*НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ*

PACS 42.65.An; 42.65.Ky

# Восстановление пространственных профилей отдельных компонент тензоров нелинейной восприимчивости $\hat{\chi}^{(3)}(z,\omega',\omega',-\omega,\omega)$ и $\hat{\chi}^{(3)}(z,2\omega\pm\omega',\pm\omega',\omega,\omega)$ одномерно неоднородной среды

**А.А.Голубков, В.А.Макаров**

*Впервые доказана возможность и предложен алгоритм однозначного восстановления координатной зависимости компонент $\chi^{(3)}_{yyyy}$ комплексных тензоров $\hat{\chi}^{(3)}(z,\omega',\omega',-\omega,\omega)$ и $\hat{\chi}^{(3)}(z,2\omega\pm\omega',\pm\omega',\omega,\omega)$, описывающих четырехфотонное взаимодействие световых волн в одномерно неоднородной пластинке, среда которой имеет плоскость симметрии $m_y$, перпендикулярную ее поверхности. Для сред, обладающих дополнительно осью симметрии $2_z$, $4_z$, $6_z$ или $\infty_z$, перпендикулярной поверхности пластинки, предлагаемым способом может быть восстановлено около одной пятой всех независимых компонент указанных выше тензоров.*

***Ключевые слова**: кубическая восприимчивость, одномерно неоднородная среда, обратная задача, коэффициент отражения, коэффициент прохождения, коэффициент преобразования.*

Восстановление пространственной зависимости нелинейных оптических свойств одномерно неоднородных структур становится все более востребованной практической задачей [1–3]. В работе [4] впервые была предложена методика однозначного восстановления профилей некоторых компонент тензора кубической нелинейности $\hat{\chi}^{(3)}(z,\omega,-\omega,\omega,\omega)$ одномерно неоднородной пластинки. Предполагалось, что ее диэлектрические свойства изменяются только вдоль направления оси $z$, перпендикулярной двум параллельным плоским поверхностям пластинки, и произвольным образом зависят от частоты. В настоящей работе доказано, что похожая методика может использоваться и для однозначного определения координатной зависимости комплексных компонент тензоров $\hat{\chi}^{(3)}(z,\omega',\omega',-\omega,\omega)$, $\hat{\chi}^{(3)}(z,2\omega-\omega',-\omega',\omega,\omega)$ и $\hat{\chi}^{(3)}(z,2\omega+\omega',\omega',\omega,\omega)$, ответственных за часто применяемые на практике четырехфотонные нелинейные взаимодействия двух волн с различными частотами [5]. Для такого восстановления необходимо провести две серии экспериментов по исследованию взаимодействия с пластинкой сигнальных волн с частотами $\omega_1$ и $\omega_2$, падающих на пластинку под разными углами из определенного диапазона углов, в присутствии мощной волны с частотой $\omega_3$, причем $\omega_3 = 0.5(\omega_1+\omega_2)$ или $\omega_3 = 0.5\times(\omega_2-\omega_1)$.

Рассмотрим пластинку, которая вдоль плоскостей $z = z_1$ и $z = z_2$ ($z_2 > z_1$) граничит с однородными изотропными линейными непоглощающими и недиспергирующими средами с вещественной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0$. Будем считать, что точечные группы симметрии различных слоев одномерно неоднородной пластинки таковы, что одним из их общих элементов симметрии является плоскость симметрии, перпендикулярная поверхностям пластинки. Направим вдоль этой плоскости симметрии ось $x \perp z$. Пусть на такую пластинку под углом $\alpha_1$ падает s-поляризованная плоская сигнальная волна с малой интенсивностью, распространяющаяся в положительном или отрицательном направлении оси $z$. В первом случае напряженность ее электрического поля равна $E_{1+}\boldsymbol{e}_y\exp\{\mathrm{i}[\omega_1 t - k_x x - k_{1z}(z-z_1)]\}+$ компл. сопр. (при $z<z_1$), а во втором – $E_{1-}\boldsymbol{e}_y\exp\{\mathrm{i}[\omega_1 t - k_x x + k_{1z}(z-z_2)]\}+$ компл. сопр. (при $z>z_2$). Здесь $\boldsymbol{e}_y$ – перпендикулярный плоскости падения единичный вектор; $k_x = k_{01}\sin\alpha_1$; $k_{1z} = k_{01}\cos\alpha_1$; $k_{01} = \omega_1\sqrt{\varepsilon_0}/c$; $c$ – скорость света в вакууме. Пусть, кроме того, на пластинку перпендикулярно ее поверхности в положительном направлении оси $z$ падает плоская мощная волна основного излучения с частотой $\omega_3$, вектор напряженности электрического поля которого при $z<z_1$ равен $E_0\boldsymbol{e}_y\exp\{\mathrm{i}[\omega_3 t - k_{03}(z-z_1)]\}+$ компл. сопр., где $k_{03} = \omega_3\sqrt{\varepsilon_0}/c$. Иными словами, мы параллельно рассматриваем две независимые задачи. В первой мощная и сигнальная волны падают на одну и ту же сторону исследуемой пластинки (нижний индекс «плюс»). Во второй задаче они падают на противоположные стороны пластинки (нижний индекс «минус»). В эксперименте может быть использована любая из этих схем измерений, а при необходимости получения результатов с повышенной точностью измерения могут проводиться по обеим схемам.

Для определенности предположим, что частоты $\omega_3$ и $\omega_1$, где $\omega_1 < 2\omega_3$, а также нелинейные диэлектрические свойства среды пластинки таковы, что при падении на пластинку мощной волны с частотой $\omega_3$ и достаточно слабой сигнальной волны с частотой $\omega_1$ в среде происходит эффективное взаимодействие только трех волн, а именно одной мощной волны $E_{\mathrm{f}}(z)\boldsymbol{e}_y\exp(\mathrm{i}\omega_3 t)+$ компл.

**А.А.Голубков.** Специализированный учебно-научный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 121357 Москва, ул. Кременчугская, 11; e-mail: andrej2501@yandex.ru
**В.А.Макаров.** Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет и Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vamakarov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 29 ноября 2010 г., после доработки – 17 апреля 2011 г.

сопр. и двух слабых – исходной сигнальной волны $E_{s1\pm}(z)\boldsymbol{e}_y \exp[\mathrm{i}(\omega_1 t - k_x x)]$ + компл. сопр. и новой волны $E_{s2\pm}(z)\boldsymbol{e}_y \exp[\mathrm{i}(\omega_2 t + k_x x)]$ + компл. сопр., формируемой в нелинейной среде. Здесь и далее $\omega_2 = 2\omega_3 - \omega_1$. Новая волна $E_{s2\pm}(z)\boldsymbol{e}_y \exp[\mathrm{i}(\omega_2 t + k_x x)]$ + компл. сопр. возникает в результате нелинейного взаимодействия мощной и сигнальной волн, которое описывается тензором кубической восприимчивости $\hat{\chi}^{(3)}(z, \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3)$.

