

# Локализованные плазмоны на апертуре канала, проходящего через слой металла

Т.И.Кузнецова, Н.А.Распопов

*Проведено исследование световых полей в планарном канале внутри металлического слоя при учете комплексной диэлектрической функции металла. Рассмотрено воздействие выходной апертуры на исходное поле, распространяющееся по каналу; построена математическая техника для анализа этого воздействия. Отмечено, что поле на выходной апертуре не может считаться заранее заданным, если не учтены процессы преобразования волн при выходе из канала. Для выбранных параметров канала и металла найдены коэффициенты трансформации низшей моды в различные моды более высоких номеров. Построено пространственное распределение поля на выходной апертуре и выходной поверхности металла. Показано, что существует ряд точек, где все компоненты электромагнитного поля имеют аномально высокую интенсивность.*

**Ключевые слова:** наноразмерная щель в металле, моды планарного канала, отражение поля на апертуре, особые точки в пространственной структуре поля.

## 1. Введение

Свойства поверхностных плазмонов в течение последних десятилетий активно обсуждаются в литературе. Классическое теоретическое описание поверхностных плазмонов [1] оперирует с бесконечной плоской границей металла и диэлектрика, а также с электромагнитными волнами, бесконечно протяженными по поперечнику. В отличие от классической схемы, в реальных условиях, кроме образующих поверхностный плазмон двух поверхностных волн, всегда присутствует возбуждающий световой пучок, проходящий от внешнего источника. В тех случаях, когда для возбуждения используется широкий световой пучок (широкий по сравнению с длиной волны излучения) [2, 3], существует определенное соответствие между характеристиками плазмонов в реальных и в идеализированных схемах.

Положение изменяется, когда поперечник возбуждающего пучка становится субволновым. В ряде сравнительно недавних исследований затравочное локализованное поле создавалось с помощью узкого канала в металлической пластине. В [4] использовался цилиндрический канал, в [5, 6] – планарный. Мы не будем касаться обширного круга работ, восходящих к работе [7], в которых использовалась периодическая система каналов или отверстий в металлических пленках. Идеи, инициированные этими работами, оказались важны для многих исследований по оптике наноструктур. Однако напрямую наша статья с работами по периодическим системам не связа-

на, и далее мы будем обсуждать только случаи одиночных каналов.

Характеристики поверхностных плазмонов, возбуждаемых полями, сформированными с помощью каналов, обсуждались с теоретических позиций в [8–10]. В этих работах рассматривался ряд особенностей поведения плазмонов при локализованном возбуждении, в частности был исследован характер затухания плазмонов на больших расстояниях от места локализации возбуждения [9]. Существенно, что в большинстве таких работ считается, что применение тензора Грина (функции Грина) гарантирует получение строгого решения. Вместе с тем в работах используется функция Грина, не обеспечивающая выполнения граничных условий для полей на стенках. По этой причине решение оказывается заведомо приближенным, так что заранее не ясно, насколько полной является физическая картина, к которой решение приводит.

В настоящей работе рассмотрены специфические характеристики собственных волн канала и преобразование собственных волн на выходе из канала в свободное пространство. Трансформацию исходного поля на входной плоскости мы не рассматривали, ограничившись предположением о том, что в канале выживает одна волна с наименьшим затуханием; это вполне справедливо при не слишком малой толщине металлической пластины. Волна на выходе трансформируется во все возможные отраженные волны, являющиеся собственными волнами канала.

Мы хотим подчеркнуть, что формирование возбуждающего светового пучка и возникновение поверхностных волн на выходной плоскости тесно взаимосвязаны и должны рассматриваться совместно. Именно такой подход позволяет получить детальную картину поля на выходе как вдали от области локализации возбуждения, так и на малых расстояниях от канала, в том числе и на самом выходном отверстии.

Т.И.Кузнецова, Н.А.Распопов. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: tkuzn@sci.lebedev.ru, rna@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 14 ноября 2011 г.

## 2. Собственные волны в канале, проходящем через среду с диэлектрическими характеристиками реального металла

Характеристики собственных волн в однородном плоском слое рассчитываются по хорошо известным методам. Эти методы применялись, в частности, для расчета оптических полей в планарных волноводах и изложены в монографии [11]. Ниже кратко изложена методика в форме, удобной для дальнейшего применения.

