

$$i\beta = (1 - iR)N_0 + iMe^{-i\chi} = iM(\cos \chi + R \sin \chi) = iM\sqrt{1 + R^2} \sin(\chi + \arctan(1/R)).$$

Уравнения для ψ и $n = N - N_0$ (отметим, что $n \ll 1$, т. к. $M \ll 1$) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi(\tau, z) = (1 - iR)n + iMe^{-i\chi} \{\exp[\psi(\tau, z - \tau_d) - \psi(\tau, z)] - 1\}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = -\frac{n}{T_1} - \frac{\omega_r^2}{2} [\exp(2 \operatorname{Re} \psi) - 1].$$

Здесь введено

$$\omega_r^2 = 2 \frac{P - N_0}{T} \text{ и } \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} \frac{1 + 2P}{1 + 2N_0} \approx \frac{1}{T}.$$

Отметим, что усиление сосредоточено внутри собственного резонатора диода, длина кругового обхода резонатора $2L \sim \sigma\tau_{ph}$ и много меньше длины внешнего резонатора $\sigma\tau_d$. Учет кольцевых граничных условий (в лабораторной системе координат) для поля внутри кристалла позволяет считать решение периодичным вдоль пространственной координаты z (с периодом $2z_L$) и произвольно меняющимся

во времени. Формально решение ищется на поверхности цилиндра. Развертка такой области интегрирования представляет собой ленту шириной $2z_L$ с краем по линии $t - z = \text{const}$ в лабораторной системе отсчета. Поэтому при численных расчетах уравнений в памяти компьютера необходимо хранить данные за интервал времени запаздывания τ_d/τ_{ph} .

3. Анализ возмущений с учетом запаздывания

Свойства нелинейных уравнений (2) можно изучать, осуществив переход к анализу линейных уравнений для возмущений. Речь идет о замене $\psi \rightarrow \psi + \delta\psi$, $n \rightarrow n + \delta n$, когда варьируются исходные точные решения нелинейной системы с целью получения линейной системы уравнений относительно малых возмущений. Как известно [15], в отсутствие ЗОС уравнения (2) имеют устойчивое стационарное решение $\psi = 0$. Начальные возмущения со временем затухают. Вид осцилляций (в случае малой скорости затухания) может быть получен аналитически. Обратная связь изменяет поведение системы и ее фазовый портрет. В частности, могут возникать новые динамические решения, которые при определенных условиях обретают устойчивость, а их орбиты в фазовом пространстве становятся притягивающими. Такие переходы говорят о структурной перестройке всего решения системы. Различные типы решений разделяются точками бифуркаций.

Поскольку обратная связь приводит к структурной перестройке решения даже в случае малого коэффициента обратной связи, то учет ее влияния не может быть корректен в рамках теории возмущений конечного порядка. Для учета возмущений во всех порядках используется функция Грина. Так как мы исследуем осцилляции вблизи частоты релаксационных колебаний ω_r , которые много больше обратных времен релаксации инверсии T^{-1} , то в этих предположениях верна нульмерная модель ($\partial\psi/\partial z \rightarrow \partial\psi/\partial \tau$):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \delta\psi = (1 - iR)\delta n + iM \exp(-i\chi + \psi(\tau - \tau_d) - \psi) \times \{\delta\psi(\tau - \tau_d) - \delta\psi\}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \delta n}{\partial \tau} = -\frac{\delta n}{T} - \omega_r^2 \exp(2 \operatorname{Re} \psi) \delta \operatorname{Re} \psi.$$

Однородная часть этой системы уравнений не содержит ЗОС и поэтому достаточно проста. Ее решение может быть получено в явном виде, а частное решение (3) – методом вариации констант. Полное решение системы представляет собой интегральное уравнение, ядро которого (функция Грина) зависит от траектории ψ . Свойства решения сильно зависят от спектральных свойств функции Грина [16]. Непосредственно из вида (3) видно, что релаксационный член ведет к затуханию во времени однородного решения, поэтому только частное решение неоднородной системы определяет динамику на больших временных интервалах. Частное решение представляет собой интеграл между двумя моментами времени (верхний предел – текущее время). Верхний предел задает поведение решения, в то время как нижний является решением однородной системы и в асимптотическом пределе исчезает.

Так как одно из уравнений комплексное, то вместо двух уравнений получаем три вещественных уравнения. Для действительной и мнимой частей $\delta\psi$ введем обозна-

чения $\delta x = \delta \operatorname{Re} \psi$, $\delta y = \delta \operatorname{Im} \psi$, а для возмущений инверсии сохраням обозначение δn . В уравнении (3) слагаемые, входящие в однородную часть системы, определяют вид матрицы A ; в матрице B учитывается вклад только ЗОС:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -R \\ -\omega_r^2 e^{-2\operatorname{Re} \psi} & 0 & -T^{-1} \end{pmatrix},$$

$$B(\tau) = M e^{x(\tau - \tau_d) - x} \begin{pmatrix} \sin \zeta & -\cos \zeta & 0 \\ \cos \zeta & \sin \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\zeta = \chi + y - y(\tau - \tau_d)$. Тогда решение линеаризованной системы записывается в виде интегрального уравнения, которое получается из решения однородной системы методом вариации констант [17] (для установившихся периодических решений внешний интеграл – неопределенный):

$$\begin{pmatrix} \delta x(\tau) \\ \delta y(\tau) \\ \delta n(\tau) \end{pmatrix} = \int_{t_0}^{\tau} dt \widehat{T} \left(\exp \left[\int_t^{\tau} dt' A \right] \right) B(t) \begin{pmatrix} \delta x(\tau - \tau_d) - \delta x(t) \\ \delta y(\tau - \tau_d) - \delta y(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

здесь $\widehat{T}(\exp)$ – хронологическая экспонента [18]. При стационарном решении* обе матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -R \\ -\omega_r^2 & 0 & -T^{-1} \end{pmatrix} \text{ и } B_0 = M \begin{pmatrix} \sin \chi & -\cos \chi & 0 \\ \cos \chi & \sin \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