Наше предположение, в частности, означает, что нелинейное взаимодействие новой и мощной волн, влияя на распространение исходной сигнальной волны, не приводит к сколько-нибудь заметной генерации волн с другими частотами. Тогда, с учетом самовоздействия мощной волны и в линейном приближении по амплитудам слабых сигнальной и новой волн, для выбранной поляризации падающих волн из-за наличия у среды плоскости локальной симметрии $\mathrm{m}_y$ только $y$-компонента вектора электрической индукции в пластинке отлична от нуля [6]:

$$\begin{aligned} D_{y\pm} &= \left[\varepsilon_{yy}(z,\omega_3) + 4\pi\chi^{(3)}_{yyyy}(z,\omega_3,-\omega_3,\omega_3,\omega_3)|E_{\rm f}|^2\right]E_{\rm f} \\ &\times \exp(\mathrm{i}\omega_3 t) + \left\{\left[\varepsilon_{yy}(z,\omega_1) + 8\pi\chi^{(3)}_{yyyy}(z,\omega_1,\omega_1,-\omega_3,\omega_3)|E_{\rm f}|^2\right]\right. \\ &\times E_{s1\pm} + 4\pi\chi^{(3)}_{yyyy}(z,\omega_1,-\omega_2,\omega_3,\omega_3)E_{\rm f}^2E^*_{s2\pm}\Big\} \\ &\times \exp[\mathrm{i}(\omega_1 t - k_x x)] + \Big\{\big[\varepsilon_{yy}(z,\omega_2) \\ &+ 8\pi\chi^{(3)}_{yyyy}(z,\omega_2,\omega_2,-\omega_3,\omega_3) \\ &\times |E_{\rm f}|^2\big]E_{s2\pm} + 4\pi\chi^{(3)}_{yyyy}(z,\omega_2,-\omega_1,\omega_3,\omega_3)E_{\rm f}^2E^*_{s1\pm}\Big\} \\ &\times \exp[\mathrm{i}(\omega_2 t + k_x x)] + \text{компл. сопр.} \end{aligned} \tag{1}$$

Подставляя (1) в волновое уравнение для напряженности электрического поля и приравнивая отдельно слагаемые, не зависящие от координаты $x$, а также слагаемые, пропорциональные $\exp[\mathrm{i}(\omega_1 t - k_x x)]$ и $\exp[\mathrm{i}(\omega_2 t + k_x x)]$, после небольших преобразований получаем

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_{\rm f}}{\mathrm{d}z^2} + 0.5\omega_3^2[\varepsilon_{yy}(z,\omega_3)\varepsilon_{n3}(z)]\,\frac{E_{\rm f}}{c^2} = 0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2 E_{s1\pm}}{\mathrm{d}z^2} + \left[\frac{\omega_1^2\varepsilon_{n1}(z)}{c^2} - \lambda\right]E_{s1\pm} + \frac{\omega_1^2 r_{12}(z)E^*_{s2\pm}}{c^2} = 0, \\ &\frac{\mathrm{d}^2 E^*_{s2\pm}}{\mathrm{d}z^2} + \left[\frac{\omega_2^2\varepsilon^*_{n2}(z)}{c^2} - \lambda\right]E^*_{s2\pm} + \frac{\omega_2^2 r^*_{21}(z)E_{s1\pm}}{c^2} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\lambda = k_x^2$; $r_{12}(z) = 4\pi\chi^{(3)}_{yyyy}(z,\omega_1,-\omega_2,\omega_3,\omega_3)E_{\rm f}^2(z)$; $r_{21}(z) = 4\pi\chi^{(3)}_{yyyy}(z,\omega_2,-\omega_1,\omega_3,\omega_3)E_{\rm f}^2(z)$; $\varepsilon_{nk}(z) = \varepsilon_{yy}(z,\omega_k) + 8\pi\chi^{(3)}_{yyyy}(z,\omega_k,\omega_k,-\omega_3,\omega_3)|E_{\rm f}(z)|^2$; $k = 1, 2, 3$.

Пусть теперь вместо сигнальной волны с частотой $\omega_1$ на ту же самую пластинку падает сигнальная волна с частотой $\omega_2 = 2\omega_3 - \omega_1$ под углом $\alpha_2$, таким, что $k_{02}\sin\alpha_2 = k_x$, где $k_{02} = \omega_2\sqrt{\varepsilon_0}/c$. Напряженность электрического поля этой сигнальной волны равна $E_{2+}\boldsymbol{e}_y \exp\{\mathrm{i}[\omega_2 t - k_x x - k_{2z}(z - z_1)]\}$ + компл. сопр. при ее распространении в положительном направлении оси $z$ $(z < z_1)$ и $E_{2-}\boldsymbol{e}_y \times \exp\{\mathrm{i}[\omega_2 t - k_x x + k_{2z}(z - z_2)]\}$ + компл. сопр. при ее распространении в отрицательном направлении оси $z$ $(z > z_2)$. Здесь $k_{2z} = k_{02}\cos\alpha_2$ и предполагается, что $k_x < k_{02}$.

Из сформулированного ранее предположения следует, что нелинейное взаимодействие этой сигнальной волны с распространяющейся в пластинке мощной волной $E_{\rm f}(z)\boldsymbol{e}_y \exp(\mathrm{i}\omega_3 t)$ + компл. сопр. приведет к появлению новой слабой волны с частотой $\omega_1 = 2\omega_3 - \omega_2$, напряженность электрического поля которой $E_{s1\pm}(z)\boldsymbol{e}_y \exp[\mathrm{i}(\omega_1 t + k_x x)]$ + компл. сопр. При этом уравнения, описывающие изменение величин $E_{s1\pm}(z)$ и $E^*_{s2\pm}(z)$ в пластинке, будут по-прежнему иметь вид (3).

Таким образом, при распространении сигнальной волны $E_{sq\pm}(z)$ с частотой $\omega_q$ в пластинке в результате нелинейного взаимодействия появляется новая волна $E_{sl\pm}(z)$ с частотой $\omega_l$. Здесь и везде далее $q = 1, 2$, а $l = 2$ при $q = 1$ и $l = 1$ при $q = 2$, т. е. $l = 1 + \delta_{q1}$, где $\delta_{ij}$ – символ Кронекера. Возникающая в пластинке новая волна продолжает распространяться в граничащих с ней однородных линейных средах в виде волны $E^{(l1)}_{s\pm}\boldsymbol{e}_y \exp\{\mathrm{i}[\omega_l t + k_x x + k_{lz}(z - z_1)]\}$ + компл. сопр. в области $z < z_1$ и в виде волны $E^{(l2)}_{s\pm}\boldsymbol{e}_y \exp\{\mathrm{i}[\omega_l t + k_x x - k_{lz}(z - z_2)]\}$ + компл. сопр. в области $z > z_2$. При этом на поверхностях пластины величины $E^{(l1)}_{s\pm}$, $E^{(l2)}_{s\pm}$ и $E_{sl\pm}(z)$ удовлетворяют максвелловским граничным условиям:

$$E_{sl\pm}(z_1) = E^{(l1)}_{s\pm}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}E_{sl\pm}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = \mathrm{i}k_{lz}E^{(l1)}_{s\pm},$$

$$E_{sl\pm}(z_2) = E^{(l2)}_{s\pm}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}E_{sl\pm}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_2} = -\mathrm{i}k_{lz}E^{(l2)}_{s\pm}.$$

Итак, в статье одновременно рассматриваются четыре различные ситуации. Распространение сигнальной и новой волн в этих ситуациях описывается системой уравнений (3), но граничные условия в каждой из них различны. Ниже приведены граничные условия для каждого из рассматриваемых случаев. Если на пластинку из области $z < z_1$ падает сигнальная волна с частотой $\omega_1$, то они имеют вид

$$\begin{aligned} &E_{s1+}(z_1) = (1 + R_{1+})E_{1+}, \quad E_{s1+}(z_2) = T_{1+}E_{1+}, \\ &\left.\frac{\mathrm{d}E_{s1+}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = -\mathrm{i}k_{1z}(1 - R_{1+})E_{1+}, \\ &\left.\frac{\mathrm{d}E_{s1+}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_2} = -\mathrm{i}k_{1z}T_{1+}E_{1+}, \\ &E^*_{s2+}(z_1) = \left(E^{(21)}_{s+}\right)^* \equiv G^{(21)}_{+}E_{1+}, \\ &E^*_{s2+}(z_2) = \left(E^{(22)}_{s+}\right)^* \equiv G^{(22)}_{+}E_{1+}, \\ &\left.\frac{\mathrm{d}E^*_{s2+}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = -\mathrm{i}k_{2z}G^{(21)}_{+}E_{1+}, \\ &\left.\frac{\mathrm{d}E^*_{s2+}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_2} = \mathrm{i}k_{2z}G^{(22)}_{+}E_{1+}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