Рассмотрим однородный слой (для простоты – воздух) внутри металла. Толщина слоя равняется  $2a$ . Будем считать, что диэлектрическая проницаемость металла  $\varepsilon$  везде одинакова, причем она имеет отрицательную вещественную и положительную мнимую части. Рассмотрим ТМ моды. В этом случае имеются три компоненты поля:  $\tilde{H}_y, \tilde{E}_x, \tilde{E}_z$ . Компоненты  $\tilde{E}_x, \tilde{E}_z$  можно выразить через компоненту  $\tilde{H}_y$  следующим образом:

$$\tilde{E}_x = \frac{-i}{\omega/c} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{H}_y \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 1/\varepsilon, & |x| > a \end{cases}, \quad (1)$$

$$\tilde{E}_z = \frac{-i}{\omega/c} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{H}_y \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 1/\varepsilon, & |x| > a \end{cases}. \quad (2)$$

Зависимость от времени предполагается гармонической;  $\omega$  – частота светового поля;  $c$  – скорость света; координатные оси указаны на рис.1. Будем рассматривать только четные моды, и представим выражение для компоненты магнитного поля в виде

$$\tilde{H}_y = \text{const} \exp(-i\omega t + ikz) \times \begin{cases} \cos(qx), & |x| \leq a \\ \cos(qa) \exp[-p(|x| - a)], & |x| > a \end{cases}. \quad (3)$$

Здесь волновые векторы и частота связаны очевидными соотношениями

$$q^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad -p^2 + k^2 = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (4)$$

Во всей системе магнитная проницаемость предполагается равной единице, поэтому магнитное поле должно быть непрерывно на всех поверхностях раздела. Непрерывность поля  $\tilde{H}$  на границе канала гарантируется выражением (3). Введем функцию  $\varphi$  для обозначения зависимости магнитного поля от координаты  $x$ ,

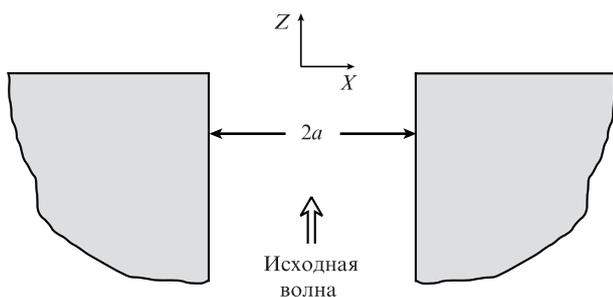


Рис.1. Щель в металле, для которой проводились расчеты.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos(qx), & |x| \leq a \\ \cos(qa) \exp[-p(|x| - a)], & |x| > a \end{cases}, \quad (5)$$

а также функцию  $\psi$  для обозначения зависимости компоненты  $\tilde{E}_x$  от  $x$ :

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos(qx), & |x| \leq a \\ \frac{1}{\varepsilon} \cos(qa) \exp[-p(|x| - a)], & |x| > a \end{cases}. \quad (6)$$

Это позволяет записать компоненты поля в виде

$$\tilde{H}_y = \text{const} \varphi(x) \exp(-i\omega t + ikz), \quad (7)$$

$$\tilde{E}_x = \text{const} \frac{ck}{\omega} \psi(x) \exp(-i\omega t + ikz), \quad (8)$$

$$\tilde{E}_z = \text{const} \frac{ic}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \exp(-i\omega t + ikz). \quad (9)$$

Выбор функций  $\varphi$  и  $\psi$  обеспечивает выполнение равенства (1) и гарантирует непрерывность магнитного поля и нормальной компоненты электрической индукции на границе канала. Выражение (9) должно обеспечивать непрерывность компоненты  $\tilde{E}_z$  на границе щель–металл, что налагает условие на поперечную компоненту волнового вектора  $q$ , которая должна удовлетворять уравнению

$$\varepsilon q \sin(qx) |_{x=a} = p \cos(qa) \exp[-p(|x| - a)] |_{x=a}. \quad (10)$$

Объединив (10) и (4), получим уравнения для определения  $q$  и  $p$ . Далее рассмотрим безразмерные величины

$$Q = qa, \quad P = pa, \quad W = (\omega/c)a, \quad K = ka = \sqrt{W^2 - Q^2}. \quad (11)$$