постоянны, поэтому

$$\int_t^{\tau} dt' A = (\tau - t) A_0.$$

Поведение на периодическом аттракторе определяется областью интегрирования вблизи верхнего предела, когда $t \rightarrow \tau$. На временных интервалах, на которых играют роль переходные процессы, частота осцилляций плавно изменяется, стартуя от частоты релаксационных колебаний. В асимптотическом пределе фазовая траектория выходит на периодический аттрактор. Для установившихся периодических колебаний справедлива теория Ляпунова о разрешимости. Исходная система линейных дифференциальных уравнений принадлежит к классу уравнений с периодическими коэффициентами. Любая система с периодическими коэффициентами приводима ([19], с. 398), т. е. ее можно преобразовать к системе уравнений с постоянными коэффициентами некоторым (нелинейным) преобразованием Ляпунова. Вывод утверждения основан на самых общих предположениях, связанных с периодичностью, само преобразование Ляпунова не определено. Для интегрального уравнения (4) с постоянными матрицами A_0 и B_0 преобразование Ляпунова соответствует функции Грина $\exp[A_0(\tau - t)]$. Тем самым задача разрешима и сведена к алгебраической.

Аналитические свойства ядра оператора в бесконечно малой окрестности точки на верхнем пределе интегриро-

вания (4) формируют динамические характеристики колебаний системы непосредственно на самом периодическом аттракторе. Перед взятием предела $t \rightarrow \tau$ необходимо разложить вектор решения по собственным векторам A и интегрировать с соответствующей собственной функцией:

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta n \end{pmatrix} = \int^{\tau} dt \exp[A_0(\tau - t)] B_0 \begin{pmatrix} \delta x(t - \tau_d) - \delta x \\ \delta y(t - \tau_d) - \delta y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Из трех собственных векторов матрицы A_0 два формируют двумерное комплексное подпространство, третий – одномерное вещественное с нулевым собственным значением. Полусумма первых двух векторов наряду с третьим вектором создают вещественное двумерное подпространство. Третья строка у этих векторов равна нулю в пределе $t \rightarrow \tau$, что является необходимым условием, поскольку нижняя строка матрицы B_0 нулевая. Итак, для $\exp[A_0(\tau - t)]$ собственные вектора и числа имеют вид:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -R \\ \pm i\omega_r \end{pmatrix} \exp[\pm i\omega_r(\tau - t)], \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -R \\ -\omega_r \sin[\omega_r(\tau - t)] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ввиду $\omega_r \gg 1/T$, полагаем $1/T \rightarrow 0$).

Интерес представляют точки бифуркаций, в которых возникают незатухающие во времени осциллирующие возмущения. Для колебаний на частоте ω общий вид $\delta \psi$ предложен в [20]. Без ограничения общности действительная часть решения ищется в виде $\delta x = \cos(\omega t)$. В этом случае общий вид мнимой компоненты: $\delta y = \alpha \cos(\omega t) + \beta \cos(\omega t + \vartheta)$, где $\vartheta = -\omega \tau_d / 2$. Решение распадается на плоскости на два вектора: один представляет моду $\propto \cos(\omega t)$, другой – моду, сдвинутую по фазе, $\cos(\omega t + \vartheta)$. Для каждой из мод выводится отдельное уравнение. Для их решения раскладываем первый вектор по собственным векторам матрицы A , раскрываем формулы произведения тригонометрических функций и после их интегрирования и подстановки значения переменной, указанной на верхнем пределе неопределенного интеграла, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{2\beta}{\omega} M \sin \vartheta \left\{ \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -R \cos \chi \end{pmatrix} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_r^2} + \begin{pmatrix} 0 \\ R \cos \chi - \sin \chi \end{pmatrix} \right\}. \quad (6)$$

Аналогично из уравнения для второго вектора:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{2}{\omega} M \sin \vartheta \left\{ \begin{pmatrix} \sin \chi \\ -R \sin \chi \end{pmatrix} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_r^2} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \chi + R \sin \chi \end{pmatrix} \right\} + \frac{2}{\omega} M \sin \vartheta (\alpha + 2\beta \cos \vartheta) \times \left\{ \begin{pmatrix} -\cos \chi \\ R \cos \chi \end{pmatrix} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_r^2} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \chi - R \cos \chi \end{pmatrix} \right\}. \quad (7)$$

Из первой строки этих условий следует, что $\tan \chi = \alpha + 2\beta \cos(\omega \tau_d / 2)$ и $\omega^2 - \omega_r^2 = -2\beta \omega M \sin(\omega \tau_d / 2) \cos \chi$. Анализ второй строки совместно с первой формулой дает выражение для коэффициента $\beta = [-2/(\omega \cos \chi)] M \sin(\omega \tau_d / 2)$. Исключая β из второй формулы, имеем первое характеристическое уравнение (получено ранее в [20]):

$$\omega^2 - \omega_r^2 = 4M^2 \sin^2(\omega \tau_d / 2). \quad (8)$$

* В общем случае коммутаторы, возникающие из-за хронологического оператора перед экспонентой, приводят к поправкам более высокого порядка малости по $(\tau - t)$, их вклад не существен при $t \rightarrow \tau$.

Из второй строки для первой гармоники следует второе характеристическое уравнение:

$$2\omega^2 \sin \chi + 2M\omega \sin(\omega\tau_d) = \omega_r^2(\sin \chi - R \cos \chi). \tag{9}$$

Таким образом, в точке бифуркации возникают некоторые трансцендентные условия на частоту искомого осцилляций. Неизвестный параметр ω один, условий же два. Переопределенность числа уравнений, по-видимому, обусловлена требованием вещественности частоты. Математическая причина такой особенности кроется в наличии функции $\text{Re}\psi$ в исходной системе уравнений ЛК (2). Из общих соображений можно сказать, что совместное решение уравнений (8), (9) возможно не всегда. Отметим, что известная бифуркация Хопфа характеризуется совместностью этих двух уравнений.