В случае, когда на пластинку из области $z > z_2$ падает сигнальная волна с частотой $\omega_1$, граничные условия задаются соотношениями

$$E_{s1-}(z_1) = T_{1-}E_{1-}, \quad E_{s1-}(z_2) = (1 + R_{1-})E_{1-},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{s}1-}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = \mathrm{i}k_{1z}T_{1-}E_{1-},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{s}1-}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_2} = \mathrm{i}k_{1z}(1-R_{1-})E_{1-},$$

$$E^*_{\mathrm{s}2-}(z_1) = \left(E^{(21)}_{\mathrm{s}-}\right)^* \equiv G^{(21)}_{-}E_{1-}, \tag{4.2}$$

$$E^*_{\mathrm{s}2-}(z_2) = \left(E^{(22)}_{\mathrm{s}-}\right)^* \equiv G^{(22)}_{-}E_{1-},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}E^*_{\mathrm{s}2-}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = -\mathrm{i}k_{2z}G^{(21)}_{-}E_{1-},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}E^*_{\mathrm{s}2-}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_2} = \mathrm{i}k_{2z}G^{(22)}_{-}E_{1-}.$$

При падении на пластинку из области $z < z_1$ сигнальной волны с частотой $\omega_2$ они имеют вид

$$E_{\mathrm{s}1+}(z_1) = E^{(11)}_{\mathrm{s}+} \equiv \left(G^{(11)}_{+}E_{2+}\right)^*,$$

$$E_{\mathrm{s}1+}(z_2) = E^{(12)}_{\mathrm{s}+} \equiv \left(G^{(12)}_{+}E_{2+}\right)^*,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{s}1+}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = \mathrm{i}k_{1z}\left(G^{(11)}_{+}E_{2+}\right)^*,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{s}1+}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_2} = -\mathrm{i}k_{1z}\left(G^{(12)}_{+}E_{2+}\right)^*, \tag{4.3}$$

$$E^*_{\mathrm{s}2+}(z_1) = \left(1+R^*_{2+}\right)E^*_{2+}, \quad E^*_{\mathrm{s}2+}(z_2) = T^*_{2+}E^*_{2+},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}E^*_{\mathrm{s}2+}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = \mathrm{i}k_{2z}\left(1-R^*_{2+}\right)E^*_{2+},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}E^*_{\mathrm{s}2+}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_2} = \mathrm{i}k_{2z}T^*_{2+}E^*_{2+}.$$

В последнем случае, когда на пластинку из области $z > z_2$ падает сигнальная волна с частотой $\omega_2$, граничные условия задаются формулами

$$E_{\mathrm{s}1-}(z_1) = E^{(11)}_{\mathrm{s}-} \equiv \left(G^{(11)}_{-}E_{2-}\right)^*,$$

$$E_{\mathrm{s}1-}(z_2) = E^{(12)}_{\mathrm{s}-} \equiv \left(G^{(12)}_{-}E_{2-}\right)^*,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{s}1-}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = \mathrm{i}k_{1z}\left(G^{(11)}_{-}E_{2-}\right)^*,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{s}1-}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_2} = -\mathrm{i}k_{1z}\left(G^{(12)}_{-}E_{2-}\right)^*, \tag{4.4}$$

$$E^*_{\mathrm{s}2-}(z_1) = T^*_{2-}E^*_{2-}, \quad E^*_{\mathrm{s}2-}(z_2) = \left(1+R^*_{2-}\right)E^*_{2-},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}E^*_{\mathrm{s}2-}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = -\mathrm{i}k_{2z}T^*_{2-}E^*_{2-},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}E^*_{\mathrm{s}2-}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_2} = -\mathrm{i}k_{2z}\left(1-R^*_{2-}\right)E^*_{2-}.$$

Здесь $R_{q+}$ и $R_{q-}$ – амплитудные коэффициенты отражения пластинкой сигнальных волн $E_{q+}$ и $E_{q-}$ соответственно; $T_{q+}$ и $T_{q-}$ – амплитудные коэффициенты прохождения этих волн через пластинку; $G^{(l1)}_{\pm} \equiv (E^{(l1)}_{\mathrm{s}\pm})^*/E_{q\pm}$, $G^{(l2)}_{\pm} \equiv (E^{(l2)}_{\mathrm{s}\pm})^*/E_{q\pm}$ – коэффициенты преобразования сигнальной волны $E_{q\pm}$. Последние характеризуют эффективность преобразования пластинкой падающей на нее сигнальной волны с частотой $\omega_q$ в две волны с частотой $\omega_l$, распространяющиеся по разные стороны от пластинки. Учитывая линейность граничных условий (4) относительно $E_{1\pm}$ и $E^*_{2\pm}$, а также линейность системы уравнений (3) относительно $E_{\mathrm{s}1\pm}(z)$ и $E^*_{\mathrm{s}2\pm}(z)$, получаем, что все введенные коэффициенты не зависят от $E_{q\pm}$. Напомним, что мощная волна основного излучения во всех четырех случаях падает на пластинку в положительном направлении оси $z$.

Если зависимости $\varepsilon_{\mathrm{n}1}(z)$, $\varepsilon_{\mathrm{n}2}(z)$, $r_{12}(z)$ и $r_{21}(z)$ известны, то, решив систему (3), (4), можно однозначно рассчитать коэффициенты $R_{q\pm}$, $T_{q\pm}$, $G^{(l1)}_{\pm}$, $G^{(l2)}_{\pm}$ для любых углов падения плоской сигнальной волны с частотой $\omega_q$ и, следовательно, решить прямую задачу. Нас же интересует более сложная обратная задача: определение $\varepsilon_{\mathrm{n}1}(z)$, $\varepsilon_{\mathrm{n}2}(z)$, $r_{12}(z)$ и $r_{21}(z)$ для слоя данной толщины по восьми амплитудным комплексным коэффициентам отражения, прохождения и преобразования сигнальных волн, а именно $R_{q+}$, $T_{q+}$, $G^{(qv)}_{+}$ или $R_{q-}$, $T_{q-}$, $G^{(qv)}_{-}$ ($v = 1, 2$), известным для некоторого интервала значений углов падения. В Приложении 1 доказано, что если такая обратная задача имеет решение, то оно единственно. При этом восстановление компонент $\chi^{(3)}_{yyyy}(z,\omega_1,\omega_1,-\omega_3,\omega_3)$, $\chi^{(3)}_{yyyy}(z,\omega_2,\omega_2,-\omega_3,\omega_3)$, $\chi^{(3)}_{yyyy}(z,\omega_1,-\omega_2,\omega_3,\omega_3)$ и $\chi^{(3)}_{yyyy}(z,\omega_2,-\omega_1,\omega_3,\omega_3)$ может быть проведено, в частности, путем нахождения единственного нулевого минимума специальным образом построенного функционала от пробных функций, описывающих координатную зависимость диэлектрических свойств исследуемой пластинки. Принципы построения такого функционала подробно изложены в работе [4], а его вид приведен в Приложении 2. При этом считаются известными профили $\varepsilon_{yy}(z,\omega_k)$ ($k = 1, 2, 3$) линейной диэлектрической проницаемости среды, методика восстановления которых была предложена в [7] и апробирована в численном эксперименте в [8], а также распределение электрического поля $E_{\mathrm{f}}(z)$ мощной волны в среде [4]. Заметим, что изменяя две из трех или все три частоты ($\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$), можно получить информацию не только о пространственном профиле, но и о частотной дисперсии компонент $\chi^{(3)}_{yyyy}$ тензоров $\hat{\chi}^{(3)}(z,\omega',\omega',-\omega,\omega)$ и $\hat{\chi}^{(3)}(z,2\omega-\omega',-\omega',\omega,\omega)$.