С учетом этих обозначений из (10) и (4) найдем

$$\varepsilon Q \tan Q = P, \quad (12)$$

$$P^2 = (1 - \varepsilon) W^2 - Q^2 \quad (13)$$

или, объединив (12) и (13), окончательно получим

$$\varepsilon Q \tan Q = \sqrt{(1 - \varepsilon) W^2 - Q^2}. \quad (14)$$

На основе решения уравнения (14) можно получить значения безразмерных волновых векторов в канале и показателей экспонент в металле ( $Q$  и  $P$ ). Приведенная схема расчета совпадает с традиционной, известной из литературы схемой. Отличия будут связаны с теми диэлектрическими характеристиками среды, которые будут использованы в уравнении (14) для нахождения корней, а также с тем, что будут рассматриваться не только вещественные, но и комплексные значения волновых векторов. Напомним, что в случае идеального металла ( $|\varepsilon| \rightarrow \infty$ ) собственные значения волновых векторов вещественны и представляют собой набор эквидистантных чисел:  $Q_n = n\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Если обратиться к случаю вещественной отрицательной диэлектрической проницаемости, то только несколько первых собственных значений будут вещественными, а последующие – комплексными. Если перейти к металлу с поглощением ( $\text{Re}(\varepsilon) < 0$ ,  $\text{Im}(\varepsilon) > 0$ ), то ком-

плексными будут все собственные значения. При этом, если  $Q$  является собственным решением,  $-Q$  также будет собственным решением. Если же мнимая часть диэлектрической проницаемости равна нулю, то для всякого решения  $Q'$  можно, кроме решения  $-Q'$ , указать также решения  $\pm(Q')^*$ .

Однако, если взять среду с отличной от нуля мнимой частью  $\varepsilon$ , комплексно-сопряженные величины уже не будут решениями. В настоящей работе в качестве основных решений мы рассматриваем решения с положительной вещественной частью числа  $Q$ . Для вещественного  $\varepsilon$  основным считаем решение с  $\text{Re}(Q)\text{Im}(Q) < 0$ . Оно выбирается потому, что при этом волна в металле затухает с удалением от оси канала (имеет место неравенство  $\text{Re}(P)\text{Im}(P) > 0$ ). Также при этом волны, распространяясь вдоль щели, затухают по направлению своего распространения ( $\text{Re}(K)\text{Im}(K) > 0$ ).

В случае комплексной диэлектрической проницаемости положение становится сложнее. Для собственных чисел с большими номерами (в нашем примере – с  $n > 2$ ) происходит следующее. Волны, соответствующие этим собственным числам, нарастают в том же направлении, что и волновой вектор. Если рассчитать световой поток в канале, то получим, что вдоль оси канала рост интенсивности и энергетический поток имеют одинаковое направление. На рис.2 для примера приведены пять первых собственных значений для  $\varepsilon = -10.0 + 0.1i$ . В дальнейшем именно такие «неудобные» волны мы будем включать в рассмотрение.

Сделаем еще одно замечание относительно свойств решений в случае комплексной диэлектрической проницаемости. Анализ показывает, что уравнение (14) имеет бес-

конечное число решений. В самом деле, рассмотрим случай больших значений  $Q$ . Пусть

$$|Q^2| \gg |(1 - \varepsilon)W^2|. \quad (15)$$

При выполнении этого условия уравнение (14) сводится к следующему:

$$\varepsilon Q \tan(Q) = -iQ. \quad (16)$$

Отсюда получим

$$\frac{\exp(iQ) - \exp(-iQ)}{\exp(iQ) + \exp(-iQ)} = \frac{1}{\varepsilon} \quad (17)$$

и найдем решение в явном виде:

$$Q = n\pi + b, \quad b = \frac{i}{2} \ln \frac{1 - \varepsilon}{-1 - \varepsilon}. \quad (18)$$