Чтобы определить положение точек бифуркации, вернемся к (5), задав возмущения в виде экспонент: $\delta x = \exp(\gamma t)$ и $\delta x = \alpha \exp(\gamma t)$. Тогда из (5) следует уравнение

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = M(e^{-\gamma\tau_d} - 1) \left[\frac{\gamma^2}{\omega_r^2 + \gamma^2} (\sin \chi - \alpha \cos \chi) \begin{pmatrix} 1 \\ -R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \chi + R \sin \chi + \alpha(\sin \chi - R \cos \chi) \end{pmatrix} \right].$$

Таким образом, на две неизвестные величины γ и α возникают в точности два уравнения.

Для более корректного описания критерия устойчивости, связанного с расположением корней вблизи мнимой оси комплексного числа γ , нужно учитывать процессы релаксации инверсии в активной среде ($1/T$ отлично от нуля). Это приводит к тому, что в предыдущей формуле происходит формальная замена:

$$\frac{\gamma^2}{\omega_r^2 + \gamma^2} \rightarrow \frac{\gamma(\gamma + T^{-1})}{\omega_r^2 + \gamma(\gamma + T^{-1})}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \gamma &= M(e^{-\gamma\tau_d} - 1) \frac{\gamma(\gamma + T^{-1})}{\omega_r^2 + \gamma(\gamma + T^{-1})} (\sin \chi - \alpha \cos \chi), \\ R\gamma &= +M(e^{-\gamma\tau_d} - 1)(\cos \chi + R \sin \chi) \\ &+ \alpha[M(e^{-\gamma\tau_d} - 1)(\sin \chi - R \cos \chi) - \gamma]. \end{aligned}$$

Исключив α , получим уравнение для определения собственного числа γ (см. [21]):

$$\begin{aligned} f \equiv & [\gamma(\gamma + T^{-1}) + \omega_r^2] + (M/\gamma)^2 (e^{-\gamma\tau_d} - 1)^2 \gamma(\gamma + T^{-1}) \\ & - (M/\gamma)(e^{-\gamma\tau_d} - 1) \{ \gamma(\gamma + T^{-1})(\sin \chi + R \cos \chi) \\ & + [\omega_r^2 + \gamma(\gamma + T^{-1})](\sin \chi - R \cos \chi) \} = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Корни данного трансцендентного уравнения определяют точки бифуркации системы, в данном случае для стационарных решений системы. Если корней с положительной действительной частью нет, то решение системы устойчиво, в противном случае решение неустойчиво. Точки, когда в правой полуплоскости возникают корни, отвечают бифуркации из устойчивого состояния в режим

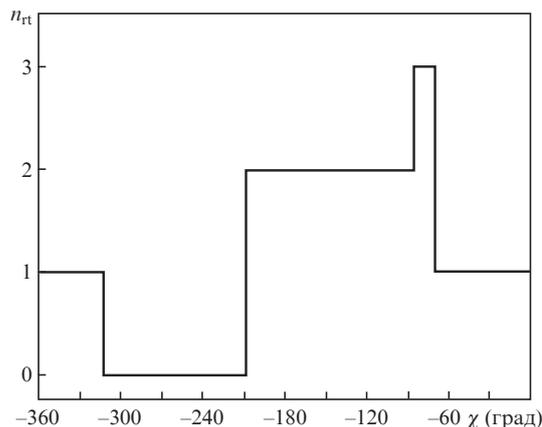


Рис.2. Число корней уравнения (10) в правой полуплоскости, полученное при вычислении контурного интеграла (11), при выбранных значениях $P = 0.8, M = 0.02, T = 1000, \tau_d = 40$. Исследуемая далее бифуркация $n_{пт} = 0 - 2$ на этом рисунке расположена при $\chi = -209^\circ$.

с периодическими пульсациями. Определение наличия корней в этой части комплексной плоскости может быть выполнено методами ТФКП, поставив в соответствие корни выражения (10) полюсам на комплексной плоскости для логарифмической производной f . Интеграл по замкнутому контуру, охватывающему правую полуплоскость, выявляет по теории вычетов число нулей уравнения (10) с $\text{Re}\gamma > 0$ (см. рис.2):

$$n_{пт} = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty}^{-i\infty} d\gamma \frac{f'(\gamma)}{f(\gamma)}. \tag{11}$$

4. Принцип Ляпунова и одночастотное приближение

Из анализа, основанного на решениях для стационарных состояний, видно, что потеря устойчивости приводит к осцилляциям. Однако число условий на частоту последних переопределено [см. формулы (8), (9)]. Это дает основание предположить, что данные о нелинейном периодическом решении можно извлечь, изучая линейную задачу (4). При этом будем считать, что нелинейное периодическое решение $\psi(\tau, z) = x + iy$ может быть представлено в первом приближении как гармоника с частотой ω на фоне постоянного слагаемого. Нелинейное решение в общем случае представляет целый спектр кратных ω частот, что делает, однако, анализ гораздо более сложным. Уже при одночастотной функции $\psi(\tau, z)$ в уравнении (4) возникают гармоники основной частоты, т.к. эта функция содержится в уравнении в показателе экспоненты. Уравнение (4) получено из линейной системы уравнений (3) для малых вариаций $\delta\psi, \delta n$ относительно исходных нелинейных периодических решений. Данная линейная система содержит периодические коэффициенты, и согласно принципу Ляпунова приводима к более простой, а именно к системе с постоянными коэффициентами. Отметим, что в уравнении (3) один из ключевых множителей, приводящих к появлению периодических коэффициентов, имеет вид $M e^{-i\chi} \exp[\psi(\tau - \tau_d) - \psi]$. Согласно принципу приводимости Ляпунова, существует пара констант эффективной обратной связи $M_1 e^{-i\chi_1}$, обеспечивающих отображение в задачу с постоянными коэффициентами. Для собственных чисел с нулевой действительной частью решение имеет характерную

частоту ω , все остальные частоты кратны ей. Поэтому в первом приближении кажется естественным вычислить коэффициенты эффективной обратной связи, выполнив операцию усреднения во времени по периоду осцилляций. В этом приближении будет выполнен поиск одночастотного пробного сигнала, обладающего нулевым инкрементом. Подобным образом поступают при вычислении показателя Ляпунова, усредняя значение вариаций на большом отрезке времени.