До сих пор мы считали, что среда, образующая слой, имеет только плоскость симметрии $\mathrm{m}_y$, перпендикулярную его поверхностям. Рассмотрим теперь среды, имеющие также ось симметрии $2_z$, $4_z$, $6_z$ или $\infty_z$. Не изменяя поляризации мощной волны накачки, изменим на 90° поляризацию и повернем на 90° плоскость падения сигнальной волны:

$$E_{1\pm}\boldsymbol{e}_x \exp\{\mathrm{i}[\omega_1 t - k_y y \mp k_{1z}(z - z_{1,2})]\} + \text{компл. сопр.}$$

или

$$E_{2\pm}\boldsymbol{e}_x \exp\{\mathrm{i}[\omega_2 t - k_y y \mp k_{2z}(z - z_{1,2})]\} + \text{компл. сопр.},$$

где $k_y = k_{01}\sin\alpha_1 = k_{02}\sin\alpha_2$. Тогда в сформулированных ранее приближениях выражение для ненулевых компонент вектора электрической индукции будет иметь следующий вид [6]:

$$D_{x\pm} = \left\{ \left[ \varepsilon_{xx}(z,\omega_1) + 8\pi\chi^{(3)}_{xxyy}(z,\omega_1,\omega_1,-\omega_3,\omega_3)|E_{\rm f}|^2 \right] E_{\rm s1\pm} + 4\pi\chi^{(3)}_{xxyy}(z,\omega_1,-\omega_2,\omega_3,\omega_3) E_{\rm f}^2 E^*_{\rm s2\pm} \right\} \exp[{\rm i}(\omega_1 t - k_y y)] + \left\{ \left[ \varepsilon_{xx}(z,\omega_2) + 8\pi\chi^{(3)}_{xxyy}(z,\omega_2,\omega_2,-\omega_3,\omega_3)|E_{\rm f}|^2 \right] E_{\rm s2\pm} + 4\pi\chi^{(3)}_{xxyy}(z,\omega_2,-\omega_1,\omega_3,\omega_3) E_{\rm f}^2 E^*_{\rm s1\pm} \right\} \times \exp[{\rm i}(\omega_2 t + k_y y)] + \text{компл. сопр.},$$

$$D_{y\pm} = \left[ \varepsilon_{yy}(z,\omega_3) + 4\pi\chi^{(3)}_{yyyy}(z,\omega_3,-\omega_3,\omega_3,\omega_3)|E_{\rm f}|^2 \right] E_{\rm f} \times \exp({\rm i}\omega t) + \text{компл. сопр.}$$

Поскольку параметры мощной волны накачки мы не изменяли, то уравнение (2) и зависимость $E_{\rm f}(z)$ не изменяются по сравнению с прежней геометрией. Вид граничных условий (4) также сохраняется. Уравнения для $E_{\rm s1\pm}(z)$ и $E^*_{\rm s2\pm}(z)$ по-прежнему имеют вид (3), но с заменой параметра $\lambda$ на $\tilde\lambda = k_y^2$, коэффициентов $\varepsilon_{{\rm n}q}(z)$ на $\tilde\varepsilon_{{\rm n}q}(z) = \varepsilon_{xx}(z,\omega_q) + 8\pi\chi^{(3)}_{xxyy}(z,\omega_q,\omega_q,-\omega_3,\omega_3)|E_{\rm f}(z)|^2$ и $r_{ql}(z)$ на $\tilde r_{ql}(z) = 4\pi\chi^{(3)}_{xxyy}(z,\omega_q,-\omega_l,\omega_3,\omega_3)E_{\rm f}^2(z)$ $(q=1,2;\ l=1+\delta_{q1})$.

Поэтому, измерив для некоторого интервала углов падения новые коэффициенты прохождения ($R_{1-}$, $R_{2-}$), отражения ($T_{1-}$, $T_{2-}$) и преобразования ($G^{(qv)}_{-}$, $v = 1, 2$) для каждой из сигнальных волн, мы можем однозначно восстановить зависимости $\tilde\varepsilon_{\rm n1}(z)$, $\tilde\varepsilon_{\rm n2}(z)$, $\tilde r_{12}(z)$ и $\tilde r_{21}(z)$, а следовательно, и профили компонент $\chi^{(3)}_{xxyy}(z,\omega_1,\omega_1,-\omega_3,\omega_3)$, $\chi^{(3)}_{xxyy}(z,\omega_2,\omega_2,-\omega_3,\omega_3)$, $\chi^{(3)}_{xxyy}(z,\omega_1,-\omega_2,\omega_3,\omega_3)$ и $\chi^{(3)}_{xxyy}(z,\omega_2,-\omega_1,\omega_3,\omega_3)$:

$$\chi^{(3)}_{xxyy}(z,\omega_q,\omega_q,-\omega_3,\omega_3) = \tilde\varepsilon_{{\rm n}q}(z) - \frac{\varepsilon_{xx}(z,\omega_q)}{8\pi|E_{\rm f}(z)|^2},$$

$$\chi^{(3)}_{xxyy}(z,\omega_q,-\omega_l,\omega_3,\omega_3) = \frac{\tilde r_{ql}(z)}{4\pi E_{\rm f}^2(z)}.$$

Напомним, что пространственное распределение электрического поля $E_{\rm f}(z)$ мощной волны в пластинке можно восстановить, пользуясь методикой, предложенной в работе [4]. Изменение двух из трех или всех трех ($\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$) частот, не нарушающее равенства $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_3$, позволяет исследовать частотную дисперсию компоненты $\chi^{(3)}_{xxyy}$ тензоров $\hat\chi^{(3)}(z,\omega',\omega',-\omega,\omega)$ и $\hat\chi^{(3)}(z,2\omega-\omega',-\omega',\omega,\omega)$. Для сред, обладающих осью симметрии самого низкого порядка ($2_z$), можно также восстановить профили и исследовать частотные дисперсии компонент $\chi^{(3)}_{xxxx}$, $\chi^{(3)}_{yyxx}$ этих тензоров. Для этого необходимо повернуть пластинку на $90^\circ$ вокруг оси $z$ и полностью повторить все описанные выше измерения. Для сред, обладающих осью симметрии $4_z$, $6_z$ или $\infty_z$, такие дополнительные измерения не обязательны, т. к. для них $\chi^{(3)}_{xxxx} = \chi^{(3)}_{yyyy}$ и $\chi^{(3)}_{xxyy} = \chi^{(3)}_{yyxx}$ [6].

До сих пор мы считали, что $\omega_1 < 2\omega_3$. Можно рассмотреть и случай $\omega_1 > 2\omega_3$. При этом $\omega_2 = \omega_1 - 2\omega_3$ и взаимодействие трех волн с частотами $\omega_3$, $\omega_1$ и $\omega_2$ описывается компонентами $\chi^{(3)}_{yyyy}$, $\chi^{(3)}_{xxxx}$, $\chi^{(3)}_{yyxx}$ или $\chi^{(3)}_{xxyy}$ (в зависимости от симметрии среды и ориентации плоскостей падения s-поляризованных мощной и сигнальной волн) тензоров $\hat\chi^{(3)}(z,\omega_1,\omega_1,-\omega_3,\omega_3)$, $\hat\chi^{(3)}(z,\omega_2,\omega_2,-\omega_3,\omega_3)$, $\hat\chi^{(3)}(z,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_3)$ и $\hat\chi^{(3)}(z,\omega_2,\omega_1,-\omega_3,-\omega_3)$. Поэтому их профили и могут быть восстановлены по описанной выше методике. Меняя же две из трех или все три ($\omega_1,\omega_3$ и $\omega_2$) частоты, можно исследовать частотную дисперсию соответствующих компонент тензоров кубической нелинейности $\hat\chi^{(3)}(z,\omega',\omega',-\omega,\omega)$, $\hat\chi^{(3)}(z,2\omega+\omega',\omega',\omega,\omega)$ и $\hat\chi^{(3)}(z,\omega'-2\omega,\omega',-\omega,-\omega)$. При этом возможность восстановления от одной до четырех компонент этих тензоров определяется локальной пространственной симметрией среды исследуемой неоднородной пластинки. Как известно, пространственная симметрия одномерно неоднородных сред, строго говоря, относится к одному из десяти классов (1, 2, m, mm2, 3, 4, 6, 3m, 4mm, 6mm) или к двум предельным группам ($\infty$, $\infty$m) [4]. К сожалению, наша методика не позволяет определять и контролировать кубическую нелинейность одномерно неоднородных сред, имеющих классы симметрии 1, 2, 3, 4, 6 и $\infty$. Для сред с классом симметрии m (точнее $\rm m_y$) или 3m можно восстановить только компоненту $\chi^{(3)}_{yyyy}$ каждого из указанных выше тензоров. Компоненты $\chi^{(3)}_{yyyy}$, $\chi^{(3)}_{xxyy}$, $\chi^{(3)}_{xxxx}$ и $\chi^{(3)}_{yyxx}$ этих тензоров удается найти для сред, имеющих классы симметрии mm2. Наконец, для сред с классом симметрии 4mm, 6mm или $\infty m$ восстановить можно компоненты $\chi^{(3)}_{yyyy} = \chi^{(3)}_{xxxx}$ и $\chi^{(3)}_{xxyy} = \chi^{(3)}_{yyxx}$. В результате для сред, имеющих классы симметрии mm2, 4mm, 6mm или $\infty m$, удается восстановить примерно одну пятую всех независимых компонент тензоров кубической нелинейности $\hat\chi^{(3)}(z,\omega',\omega',-\omega,\omega)$, а также $\hat\chi^{(3)}(z,2\omega-\omega',-\omega',\omega,\omega)$ и (или) $\hat\chi^{(3)}(z,2\omega+\omega',\omega',\omega,\omega)$.