Если положить  $\varepsilon = -10.0 + 0.1i$  (случай, использованный на рис.2), то из (18) получим  $Q_n = n\pi - 0.001010 + 0.100325i$ . Следует отметить, что асимптотика хорошо работает лишь при достаточно больших номерах ( $n \approx 40$ ). В формуле (18) число  $n$  можно неограниченно увеличивать:  $n = n_{\min} + 1, n_{\min} + 2, n_{\min} + 3, \dots$ . Требуется лишь брать большие числа ( $n > n_{\min} = 40$ ), для того чтобы было справедливо условие (15), которое позволило нам упростить уравнение (14) и привести его к виду (16). Таким образом, мы получаем бесконечный набор значений  $Q_n$ , которые являются корнями исходного уравнения (14). Каждому корню  $Q_n$  будет соответствовать число  $P_n$  – волновое число в металле, определяемое формулой (13), и число  $K_n$ , определяемое формулами (4), (11). Также каждому корню  $Q_n$  мы будем сопоставлять функцию  $\varphi$  вида (5), которая описывает магнитное поле, и функцию  $\psi$  вида (6), относящуюся к полю  $E_z$ . Ранее с помощью формул (11) мы перешли от размерных волновых чисел к безразмерным, в связи с чем также удобно ввести безразмерные координаты

$$X = x/a, \quad Z = z/a. \quad (19)$$

В этих координатах функции  $\varphi$  и  $\psi$  принимают вид

$$\varphi_n(X) = \begin{cases} \cos(Q_n X), & |X| \leq 1 \\ \cos(Q_n) \exp[-P_n(|X| - 1)], & |X| > 1 \end{cases}, \quad (20)$$

$$\psi_n(X) = \begin{cases} \cos(Q_n X) & |X| \leq 1 \\ \frac{1}{\varepsilon} \cos(Q_n) \exp[-P_n(|X| - 1)], & |X| > 1 \end{cases}. \quad (21)$$

Рассмотрение волн бесконечного планарного волновода представляет для нас лишь вспомогательную задачу. Наша дальнейшая цель состоит в исследовании полубесконечного планарного волновода, граничащего с открытым пространством.

### 3. Трансформация волноводного поля на выходе из планарного волновода во внешнее пространство

Рассмотрим, как волна, распространяющаяся по каналу, преобразуется на выходе, отражаясь от границы металла и свободного пространства. Для описания такого

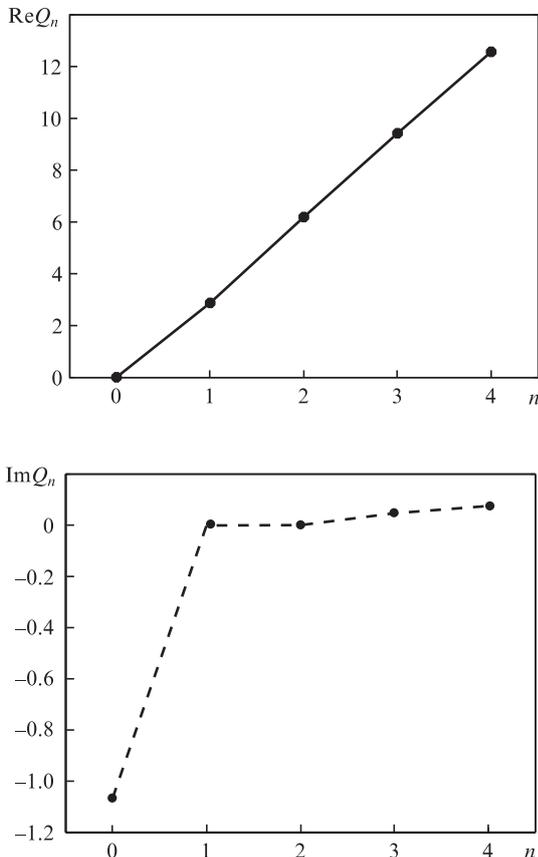


Рис.2. Первые пять корней уравнения (14) при  $\varepsilon = -10 + 0.1i$ .

преобразования необходимо выполнить граничные условия для поля на плоскости  $z = 0$  (см. рис.1). Для этого потребуется включить в рассмотрение все волны, которые могут распространяться в бесконечном волноводе. Представим полное поле в канале в виде линейной комбинации различных собственных волн. Для сокращения записи опустим временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  и перейдем к новым обозначениям для полей  $H_y, E_x, E_z$ , связанным прежними компонентами  $\tilde{H}_y, \tilde{E}_x, \tilde{E}_z$  как

$$\begin{aligned}\tilde{H}_y &= H_y \exp(-i\omega t), \\ \tilde{E}_x &= E_x \exp(-i\omega t),\end{aligned}\quad (22)$$

$$\tilde{E}_z = E_z \exp(-i\omega t).$$

Запишем компоненту поля  $H_y$  в виде

$$\begin{aligned}H_y(X, Z) &= \sum_{n=0}^{\infty} [\delta_{n0} \alpha_{\text{inc}} \exp(iK_n Z) + \alpha_n \exp(-i\eta_n K_n Z)] \varphi_n(X), \\ Z < 0.\end{aligned}\quad (23)$$