Разложение экспоненты от гармоники с комплексной амплитудой в ряд Фурье выражается через обобщенные функции Томпсона–Кельвина $\text{ber}_0, \text{bei}_0$, которые являются аналитическим продолжением классических функций Бесселя:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \exp(ze^{i\varphi} \sin t) &= I_0(ze^{i\varphi}) = J_0(ize^{i\varphi}) \\ &= \text{ber}_0(z, \varphi) + i \text{bei}_0(z, \varphi). \end{aligned}$$

Дальнейшим обобщением функций Томпсона–Кельвина будут функции, возникающие при интегрировании по периоду экспоненты для двух синусов, сдвинутых по фазе. Выполнив по отдельности разложение в ряд для каждого синуса и перемножив эти два ряда, получим новый знакопеременный ряд, где четным индексам разложения соответствует вещественная часть функции, а нечетным индексам – мнимая часть. С помощью теоремы сложения Графа [22] ряд сворачивается к I_0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \exp[x \sin t + iy \sin(t + \xi)] \\ = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} i^k I_k(x) J_k(y) \cos(k\xi) = I_0(\sqrt{x^2 - y^2 + i2xy \cos \xi}). \end{aligned}$$

Поэтому перенормировка констант модуля и фазы обратной связи для колебаний вида $x_1[\sin t + i\alpha \sin t + i\beta \sin(t + \vartheta)]$ происходит по правилу

$$\begin{aligned} M_1 \exp(-i\chi_1) &= M \exp(-i\chi) \\ &\times I_0(2x_1 \sin \vartheta \sqrt{(1 + i\alpha + i\beta \cos \vartheta)^2 + (i\beta \sin \vartheta)^2}), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\vartheta = -\omega\tau_d/2$.

Для зависящей от времени матрицы A двумерное подпространство собственных векторов сохраняет свой вид, изменяются лишь собственные числа. Эти два собственных вектора есть

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -R \\ 0 \end{pmatrix} \cos\left(\omega_r \int_t^\tau dt' \exp x\right), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(третья строка равна нулю, здесь $1/T$ вновь устремляем к нулю).

В первом порядке точности ($x = x_0 + x_1 \cos(\omega t)$) имеем

$$\begin{aligned} \int_t^\tau dt' \exp(x - x_0) &= \int_t^\tau dt' [I_0(x_1) + 2I_1(x_1) \cos(\omega t')] \\ &= [I_0(x_1)(\tau - t) + (2/\omega)I_1(x_1)\{\sin(\omega\tau) - \sin(\omega t)\}], \\ \exp(2x_0) \overline{\exp(2(x - x_0))} &\approx \exp(2x_0) I_0^2(x_1). \end{aligned}$$

Согласно второму уравнению системы (2), среднее по времени от функции $\overline{\exp(2x)} \rightarrow 1$ для любых устойчивых стационарных и периодических решений. Это позволяет исключить параметр $\exp(x_0)$, и, следовательно, зависимость собственного вектора от времени

$$\begin{aligned} \exp\left(i\omega_r \int_t^\tau dt' \exp x\right) \\ = \exp(i\omega_r(\tau - t)) \exp\{ip[\sin(\omega\tau) - \sin(\omega t)]\} \\ \approx \sum_n J_n^2(p) \exp[i(\tau - t)(\omega_r + \omega n)]. \end{aligned}$$

Здесь $p = 2[\omega_r I_1(x_1)/\omega I_0(x_1)]$. Следовательно, первый собственный вектор содержит ряд гармоник, создающих резонансы на частотах $\omega_r + \omega n$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -R \\ 0 \end{pmatrix} \sum_n J_n^2(p) \cos[(\tau - t)(\omega_r + \omega n)].$$

С учетом этих поправок исходные формулы (6), (7) преобразуются. Изменения касаются, во-первых, коэффициентов обратной связи M, χ , которые в результате перенормировки (12) превращаются в M_1, χ_1 . Во-вторых, величина $(\omega^2 - \omega_r^2)^{-1}$ заменяется другой, которую далее обозначим через S :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{J_{n-1}^2(p) - J_{n+1}^2(p)}{(n\omega)^2 - \omega_r^2} \approx \frac{J_0^2(p) - J_2^2(p)}{\omega^2 - \omega_r^2}. \quad (13)$$

В итоге, искомые величины определяются из системы трансцендентных уравнений:

$$S^{-1} = 4M_1^2 \sin^2(\omega\tau_d/2), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 (\sin \chi_1 + R \cos \chi_1) + 2M_1 \omega \sin(\omega\tau_d) \\ = 4M_1^2 \sin^2(\omega\tau_d/2) (R \cos \chi_1 - \sin \chi_1), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{M} \exp[i(\chi - \chi_1)] &= I_0\left(\frac{2x_1 \sin(0.5\omega\tau_d)}{\cos \chi_1}\right) \\ &\times \sqrt{\left[\exp(i\chi_1) + i\frac{M_1}{\omega} \sin(\omega\tau_d)\right]^2 + \left[i\frac{2M_1}{\omega} \sin^2(0.5\omega\tau_d)\right]^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

При выводе этих формул мы исключили коэффициенты α, β с помощью формул

$$\begin{aligned} \alpha \cos \chi_1 &= \sin \chi_1 + 2(M_1/\omega) \sin(\omega\tau_d), \\ \beta \cos \chi_1 &= -2(M_1/\omega) \sin(\omega\tau_d/2). \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение (14) определяет связь частоты с амплитудой осцилляций $\omega(M_1, S^{-1}(x_1))$ и не зависит от фазы эффективной обратной связи. Уравнение (15), наоборот, в явном виде содержит оба параметра обратной связи $\omega(M_1, \chi_1)$. В свою очередь, коэффициенты эффективной обратной связи вычисляются с помощью уравнения (16), в котором используются коэффициенты (17), полученные из решения линейной задачи для возмущений относительно неизвестного нелинейного решения. Только возмущения с параметрами ω, α, β имеют нулевой инкремент, другие (по-

Табл.1. Параметры нелинейных колебаний и эффективной обратной связи.