Таким образом, нами полностью исследован случай, когда частоты используемых волн, а также нелинейные свойства пластинки таковы, что при падении на нее мощной волны с частотой $\omega_3$ и достаточно слабой сигнальной волны с частотой $\omega_1$ в ней происходит эффективная генерация только одной новой волны. При этом нелинейное взаимодействие последней с мощной волной влияет на распространение сигнальной волны, но не приводит к сколько-нибудь заметной генерации волн с другими частотами. Частота этой новой волны $\omega_2$ может быть равна $2\omega_3 - \omega_1$ (при $\omega_1 < 2\omega_3$), $\omega_1 - 2\omega_3$ (при $\omega_1 > 2\omega_3$) или $\omega_1 + 2\omega_3$. Заметим, что последние два случая физически эквивалентны, т. к. получаются один из другого заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$.

Полученные результаты можно обобщить и на более сложные случаи, когда в среде с кубической нелинейностью происходит эффективное взаимодействие одной мощной и трех (или более) слабых волн, влияющих на распространение друг друга только через взаимодействие с мощной волной, не приводящее к генерации волн с другими частотами. Такая ситуация имеет место, например, если в среде возможно эффективное взаимодействие мощной волны с частотой $\omega_3$ и трех слабых волн с частотами $\omega_1$, $2\omega_3 + \omega_1$ и $2\omega_3 - \omega_1$ (или $\omega_1 - 2\omega_3$) и не возникает заметной генерации волн на других частотах (например, на частоте $4\omega_3 \pm \omega_1$). Однако в этом случае для восстановления соответствующих компонент тензора нелинейной восприимчивости $\hat\chi^{(3)}(z,\tilde\omega_1+\tilde\omega_2+\tilde\omega_3,\tilde\omega_1,\tilde\omega_2,\tilde\omega_3)$ необходимо будет провести уже три серии измерений. В каждой из этих серий для разных углов падения надо определить коэффициенты прохождения и отражения сигнальной волны с одной из трех указанных частот и по четыре коэффициента преобразования этой сигнальной волны в слабые волны с двумя другими частотами. В результате количество необходимых измерений возрастает более чем в два раза по сравнению со случаем, подробно рассмотренным в настоящей работе.

## Приложение 1. Доказательство единственности решения обратной электродинамической задачи

Напомним, что для достаточно широкого класса функций $\varepsilon_{n1}(z)$, $\varepsilon_{n2}(z)$, $r_{12}(z)$ и $r_{21}(z)$ (кусочно-непрерывных и ограниченных или даже только интегрируемых [9]) система уравнений (3) имеет непрерывно дифференцируемые решения, которые мы будем иногда для краткости записывать в виде столбца

$$\overleftrightarrow{\varphi}(z) = \begin{pmatrix} \varphi_{\mathrm{h}} \\ \varphi_{\mathrm{g}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{\mathrm{s}1\pm}(z) \\ E^*_{\mathrm{s}2\pm}(z) \end{pmatrix}.$$

Пусть столбцы $\overleftrightarrow{\varphi}_m(z,\lambda)$, где $m = 1, 2, 3, 4$, являются такими решениями системы (3) с граничными условиями

$$\begin{aligned}
&\overleftrightarrow{\varphi}_1(z_1,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\overleftrightarrow{\varphi}_1(z,\lambda)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\\
&\overleftrightarrow{\varphi}_2(z_1,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\overleftrightarrow{\varphi}_2(z,\lambda)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\\
&\overleftrightarrow{\varphi}_3(z_1,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\overleftrightarrow{\varphi}_3(z,\lambda)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\\
&\overleftrightarrow{\varphi}_4(z_1,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\overleftrightarrow{\varphi}_4(z,\lambda)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{П1.1}$$

Тогда при любом $\lambda$ они образуют фундаментальную систему решений уравнений (3), и решения $\overleftrightarrow{\varphi}^{(1)}_+(z,\lambda)$, $\overleftrightarrow{\varphi}^{(1)}_-(z,\lambda)$, $\overleftrightarrow{\varphi}^{(2)}_+(z,\lambda)$ и $\overleftrightarrow{\varphi}^{(2)}_-(z,\lambda)$ четырех задач (3), (4) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\overleftrightarrow{\varphi}^{(q)}_\pm(z,\lambda) &= C^{(q)}_{1\pm}\overleftrightarrow{\varphi}_1(z,\lambda) + C^{(q)}_{2\pm}\overleftrightarrow{\varphi}_2(z,\lambda)\\
&+ C^{(q)}_{3\pm}\overleftrightarrow{\varphi}_3(z,\lambda) + C^{(q)}_{4\pm}\overleftrightarrow{\varphi}_4(z,\lambda),
\end{aligned} \tag{П1.2}$$

где $q = 1$ соответствует случаю падения на пластинку сигнальной волны с частотой $\omega_1$, а $q = 2$ – волны с частотой $\omega_2$; знак плюс отвечает случаю падения сигнальной волны в положительном направлении оси $z$, а знак минус – в отрицательном.

Рассмотрим наиболее важный и легко реализуемый экспериментально случай $\lambda \in (0, \min\{k^2_{01}, k^2_{02}\})$, когда $k_{1z}$ и $k_{2z}$ действительны. Подставляя $\overleftrightarrow{\varphi}^{(q)}_\pm$ из (П1.2) в (4) и учитывая (П1.1), получаем следующие выражения для коэффициентов $C^{(q)}_{m\pm}$:

$$C^{(1)}_{1+} = (1 + R_{1+})E_{1+}, \quad C^{(1)}_{1-} = T_{1-}E_{1-}, \quad C^{(1)}_{2\pm} = G^{(21)}_\pm E_{1\pm},$$

$$C^{(1)}_{3+} = -\mathrm{i}k_{1z}(1 - R_{1+})E_{1+}, \quad C^{(1)}_{3-} = \mathrm{i}k_{1z}T_{1-}E_{1-},$$

$$C^{(1)}_{4\pm} = -\mathrm{i}k_{2z}G^{(21)}_\pm E_{1\pm}, \quad C^{(2)}_{1\pm} = \left(G^{(11)}_\pm E_{2\pm}\right)^*,$$

$$C^{(2)}_{2+} = [(1 + R_{2+})E_{2+}]^*, \quad C^{(2)}_{2-} = (T_{2-}E_{2-})^*,$$