Здесь  $K_n = \sqrt{W^2 - Q_n^2}$ ;  $\delta_{n0}$  – символ Кронекера. Эта запись означает, что со стороны отрицательных значений  $z$  в систему приходит волна со структурой нулевой моды и амплитудой  $\alpha_{\text{inc}}$ . Амплитуды прочих волн неизвестны и подлежат определению. Множитель  $\eta_n$  определяется знаком произведения  $\text{Re}(Q)\text{Im}(Q)$ . Мы полагаем, что

$$\eta_n = 1, \quad \text{Re}(Q_n)\text{Im}(Q_n) < 0,\quad (24)$$

$$\eta_n = -1, \quad \text{Re}(Q_n)\text{Im}(Q_n) > 0.$$

Выбор знака связан с тем, что в качестве отраженных волн мы берем те волны, которые затухают при удалении от места соединения волновода с открытым пространством. В разд.1 уже было отмечено, что только для нескольких низших мод направление распространения волны вдоль оси канала и направление затухания амплитуды совпадают. Условие (24) означает, что, выбирая отраженные волны, мы считаем приоритетным направление затухания, а не направление движения фазового фронта. Именно этим определяется тот вид отраженных волн, который мы выбрали при написании формулы (23). Приведем выражения для компонент поля  $E_x$  и  $E_z$ :

$$\begin{aligned}E_x(X, Z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{W} [\delta_{n0} \alpha_{\text{inc}} \exp(iK_n Z) \\ &\quad - \eta_n \alpha_n \exp(-i\eta_n K_n Z)] \psi_n(X), \quad Z \leq 0,\end{aligned}\quad (25)$$

$$\begin{aligned}E_z(X, Z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{iW} [\delta_{n0} \alpha_{\text{inc}} \exp(iK_n Z) \\ &\quad + \alpha_n \exp(-i\eta_n K_n Z)] \left[ -\frac{\partial}{\partial X} \psi_n(X) \right], \quad Z \leq 0.\end{aligned}\quad (26)$$

Перейдем теперь к выражениям для полей во внешней области  $Z > 0$ . Поля  $E_x^{\text{out}}, H_y^{\text{out}}$  должны представлять собой непрерывное продолжение полей  $E_x, H_y$ , определяемых формулами (25), (26).

Введем фурье-образы функций  $\varphi_n$  и  $\psi_n$ :

$$\varphi_n(X) = \int_0^{\infty} \Phi_n(\kappa) \cos(\kappa X) d\kappa,\quad (27)$$

$$\Phi_n(\kappa) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_n(X) \cos(\kappa X) dX,$$

$$\psi_n(X) = \int_0^{\infty} \Psi_n(\kappa) \cos(\kappa X) d\kappa,\quad (28)$$

$$\Psi_n(\kappa) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi_n(X) \cos(\kappa X) dX;$$

подчеркнем, что  $\varphi(X)$  и  $\psi(X)$  – чётные функции. Далее выпишем компоненту  $E_x^{\text{out}}$  во внешнем пространстве:

$$\begin{aligned}E_x^{\text{out}}(X, Z) &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{W} (\delta_{n0} \alpha_{\text{inc}} - \eta_n \alpha_n) \\ &\quad \times \Psi_n(\kappa) [\exp(i\sqrt{W^2 - \kappa^2} Z)] \cos(\kappa X) d\kappa, \quad Z > 0.\end{aligned}\quad (29)$$

На границе  $Z = 0$  поля  $E_x(X)$  и  $E_x^{\text{out}}(X)$  совпадают, а при  $Z \rightarrow \infty$  поле  $E_x^{\text{out}}$  содержит только уходящие или затухающие волны. На основе выражения для  $E_x^{\text{out}}(X, Z)$ , в соответствии с уравнениями Максвелла, выводим выражение для поля  $H_y^{\text{out}}(X, Z)$ :

$$\begin{aligned}H_y^{\text{out}}(X, Z) &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{W} (\delta_{n0} \alpha_{\text{inc}} - \eta_n \alpha_n) \Psi_n(\kappa) \\ &\quad \times \frac{W}{\sqrt{W^2 - \kappa^2}} [\exp(i\sqrt{W^2 - \kappa^2} Z)] \cos(\kappa X) d\kappa, \quad Z > 0.\end{aligned}\quad (30)$$