Параметр	Устойчивое решение	Неустойчивое решение
Частота осцилляций ω	$1.05\omega_r$	$1.67\omega_r$
Амплитуда осцилляций x_1	0.58	2.9
Сила эффективной обратной связи M_1/M	0.47	1.7
Фаза эффективной обратной связи $\chi_1 - \chi$	132.8°	39°

сколькo ищется стационарное периодическое решение) неустойчивы и затухают со временем. Поэтому коэффициенты, полученные из решения линейной задачи, можно использовать при выводе формулы для эффективной обратной связи. И так, ω , M_1 , χ_1 и параметр x_1 , определяющий размах действительной части осцилляций, вычисляются из полной системы уравнений (14)–(16).

Анализ этих уравнений выполнен для значений $P = 0.8$, $M = 0.02$, $T = 1000$, $\tau_d = 40$ и $\chi = -209^\circ$, соответствующих бифуркации разрушения стационарной генерации. Фаза обратной связи χ соответствует скачку 0–2 на диаграмме устойчивости стационарных состояний (рис.2). В проведенных расчетах обнаружено три решения для $0 < x_1 < 3$, из которых лишь одно обладает устойчивостью, и его можно сравнить с результатами непосредственных динамических расчетов. Устойчивое решение неплохо согласуется с частотой осцилляций $1.07\omega_r$, полученной из динамических расчетов в окрестности выбранной точки бифуркации в режим периодических осцилляций (рис.2). В табл.1 приведены параметры колебаний и эффективной обратной связи устойчивого и неустойчивого решений.

Отметим, что параметры эффективной обратной связи устойчивой моды довольно значительно отличаются от таковых для невозмущенного значения: $M_1/M = 0.47$, $\chi_1 - \chi = 132.8^\circ$. Это приводит к формированию осцилляций, заметно отличающихся по форме от гармонических колебаний. По этой же причине бифуркация в этот режим происходит по сценарию, отличному от бифуркации Хопфа. Динамические расчеты показывают, что вначале наблюдается рост малых гармонических осцилляций на частоте $1.4\omega_r$ (до точки бифуркации эти колебания затухают (рис.3)). В этот момент корни уравнений (14) и (15) различны и равны $1.23\omega_r$ и $1.33\omega_r$ соответственно. Только после формирования специфической формы колебаний (рис.3) (с плавным изменением их частоты повторения) корни обоих уравнений сравниваются. Данный тип решения сохраняется при дальнейшем изменении фазы обратной связи (рис.2) вплоть до значения $\chi = -190^\circ$, где происходит бифуркация удвоения периода.

Неустойчивые решения, получающиеся при анализе указанной системы уравнений, не реализуются. В табл.1 приведены данные для одного из неустойчивых решений с двумя корнями с $\text{Re} \gamma > 0$ характеристического уравнения (20). Характеристики этого решения указывают, что сдвиг фазы эффективной обратной связи составляет примерно 39° . Другое неустойчивое решение имеет один корень с положительным инкрементом, его частота осцилляций ($1.36\omega_r$) близка к частоте начальных (неустановившихся) осцилляций, возникающих при пересечении точки бифуркации. Амплитуда установившихся колебаний также велика: $x_1 = 1.78$.

Формулы (14)–(16), которые получены с помощью аналитических вычислений, позволяют обобщить результаты,

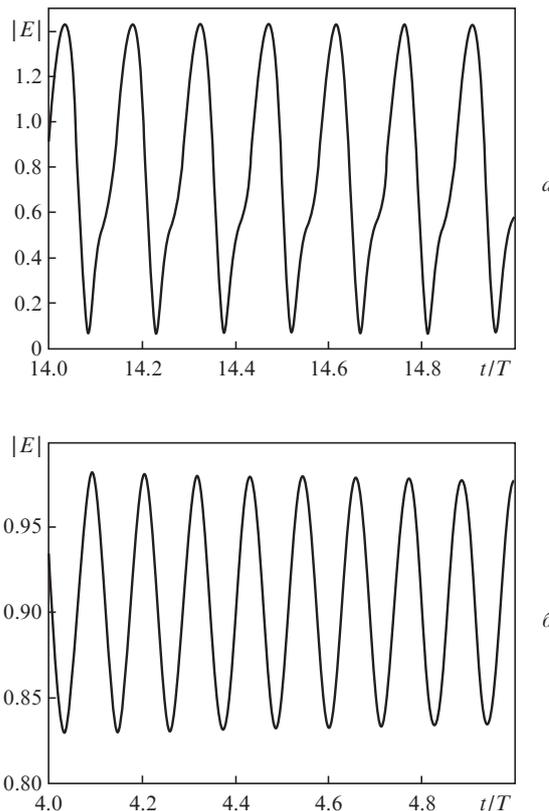


Рис.3. Поведение амплитуды поля лазера сразу за точкой бифуркации (а) и затухающие релаксационные осцилляции к стационарной моде непосредственно перед бифуркацией, $\omega = 1.38\omega_r$ (б).

найденные ранее при анализе стационарного решения в точке бифуркации уравнений (8), (9). Уравнения имеют два различия, связанные с переходом к периодическим фазовым траекториям. Первое различие заключается в том, что параметры эффективной обратной связи (M_1, χ_1), согласно (16), сами подстраиваются под установившийся режим нелинейных осцилляций, а второе – в том, что возникает зависимость частоты повторения осцилляций от амплитуды (14).