$$C^{(2)}_{3\pm} = \mathrm{i}k_{1z}\left(G^{(11)}_\pm E_{2\pm}\right)^*, \quad C^{(1)}_{4+} = \mathrm{i}k_{2z}[(1 - R_{2+})E_{2+}]^*,$$

$$C^{(2)}_{4-} = -\mathrm{i}k_{2z}(T_{2-}E_{2-})^*.$$

Кроме того, получим шестнадцать линейных уравнений, связывающих элементы столбцов $\overleftrightarrow{\varphi}_m(z,\lambda)$ и их производные в точке $z = z_2$ с коэффициентами $R_{q\pm}$, $T_{q\pm}$ и $G^{(qv)}_\pm$ ($q = 1, 2$, $v = 1, 2$):

$$\begin{aligned}
&T_{1-}f_1 + G^{(21)}_-f_2 = 1 + R_{1-}, \quad \left(G^{(11)}_-\right)^*f_1 + T^*_{2-}f_2 = \left(G^{(12)}_-\right)^*,\\
&T_{1-}f_3 + G^{(21)}_-f_4 = G^{(22)}_-, \quad \left(G^{(11)}_-\right)^*f_3 + T^*_{2-}f_4 = 1 + R^*_{2-},\\
&R_{1+}f_1 + G^{(21)}_+f_2 + f_5 = T_{1+},\\
&\left(G^{(11)}_+\right)^*f_1 + R^*_{2+}f_2 + f_6 = \left(G^{(12)}_+\right)^*,\\
&R_{1+}f_3 + G^{(21)}_+f_4 + f_7 = G^{(22)}_+, \quad \left(G^{(11)}_+\right)^*f_3 + R^*_{2+}f_4 + f_8 = T^*_{2+},
\end{aligned} \tag{П1.3}$$

$$\begin{aligned}
&T_{1-}f_9 + G^{(21)}_-f_{10} = \mathrm{i}k_{1z}(1 - R_{1-}),\\
&\left(G^{(11)}_-\right)^*f_9 + T^*_{2-}f_{10} = -\mathrm{i}k_{1z}\left(G^{(12)}_-\right)^*,\\
&R_{1+}f_9 + G^{(21)}_+f_{10} + f_{13} = -\mathrm{i}k_{1z}T_{1+},\\
&\left(G^{(11)}_+\right)^*f_9 + R^*_{2+}f_{10} + f_{14} = -\mathrm{i}k_{1z}\left(G^{(12)}_+\right)^*,\\
&T_{1-}f_{11} + G^{(21)}_-f_{12} = \mathrm{i}k_{2z}G^{(22)}_-,\\
&\left(G^{(11)}_-\right)^*f_{11} + T^*_{2-}f_{12} = -\mathrm{i}k_{2z}(1 - R^*_{2-}),\\
&R_{1+}f_{11} + G^{(21)}_+f_{12} + f_{15} = \mathrm{i}k_{2z}G^{(22)}_+,\\
&\left(G^{(11)}_+\right)^*f_{11} + R^*_{2+}f_{12} + f_{16} = \mathrm{i}k_{2z}T^*_{2+}.
\end{aligned} \tag{П1.4}$$

В (П1.3), (П1.4) использованы обозначения

$$\begin{aligned}
&f_{1,5}(k_{1z}) \equiv \Psi_{1\mathrm{h}}(\lambda) \pm \mathrm{i}k_{1z}\Psi_{3\mathrm{h}}(\lambda),\\
&f_{2,6}(k_{2z}) \equiv \Psi_{2\mathrm{h}}(\lambda) \mp \mathrm{i}k_{2z}\Psi_{4\mathrm{h}}(\lambda),\\
&f_{3,7}(k_{1z}) \equiv \Psi_{1\mathrm{g}}(\lambda) \pm \mathrm{i}k_{1z}\Psi_{3\mathrm{g}}(\lambda),\\
&f_{4,8}(k_{2z}) \equiv \Psi_{2\mathrm{g}}(\lambda) \mp \mathrm{i}k_{2z}\Psi_{4\mathrm{g}}(\lambda),\\
&f_{9,13}(k_{1z}) \equiv \Psi_{1\mathrm{h}z}(\lambda) \pm \mathrm{i}k_{1z}\Psi_{3\mathrm{h}z}(\lambda),\\
&f_{10,14}(k_{2z}) \equiv \Psi_{2\mathrm{h}z}(\lambda) \mp \mathrm{i}k_{2z}\Psi_{4\mathrm{h}z}(\lambda),\\
&f_{11,15}(k_{1z}) \equiv \Psi_{1\mathrm{g}z}(\lambda) \pm \mathrm{i}k_{1z}\Psi_{3\mathrm{g}z}(\lambda),\\
&f_{12,16}(k_{2z}) \equiv \Psi_{2\mathrm{g}z}(\lambda) \mp \mathrm{i}k_{2z}\Psi_{4\mathrm{g}z}(\lambda),
\end{aligned} \tag{П1.5}$$

где

$$\Psi_{m\mathrm{h}z}(\lambda) = \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_{m\mathrm{h}}(z,\lambda)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_2}; \quad \Psi_{m\mathrm{g}z}(\lambda) = \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_{m\mathrm{g}}(z,\lambda)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_2};$$

$$\Psi_{m\mathrm{h}}(\lambda) = \varphi_{m\mathrm{h}}(z_2,\lambda); \quad \Psi_{m\mathrm{g}}(\lambda) = \varphi_{m\mathrm{g}}(z_2,\lambda).$$

Из уравнений (П1.3), (П1.4) и постоянства вронскиана системы (3), можно, в частности, получить, что $D_0 \equiv T_{1+}T^*_{2+} - \left(G^{(12)}_+\right)^*G^{(22)}_+ = T_{1-}T^*_{2-} - \left(G^{(11)}_-\right)^*G^{(21)}_- \neq 0$ при $k_{1z}k_{2z} \neq 0$.

Таким образом, для $\lambda \in (0, \min\{k^2_{01}, k^2_{02}\})$ из уравнений (П1.3) могут быть найдены функции $f_1(k_{1z})$, $f_2(k_{2z})$, $f_3(k_{1z})$ и $f_4(k_{2z})$:

$$f_1(k_{1z}) = \frac{T^*_{2-}(1+R_{1-}) - G_-^{(21)}\big(G_-^{(12)}\big)^*}{D_0},$$

$$f_2(k_{2z}) = \frac{T_{1-}\big(G_-^{(12)}\big)^* - (1+R_{1-})\big(G_-^{(11)}\big)^*}{D_0}, \tag{П1.6}$$

$$f_3(k_{1z}) = \frac{T^*_{2-}G_-^{(22)} - (1+R^*_{2-})G_-^{(21)}}{D_0},$$

$$f_4(k_{2z}) = \frac{T_{1-}(1+R^*_{2-}) - G_-^{(22)}\big(G_-^{(11)}\big)^*}{D_0}.$$