Теперь выпишем условие равенства полей  $H_y^{\text{out}}$  и  $H_y$  при  $Z = 0$ :

$$H_y^{\text{inner}}(X, 0) = H_y^{\text{out}}(X, 0).\quad (31)$$

Здесь индекс «inner» отвечает полю внутри канала. Принимая во внимание (23) и (30), переписываем равенство (31) в виде

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (\delta_{n0} \alpha_{\text{inc}} + \alpha_n) \varphi_n(X) &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{W} (\delta_{n0} \alpha_{\text{inc}} - \eta_n \alpha_n) \\ &\quad \times \Psi_n(\kappa) \frac{W}{\sqrt{W^2 - \kappa^2}} \cos(\kappa X) d\kappa.\end{aligned}\quad (32)$$

Поскольку равенство (32) выполняется для всех значений  $X$ , то можно умножить обе его части на произвольную функцию от  $X$ , и при этом равенство сохранится. Далее можно полученные произведения проинтегрировать по  $X$ , и равенство также будет иметь место. Произведем указанные операции, используя функции  $\psi_m^*$ . Целесообразность применения такого приема была установлена в наших работах [12, 13] по близкой тематике, в которых, впрочем, рассматривались несколько иная геометрия и

иные материальные константы. После выполнения указанных действий получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\delta_{n0} \alpha_{\text{inc}} + \alpha_n) \langle \varphi_n \psi_m^* \rangle = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{W} (\delta_{n0} \alpha_{\text{inc}} - \eta_n \alpha_n) \times \Psi_n(\kappa) \langle \cos(\kappa X) \psi_m^* \rangle \frac{W}{\sqrt{W^2 - \kappa^2}} d\kappa. \quad (33)$$

Здесь

$$\langle \varphi_n \psi_m^* \rangle = \int_0^{\infty} \varphi_n(X) \psi_m^*(X) dX; \quad (34)$$

$$\langle \cos(\kappa X) \psi_m^* \rangle = \int_0^{\infty} \cos(\kappa X) \psi_m^*(X) dX. \quad (35)$$

С учетом формул (28) для фурье-образов можно записать

$$\langle \cos(\kappa X) \psi_m^* \rangle = \frac{\pi}{2} \Psi_m^*(\kappa). \quad (36)$$

Используя (36), записываем формулу (33) в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\delta_{n0} \alpha_{\text{inc}} + \alpha_n) \langle \varphi_n \psi_m^* \rangle = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{W} (\delta_{n0} \alpha_{\text{inc}} - \eta_n \alpha_n) \times \Psi_n(\kappa) \Psi_m^*(\kappa) \frac{W}{\sqrt{W^2 - \kappa^2}} d\kappa. \quad (37)$$

Величины  $\langle \varphi \psi^* \rangle$  и функции  $\Psi$ , входящие в уравнение (33), непосредственно вычисляются; вычисления дают

$$\langle \varphi_n \psi_m^* \rangle = \frac{1}{2} \frac{\sin(Q_n - Q_m^*)}{Q_n - Q_m^*} + \frac{1}{2} \frac{\sin(Q_n + Q_m^*)}{Q_n + Q_m^*} + \frac{\cos(Q_n) \cos(Q_m^*)}{\varepsilon^*} \frac{1}{P_n + P_m^*}, \quad (38)$$

$$\Psi_n(\kappa) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \frac{\sin(Q_n - \kappa)}{Q_n - \kappa} + \frac{1}{2} \frac{\sin(Q_n + \kappa)}{Q_n + \kappa} + \frac{1}{\varepsilon} \cos(Q_n) \frac{P_n \cos \kappa - \kappa \sin \kappa}{P_n^2 + \kappa^2} \right]. \quad (39)$$