Для бифуркаций Хопфа амплитуда осцилляций $x_1 = 0$, так что формулы (14), (15) и (8), (9) тождественны. Этот предел интересен, т. к. объясняет возникновение двух типов бифуркаций из стационарного состояния в режим периодических осцилляций. Из уравнений (8), (9) в этом случае можно вывести бикубическое уравнение относительно частоты развивающихся осцилляций:

$$\omega^2(\omega^2 - \omega_r^2)(4M^2 + \omega_r^2 - \omega^2) = M^2[\omega_r^2(\sin \chi - R \cos \chi) - 2\omega^2 \sin \chi]^2. \tag{18}$$

Из вида кубического выражения относительно ω^2 в левой части уравнения можно заключить, что один из его корней всегда отрицателен (рис.4). У кубического уравнения может быть либо один, либо три вещественных корня. Только в последнем случае можно ожидать появления вещественных частот колебаний (т. е. корней с $\omega^2 > 0$). Существование вещественных корней соответствует бифуркации Хопфа с нулевыми колебаниями.

Уравнение (18) предсказывает существование бифуркации, отличной от бифуркации Хопфа, когда система

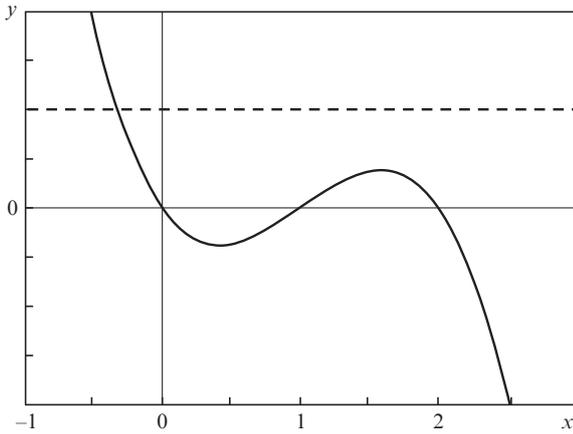


Рис.4. Иллюстрация к решению уравнения (18) в виде $y = p, p > 0$ (штриховая линия) и $y = x(x - x_1)(x_2 - x)$, где $x = \omega^2, x_1 = \omega_r^2, x_2 = \omega_r^2 + 4M^2$ (сплошная кривая). Один корень всегда отрицателен.

уравнений (8), (9) оказывается несовместной при вещественных частотах колебаний. Численные исследования описывают эти бифуркации как режимы с жестким переключением состояний.

С помощью теории катастроф можно найти значения параметров, при которых происходит смена типа бифуркации при потере устойчивости стационарной генерации. Катастрофа сборки проходит по сепаратрису и приводит к фазовому переходу в динамическом поведении лазера по разные стороны этой линии. Переход к формулам (14), (15) позволяет проанализировать режимы, для которых при использовании характеристических уравнений (8), (9) возникает несовместимость. Совместимость их аналогов – уравнений (14), (15) – обеспечивается подстройкой коэффициентов эффективной обратной связи M_1, χ_1 . Поскольку уравнений два, то число определяемых параметров тоже два – это частота и амплитуда колебаний x_1 . Если нелинейное решение лежит на устойчивой орбите, то любое возмущение либо затухает, либо нейтрально устойчивое. Фактически, только одна комбинация мод $\cos(\omega t)$ и $\cos[\omega(t - \tau_d/2)]$ обладает устойчивостью, если она присутствует в спектре нелинейного решения, в то время как другие со временем исчезают. На основании этого коэффициенты эффективной обратной связи (16) вычисляются с использованием параметров (17), полученных из линейной задачи для возмущений.

Из формул (14), (15) можно вывести чисто алгебраическое уравнение, подобное (18):

$$\omega^2 S^{-1} (4M_1^2 - S^{-1}) = M_1^2 [S^{-1} (R \cos \chi_1 - \sin \chi_1) - \omega^2 (\sin \chi_1 + R \cos \chi_1)]^2. \quad (19)$$

Если в определении S (см. (13)) учитывать второй член разложения в ряд, то уравнение (19) будет уравнением пятой степени относительно квадрата частоты ω^2 . Так как согласно (14) $0 \leq S^{-1} \leq 4M_1^2$, то число вещественных решений может быть от нуля до четырех; один корень ω^2 всегда отрицательный. Остальные корни возникают парами, причем условию $\omega \sin(\omega \tau_d) [S^{-1} (R \cos \chi_1 - \sin \chi_1) - \omega^2 (\sin \chi_1 + R \cos \chi_1)] > 0$ удовлетворяет один корень из пары. Таким образом, анализ уравнения (19) предсказывает существование от нуля до двух искомым вещественных частот колебаний для системы (14), (15). Один из возможных корней лежит в окрест-

ности частоты ω_r , а другой – частоты $\omega_r/2$ (режим удвоения периода).

5. Критерий устойчивости

Для определения характера устойчивости нелинейного решения воспользуемся линейным уравнением для возмущений (4), используя параметры периодической орбиты M_1, χ_1, p . Устойчивость таких нелинейных решений определяется знаком инкрементов нарастания возмущений вида $\delta x = e^{\gamma t}$ и $\delta y = \alpha e^{\gamma t}$ вдоль фазовой траектории. Параметры M_1, χ_1, p соответствуют решениям для собственной задачи на спектр гармонических возмущений, найденных из формул (14)–(16):

$$f \equiv \Gamma^{-1} + (M_1/\gamma)^2 (e^{-\gamma \tau_d} - 1)^2 \gamma (\gamma + T^{-1}) - (M_1/\gamma) (e^{-\gamma \tau_d} - 1) [\Gamma^{-1} (\sin \chi_1 - R \cos \chi_1) + \gamma (\gamma + T^{-1}) (\sin \chi_1 + R \cos \chi_1)] = 0, \quad (20)$$

где $\Gamma = \sum J_n^2(p) [(\omega_r + n\omega)^2 + \gamma (\gamma + T^{-1})]^{-1}$.

В общем случае корни комплексные, поэтому устойчивость решения, очевидно, соответствует отсутствию у этого уравнения корней с положительной действительной частью. Это можно проверить, вычислив интеграл по замкнутому контуру (11), который включает мнимую ось и замыкается в правой полуплоскости по кругу бесконечно большого радиуса.