С другой стороны, система уравнений (3), полученная нами для неотрицательных значений $\lambda$, формально может рассматриваться при любых, в том числе комплексных, значениях $\lambda$. При каждом фиксированном $z \in [z_1, z_2]$ ее решения $\varphi_{m\mathrm{h}}(z,\lambda)$ и $\varphi_{m\mathrm{g}}(z,\lambda)$ – однозначные аналитические функции $\lambda$ без особых точек в конечной части плоскости, т. е. целые функции $\lambda$ [9, 10]. Следовательно, $\Psi_{m\mathrm{h}}$ и $\Psi_{m\mathrm{g}}$ также являются целыми функциями $\lambda$, а поэтому и $k_{1z}^2 = k_{01}^2 - \lambda$ или $k_{2z}^2 = k_{02}^2 - \lambda$. Последнее означает, что $\Psi_{m\mathrm{h}}$ и $\Psi_{m\mathrm{g}}$ – четные целые функции $k_{1z}$ или $k_{2z}$, а $f_{1,3}$ и $f_{2,4}$ в силу определений (П1.5) – целые функции $k_{1z}$ и $k_{2z}$ соответственно. С учетом четности функций $\Psi_{m\mathrm{h}}$ и $\Psi_{m\mathrm{g}}$ относительно $k_{1z,2z}$ из (П1.5) можно получить следующие соотношения:

$$\Psi_{1\mathrm{h},1\mathrm{g}}(\lambda) = \frac{f_{1,3}(k_{1z}) + f_{1,3}(-k_{1z})}{2},$$

$$\Psi_{3\mathrm{h},3\mathrm{g}}(\lambda) = \frac{f_{1,3}(k_{1z}) - f_{1,3}(-k_{1z})}{2\mathrm{i}k_{1z}}, \tag{П1.7}$$

$$\Psi_{2\mathrm{h},2\mathrm{g}}(\lambda) = \frac{f_{2,4}(k_{2z}) + f_{2,4}(-k_{2z})}{2},$$

$$\Psi_{4\mathrm{h},4\mathrm{g}}(\lambda) = \frac{-f_{2,4}(k_{2z}) + f_{2,4}(-k_{2z})}{2\mathrm{i}k_{2z}},$$

где $\lambda \equiv k_x^2 = k_{01}^2 - k_{1z}^2 = k_{02}^2 - k_{2z}^2$. Применяя результаты [11] к системе (3), сразу получаем, что для однозначного определения $\varepsilon_{\mathrm{n}1}(z)$, $\varepsilon_{\mathrm{n}2}(z)$, $r_{12}(z)$ и $r_{21}(z)$ достаточно знать $\Psi_{m\mathrm{h}}(\lambda)$ и $\Psi_{m\mathrm{g}}(\lambda)$ на всей комплексной плоскости значений $\lambda$.

Пусть коэффициенты $T_{1-}$, $R_{1-}$, $G_-^{(2\nu)}$ $(\nu = 1, 2)$ известны для некоторого интервала углов падения $0 < \alpha_1^{(1)} \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_1^{(2)} < \pi/2$, а коэффициенты $T_{2-}$, $R_{2-}$, $G_-^{(1\nu)}$ – для некоторого интервала $0 < \alpha_2^{(1)} \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_2^{(2)} < \pi/2$. При этом $k_{01}\sin\alpha_1^{(1)} = k_{02}\sin\alpha_2^{(1)}$ и $k_{01}\sin\alpha_1^{(2)} = k_{02}\sin\alpha_2^{(2)}$. Тогда, используя (П1.6), для действительных значений $k_{1z} \in [k_{01}\cos\alpha_1^{(2)}, k_{01}\cos\alpha_1^{(1)}]$ и $k_{2z} \in [k_{02}\cos\alpha_2^{(2)}, k_{02}\cos\alpha_2^{(1)}]$ можно найти $f_{1,3}(k_{1z})$ и $f_{2,4}(k_{2z})$, которые являются целыми функциями. Этого достаточно для их однозначного аналитического продолжения на всю комплексную плоскость значений $k_{1z}$ и $k_{2z}$ соответственно [10]. Зная $f_{1,3}(k_{1z})$ и $f_{2,4}(k_{2z})$, с помощью (П1.7) можно найти $\Psi_{m\mathrm{h}}(\lambda)$ и $\Psi_{m\mathrm{g}}(\lambda)$ для любых $\lambda$, а значит, и однозначно определить $\varepsilon_{\mathrm{n}1}(z)$, $\varepsilon_{\mathrm{n}2}(z)$, $r_{12}(z)$ и $r_{21}(z)$. Аналогичный результат можно получить, исходя из известных коэффициентов $T_{1+}$, $R_{1+}$, $G_+^{(2\nu)}$ и $T_{2+}$, $R_{2+}$, $G_+^{(1\nu)}$.

## Приложение 2. Функционал для однозначного восстановления профилей коэффициентов $\varepsilon_{\mathbf{n1}}(z)$, $\varepsilon_{\mathbf{n2}}(z)$, $r_{12}(z)$ и $r_{21}(z)$ в системе уравнений (3)

Пусть для некоторого интервала $K$ значений $k_x$ точно известны коэффициенты прохождения, отражения и преобразования сигнальных волн с частотами $\omega_1$ и $\omega_2$ для слоя, границы которого имеют координаты $z = z_1$ и $z = z_2$. Иными словами, известны $T_{q+}(k_x)$, $R_{q+}(k_x)$, $G_+^{(q\nu)}(k_x)$ и (или) $T_{q-}(k_x)$, $R_{q-}(k_x)$, $G_-^{(q\nu)}(k_x)$. Для восстановления коэффициентов $\varepsilon_{\mathrm{n}1}(z)$, $\varepsilon_{\mathrm{n}2}(z)$, $r_{12}(z)$ и $r_{21}(z)$ системы уравнений (3) найдем восемь решений

$$\overset{\leftrightarrow}{\varphi}_p(z,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_{\mathrm{h}p} \\ \varphi_{\mathrm{g}p} \end{pmatrix} \quad (p = 1, 2, 3, \ldots, 8)$$

вспомогательной системы уравнений с четырьмя пробными функциями $q_{ij}(z)$, совпадающей с системой (3) при $q_{11}(z) = \varepsilon_{\mathrm{n}1}(z)$, $q_{22}(z) = \varepsilon_{\mathrm{n}2}(z)$, $q_{12}(z) = r_{12}(z)$, $q_{21}(z) = r_{21}(z)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi_\mathrm{h}}{\mathrm{d}z^2} + \left[\frac{\omega_1^2 q_{11}(z)}{c^2} - \lambda\right]\varphi_\mathrm{h} + \frac{\omega_1^2 q_{12}(z)\varphi_\mathrm{g}}{c^2} = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi_\mathrm{g}}{\mathrm{d}z^2} + \left[\frac{\omega_2^2 q^*_{22}(z)}{c^2} - \lambda\right]\varphi_\mathrm{g} + \frac{\omega_2^2 q^*_{21}(z)\varphi_\mathrm{h}}{c^2} = 0. \tag{П2.1}$$

Интересующие нас восемь решений (П2.1) удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\varphi_{\mathrm{h}1}(z_1) = a_{\mathrm{h}2}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{h}1}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = b_{\mathrm{h}2},$$
$$\varphi_{\mathrm{g}1}(z_1) = a_{\mathrm{g}2}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{g}1}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = b_{\mathrm{g}2},$$
$$\varphi_{\mathrm{h}2}(z_2) = a_{\mathrm{h}1}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{h}2}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_2} = b_{\mathrm{h}1},$$
$$\varphi_{\mathrm{g}2}(z_2) = a_{\mathrm{g}1}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{g}2}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_2} = b_{\mathrm{g}1},$$
$$\varphi_{\mathrm{h}3}(z_1) = a_{\mathrm{h}4}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{h}3}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = b_{\mathrm{h}4},$$
$$\varphi_{\mathrm{g}3}(z_1) = a_{\mathrm{g}4}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{g}3}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = b_{\mathrm{g}4},$$
$$\varphi_{\mathrm{h}4}(z_2) = a_{\mathrm{h}3}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{h}4}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_2} = b_{\mathrm{h}3},$$
$$\varphi_{\mathrm{g}4}(z_2) = a_{\mathrm{g}3}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{g}4}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_2} = b_{\mathrm{g}3}, \tag{П2.2}$$
$$\varphi_{\mathrm{h}5}(z_1) = a_{\mathrm{h}6}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{h}5}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = b_{\mathrm{h}6},$$
$$\varphi_{\mathrm{g}5}(z_1) = a_{\mathrm{g}6}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{g}5}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_1} = b_{\mathrm{g}6},$$

$$\varphi_{h6}(z_2) = a_{h5}, \quad \left.\frac{d\varphi_{h6}}{dz}\right|_{z=z_2} = b_{h5},$$

$$\varphi_{g6}(z_2) = a_{g5}, \quad \left.\frac{d\varphi_{g6}}{dz}\right|_{z=z_2} = b_{g5},$$

$$\varphi_{h7}(z_1) = a_{h8}, \quad \left.\frac{d\varphi_{h7}}{dz}\right|_{z=z_1} = b_{h8},$$

$$\varphi_{g7}(z_1) = a_{g8}, \quad \left.\frac{d\varphi_{g7}}{dz}\right|_{z=z_1} = b_{g8},$$

$$\varphi_{h8}(z_2) = a_{h7}, \quad \left.\frac{d\varphi_{h8}}{dz}\right|_{z=z_2} = b_{h7},$$

$$\varphi_{g8}(z_2) = a_{g7}, \quad \left.\frac{d\varphi_{g8}}{dz}\right|_{z=z_2} = b_{g7}.$$

Здесь $a_{h1,h4} = T_{1\pm}$; $a_{h2,h3} = 1 + R_{1\pm}$; $a_{h5,h7} = (G_{\pm}^{(12)})^*$; $a_{h6,h8} = (G_{\pm}^{(11)})^*$; $b_{h1,h4} = \mp ik_{1z}T_{1\pm}$; $b_{h2,h3} = \mp ik_{1z}(1 - R_{1\pm})$; $b_{h5,h7} = -ik_{1z}(G_{\pm}^{(12)})^*$; $b_{h6,h8} = ik_{1z}(G_{\pm}^{(11)})^*$; $a_{g1,g3} = G_{\pm}^{(22)}$; $a_{g2,g4} = G_{\pm}^{(21)}$; $a_{g5,g8} = T_{2\pm}^*$; $a_{g6,g7} = 1 + R_{2\pm}^*$; $b_{g1,g3} = ik_{2z}G_{\pm}^{(22)}$; $b_{g2,g4} = -ik_{2z}G_{\pm}^{(21)}$; $b_{g5,g8} = \pm ik_{2z}T_{2\pm}^*$; $b_{g6,g7} = \pm ik_{2z}(1 - R_{2\pm}^*)$.

Рассмотрим далее неотрицательный функционал

$$G_n[\hat{q}] = \int_K dk_x \sum_{p=1}^{8} \Bigg\{ \mu_{hp}\left|\varphi_{hp}(\tilde{d}_p) - a_{hp}\right|^2 + \mu_{gp}\left|\varphi_{gp}(\tilde{d}_p) - a_{gp}\right|^2 + \beta_{hp}\left|\left.\frac{d\varphi_{hp}}{dz}\right|_{z=\tilde{d}_p} - b_{hp}\right|^2 + \beta_{gp}\left|\left.\frac{d\varphi_{gp}}{dz}\right|_{z=\tilde{d}_p} - b_{gp}\right|^2 \Bigg\} \qquad (\Pi 2.3)$$

от набора четырех пробных профилей $\hat{q}(z) = \{q_{11}(z), q_{12}(z), q_{21}(z), q_{22}(z)\}$, построенный в соответствии с принципами, подробно описанными в [4]. В (П2.3) $\tilde{d}_{1,3,5,7} = z_2$, $\tilde{d}_{2,4,6,8} = z_1$, а весовые коэффициенты $\mu_{hp}$, $\mu_{gp}$, $\beta_{hp}$ и $\beta_{gp}$ – любые фиксированные неотрицательные числа. При этом, если известны только $T_{q+}$, $R_{q+}$, $G_+^{(qv)}$ ($q = 1, 2$; $v = 1, 2$), то $\mu_{h1,h2,h5,h6} \neq 0$, $\mu_{g1,g2,g5,g6} \neq 0$, $\beta_{h1,h2,h5,h6} \neq 0$ и $\beta_{g1,g2,g5,g6} \neq 0$, а остальные весовые коэффициенты равны нулю. Если же известны только $T_{q-}$, $R_{q-}$, $G_-^{(qv)}$, то, наоборот, $\mu_{h3,h4,h7,h8} \neq 0$, $\mu_{g3,g4,g7,g8} \neq 0$, $\beta_{h3,h4,h7,h8} \neq 0$ и $\beta_{g3,g4,g7,g8} \neq 0$, а остальные весовые коэффициенты равны нулю.

Функционал $G_n[\hat{q}]$ является мерой отличия коэффициентов прохождения, отражения и преобразования $\tilde{R}_{q\pm}$, $\tilde{T}_{q\pm}$, $\tilde{G}_{\pm}^{(qv)}$ для слоя с набором профилей $\hat{q}(z)$ от измеренных коэффициентов. Действительно, сравнение формул (4) при $E_{q\pm} = 1$ с (П2.2), (П2.3) показывает, что $G_n = 0$ только при полном совпадении коэффициентов $\tilde{T}_{q+}(k_x)$, $\tilde{R}_{q+}(k_x)$ и $\tilde{G}_+^{(qv)}(k_x)$ и (или) $\tilde{T}_{q-}(k_x)$, $\tilde{R}_{q-}(k_x)$ и $\tilde{G}_-^{(qv)}(k_x)$ с коэффициентами $T_{q+}(k_x)$, $R_{q+}(k_x)$, $G_+^{(qv)}(k_x)$ и (или) $T_{q-}(k_x)$, $R_{q-}(k_x)$, $G_-^{(qv)}(k_x)$ в интервале $K$. В Приложении 1 было доказано, что это совпадение возможно только в единственном случае. Таким образом, восстановление $\varepsilon_{n1}(z)$, $\varepsilon_{n2}(z)$, $r_{12}(z)$ и $r_{21}(z)$ сводится к поиску набора пробных функций $\hat{q}^{(0)}(z)$, соответствующих единственному нулевому минимуму функционала $G_n[\hat{q}]$. Заметим, что профили $\varepsilon_{yy}(z, \omega_q)$ линейной диэлектрической проницаемости среды, а также пространственное распределение электрического поля $E_f(z)$ мощной волны в пластинке могут быть восстановлены по методике, предложенной в [7] и [4] соответственно. Найдя $\hat{q}^{(0)}(z)$, а также зная $\varepsilon_{yy}(z, \omega_q)$ и $E_f(z)$, получим

$$\chi_{yyyy}^{(3)}(z, \omega_q, -\omega_l, \omega_3, \omega_3) = \frac{q_{ql}^{(0)}(z)}{4\pi E_f^2(z)},$$

$$\chi_{yyyy}^{(3)}(z, \omega_q, \omega_q, -\omega_3, \omega_3) = \frac{q_{qq}^{(0)}(z) - \varepsilon_{yy}(z, \omega_q)}{8\pi |E_f(z)|^2},$$

где $q = 1, 2$; $l = 1 + \delta_{q1}$; $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_3$.


1. De Chatellus H.G., Montant S., Freysz E. *Opt. Lett.*, **25**, 1723 (2000).
2. Holmgren S.J., Pasiskevicius V., Wang S., Laurell F. *Opt. Lett.*, **28**, 1555 (2003).
3. Kudlinski A., Quiquempois Y., Lelek M., Zeghlache H., Martinelli G. *Appl. Phys. Lett.*, **83**, 3623 (2003).
4. Голубков А.А., Макаров В.А. *Квантовая электроника*, **40**, 1045 (2010).
5. Ахманов С.А., Коротеев Н.И. *Методы нелинейной оптики в спектроскопии рассеяния света* (М.: Наука, 1981).
6. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. *Основы кристаллофизики* (М.: Наука, 1975).
7. Голубков А.А., Макаров В.А. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика. Астрономия*, № 6, 67 (2009).
8. Голубков А.А., Макаров В.А. *Оптика и спектроскопия*, **108**, 849 (2010).
9. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* (М.: Наука, 1971).
10. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике* (М.: Наука, 1984).
11. Malamud M.M., in *Sturm-Liouville Theory: Past and Present* (Basel, Switzerland: Birkhäuser-Verlag, 2005, pp 237 – 270).