На рис.5,6 представлены результаты анализа устойчивости полученных по формулам (14)–(16) двух разных решений на аттракторе вблизи точки бифуркации из стационарного состояния с $M = 0.02$ и $\chi = -209^\circ$. Решения отличаются амплитудой осцилляций: у первого $x_1 = 0.58$, а у второго $x_1 = 1.78$. При численном интегрировании реализуется нелинейное решение с меньшей модуляцией и частотой осцилляций $\omega = 1.05\omega_r$ (рис.5). В окрестности фазы эффективной обратной связи $\chi_1 = -76.2^\circ$ число корней с $\text{Re} \gamma > 0$ равно нулю, однако граница зоны устойчивости лежит очень близко ($\chi_1 = -78^\circ$). В этом интервале реализуется область гистерезиса, т.е. может быть реализовано два разных типа решения – как стационарное, так и периодическое. В последнем случае модуль эффективной

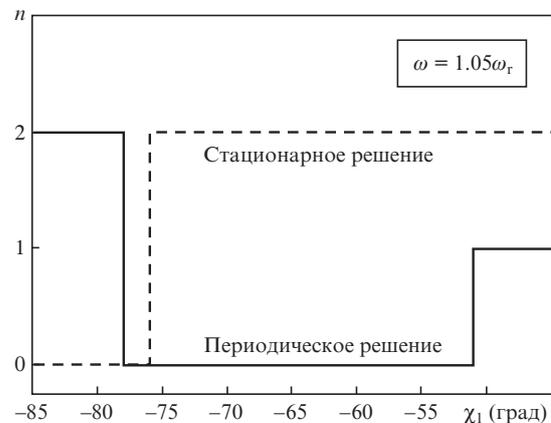


Рис.5. Число неустойчивых корней уравнения (20) с параметрами $p = 0.53, M_1 = 0.47M$ и $\chi_1 - \chi = 132.8^\circ$ в окрестности $\chi_1 = -76.2^\circ$. Решение на частоте $\omega = 1.05\omega_r$ устойчиво, т.к. вблизи $\chi_1 = -76.2^\circ$ число корней с $\text{Re} \gamma > 0$ равно нулю (неустойчивость возникает при $\chi_1 = -78^\circ$). Пунктиром показана область устойчивости для альтернативного стационарного решения.

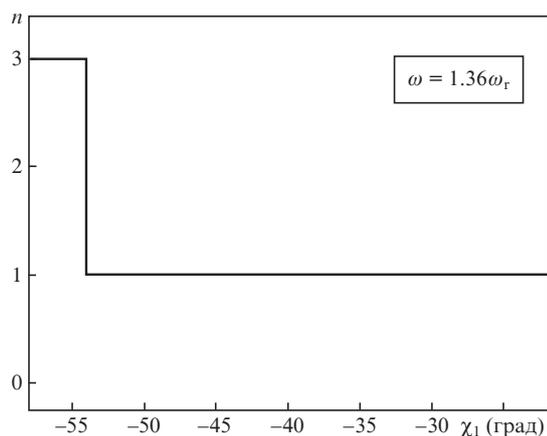


Рис.6. Число неустойчивых корней уравнения (20) с параметрами $p = 0.96$, $M_1 = 1.3M$ в окрестности $\chi_1 = -50.6^\circ$. Решение на частоте $\omega = 1.36\omega_r$ неустойчиво, т.к. вблизи $\chi_1 = -50.6^\circ$ уже есть один корень с $\text{Re}\gamma > 0$.

обратной связи оказывается вдвое ниже значения параметра обратной связи M . Другое решение (рис.6), полученное при той же фазе обратной связи ($\chi = -209^\circ$), не обладает устойчивостью из-за появления корня с $\text{Re}\gamma > 0$. Значения эффективных коэффициентов обратной связи указаны в подписях к рисункам. Обратим внимание на то, что они заметно отличаются от коэффициента обратной связи. Если фазу обратной связи изменить в сторону значения $\chi = -190^\circ$, то можно обнаружить бифуркацию удвоения периода. В этом случае наряду с частотой $\omega = \omega_r$ возникают малые осцилляции на половинной частоте.

6. Заключение

В настоящей работе предложено конструктивное решение проблемы устойчивости в точке перехода к нелинейным периодическим решениям. С помощью модели уравнений Лэнга–Кобаяши, описывающих динамику диодного лазера с запаздывающей оптической обратной связью, продемонстрирован новый способ анализа нелинейных динамических решений. Данный подход не связан с прямым интегрированием динамических уравнений, поэтому не способен охватить переходные режимы, однако может быть полезен при анализе как стационарных режимов, так решений на периодических аттракторах. Для анализа применена линеаризация исходных уравнений непосредственно на периодической фазовой траектории. Формально уравнения принадлежат классу линейных уравнений с периодическими коэффициентами и, согласно теории Ляпунова, приводимы к эквивалентной системе обыкновенных уравнений.

Описан способ нахождения коэффициентов редуцированной системы, эквивалентной системе линейных уравнений теории возмущений применительно к периодическим режимам. В первом приближении динамика может быть описана одним параметром Ляпунова через введение коэффициента эффективной обратной связи. Представленные в этом приближении формулы позволяют вычислить период нелинейных осцилляций и хорошо описывают решение в окрестности бифуркации разрушения устойчивости стационарного состояния, даже если это не бифуркация Хопфа, а бифуркация в ангармонический режим. При анализе бифуркаций с жестким переключением на периодический аттрактор конечного размера были по-

лучены не только динамические характеристики возможного режима, но и изучена их устойчивость. Результаты численного интегрирования динамических уравнений хорошо согласуются с полученными методом Ляпунова.

Особенностью рассмотренного подхода является сведение динамических уравнений с запаздыванием к классу задач на собственные значения. Решение задачи приводит к алгебраическим трансцендентным уравнениям. Несмотря на сложный вид полученных уравнений, предложенный метод позволяет более полно исследовать характер возможных нелинейных решений, которые существуют при данных физических условиях. За пределами точки бифуркации метод сохраняет свою актуальность, но требует более строгого математического изложения с применением специальных функций.

Приложение

Система (2) получена из формул (1) в предположении, что интенсивность задается формулой $I(t, z) = |E(t, z)|^2$. Применим к системе (2) метод малых возмущений для нахождения спектра частот. Поскольку функции зависят от двух переменных, то общий вид возмущения определяется двумя инкрементами:

$$\begin{aligned} n, \psi &\propto \exp(\lambda t + \eta z) = \exp[\lambda(t - z) + \eta z] \\ &= \exp[\lambda t + (\eta - \lambda)z]. \end{aligned}$$

В лабораторной системе координат зависимость от z периодична, и с учетом периодических условий $(\eta - \lambda)\tau_{2L} = 2\pi k i$. Будем рассматривать действие обратной связи как внешнюю силу. В случае резонанса со спектром собственных осцилляций возможна раскачка мод, отвечающих различным продольным модам (с индексом k). Однако, ввиду соотношения $\tau_{2L} \ll \tau_d$, основную роль играют возмущения с $\eta = \lambda$, т.к. прочие колебания заметно отличаются по частоте. Спектр собственных затухающих колебаний системы в отсутствие ЗОС находится из анализа характеристического уравнения для системы (2):

$$\lambda^2 + \lambda(T_1^{-1} + 2\pi i k / \tau_{2L}) + (2\pi i k / \tau_{2L})T_1^{-1} + \omega_r^2 = 0.$$

В частности, при $k = 0$ корни описывают обычные релаксационные колебания с частотой ω_r и медленным затуханием: $\lambda = -(2T_1)^{-1} \pm i\omega_r$. Анализ корней характеристического уравнения при k отличных от нуля и соответствующем выборе знака приводит к выражению

$$\lambda \approx -T_1^{-1} + i\omega_r^2 \tau_{2L} / (2\pi k),$$

которое позволяет указать область применимости нульмерной модели. Как известно [1], наличие ЗОС приводит к развитию осцилляционных неустойчивостей на характерной частоте, близкой к ω_r . Возмущения на других собственных частотах затухают. Более того, динамика решения в численных расчетах по полной модели (1) весьма близка к найденной в рамках нульмерной модели (т.е. при $\eta = \lambda$). Таким образом, поведение одномерной системы вырождается к поведению нульмерной, пока исследуется регулярная динамика с относительно простым спектром.

Управляя параметрами системы, можно усложнить спектр колебаний, проводя через ряд бифуркаций удвоение периода. Если в результате возникнут резонансы с ча-

стотами характеристического уравнения при $k \geq 1$, которые близки к $\omega_r^2 \tau_{2L} / (2\pi k)$, то вырождение снимается. Учитывая, что переход к хаосу происходит после малого числа удвоений периода, следует ожидать, что регулярная динамика соответствует вырожденному случаю. То есть, пока частота осцилляций $\omega \gg \omega_r^2 \tau_{2L} / (2\pi) \propto 1/T$, колебания, соответствующие другим продольным модам внутреннего резонатора, не могут возбуждаться. Поэтому в пределе $\omega T \gg 1$, когда характерная частота возникающих осцилляций намного превышает обратное время релаксации инверсии, динамика решений уравнений (2) будет близка к динамике нульмерной модели и распределение интенсивности (внутри резонатора) не влияет на динамику осцилляций возбужденных ЗОС.

1. Krauskopf B., Lenstra D. *Fundamental Issues of Nonlinear Laser Dynamics. AIP Conference Proceedings* (Melville, NY, 2000, vol. 548).
2. Lang R., Kobayashi K. *IEEE J. Quantum Electron.*, **16**, 347 (1980).
3. Wieczorek S., Krauskopf B., Lenstra D. *Phys. Rev. E.*, **64**, 056204 (2001).
4. Winful H.G., Rahman L. *Phys. Rev. Lett.*, **65** (13), 1575 (1990).
5. Colet P., Roy R. *Opt. Lett.*, **19** (24), 2056 (1994).
6. Goedgebuer J.P., Larger L., Porte H. *Phys. Rev. Lett.*, **80** (10), 2249 (1998).
7. Mørk J., Tromborg B., Christiansen P.I. *IEEE J. Quantum Electron.*, **24** (2), 123 (1988).
8. Davidchack R.L., Lai Ying-Cheng, Gavrielides A., Kovanis V. *Phys. Rev.*, **E63**, 056206-1-6 (2001).
9. Напартович А.П., Сухарев А.Г. *Квантовая электроника*, **38** (10), 927 (2008).
10. Гилмор Р. *Прикладная теория катастроф* (М.: Мир, 1984, т. 1).
11. Diekmann O., van Gils S.A., Verduyn Lunel S.M., Walther H.O. *Delay Equations: Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis. Applied Mathematical Sciences* (Berlin: Springer-Verlag, 1995, vol. 110).
12. Bellman R., Cooke K.L. *Differential-Difference equations* (New York–London: Academic Press, 1963).
13. Эльсгольд Л.Э., Норкин С.Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* (М.: Наука, 1971).
14. Oldham K.B., Spanier J. *The Fractional Calculus. Mathematics in Science and Engineering* (London–San Diego: Academic Press, 1974, vol. 111).
15. Ханин Я.И. *Квантовая радиофизика* (М.: Сов. Радио, 1975, т. 2).
16. Chen Lin-Yuan, Goldenfeld N., Oono Y. *Phys. Rev. E*, **49** (5), 4502 (1994).
17. Verduyn Lunel S.M., Krauskopf B. in *Fundamental Issues of Nonlinear Laser Dynamics*. Ed. by B.Krauskopf, D.Lenstra (Melville, NY: AIP Conf. Proc., 2000, vol. 548, p.66–86).
18. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. *Квантовые поля* (М.: Наука, 1980).
19. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц* (М.: Наука, 1988).
20. Сухарев А.Г., Напартович А.П. *Квантовая электроника*, **37** (2), 149 (2007).
21. Напартович А.П., Сухарев А.Г. *Квантовая электроника*, **34** (7), 630 (2004).
22. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям* (М.: Наука, 1979, с. 184).