Введем для сокращения записи следующие обозначения:

$$C(n, m) = \langle \varphi_n \psi_m^* \rangle, \quad (40)$$

$$B(n, m) = \frac{\sqrt{W^2 - Q_n^2}}{W} \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \Psi_n(\kappa) \Psi_m^*(\kappa) \frac{W}{\sqrt{W^2 - \kappa^2}} d\kappa. \quad (41)$$

С учетом этих обозначений формула (37) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n [C(n, m) + \eta_n B(n, m)] = \alpha_{\text{inc}} [B(0, m) - C(0, m)]. \quad (42)$$

Полученное равенство (42) представляет собой бесконечную систему уравнений ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) для бесконечного числа неизвестных ( $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ ). После нахождения величин ( $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ ) мы можем построить распределение полей в канале, во внешнем пространстве и, разумеется, на границе металла с внешним пространством.

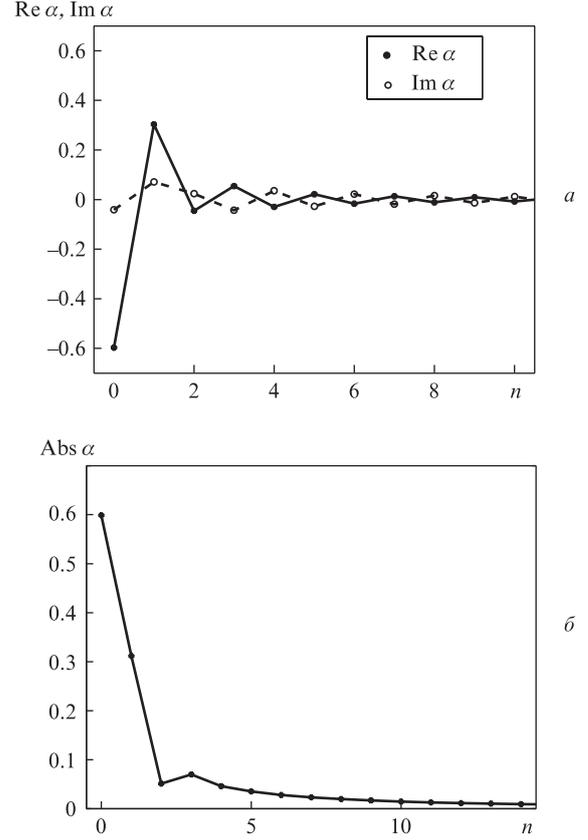


Рис.3. Реальная и мнимая части (а) и абсолютное значение (б) коэффициентов  $\alpha(n)$ .

#### 4. Результаты расчета: особенности поля на выходе из канала в открытое пространство

Полученная система уравнений (42) решалась численно. Была выбрана большая по модулю вещественная часть диэлектрической проницаемости и малая диссипация ( $\varepsilon = -10.0 + 0.1i$ ) и задано, что ширина канала  $2a = 0.8\lambda$ , т. е.  $W = 0.8\pi$  ( $\lambda$  – длина волны излучения). Расчеты проводились при условии  $\alpha_{\text{inc}} = 1$ . Для расчетов бралась усеченная система уравнений. Были опробованы варианты с различным числом неизвестных  $\alpha_n$  (и соответствующим числом уравнений), максимальное значение  $n = 96$ . Относительные различия значений  $\alpha_n$ , полученных при решении систем из 48 и 96 уравнений, не превышали 0.01. На рис.3 приведены зависимости вещественной и мнимой частей и абсолютного значения коэффициентов  $\alpha_n$  от номера  $n$ . Можно убедиться, что модули коэффициентов  $\alpha_n$  убывают с номером  $n$  по закону  $1/n$ . Строго говоря, точность выполнения этого закона требует дополнительного исследования. Возможно, при повышении точности решения системы уравнений (42) этот закон изменится; мы допускаем, что будет получен асимптотический закон вида  $\alpha_n \propto n^{-(1+\mu)}$ , где  $1 \gg \mu > 0$ . В настоящем рассмотрении мы будем считать  $\mu = 0$ . Обратим внимание на скачки фазы коэффициента  $\alpha_n$ , наблюдаемые для соседних номеров.

Полученные значения коэффициентов  $\alpha_n$  дают полную информацию о структуре полей в пространстве (формулы (23), (25), (26)). Поведение поля в дальней зоне определяется фурье-образом поля, который для каждой из мод дается формулой (39). При выбранных параметрах задачи имеется лишь один максимум в дальней зоне, со-

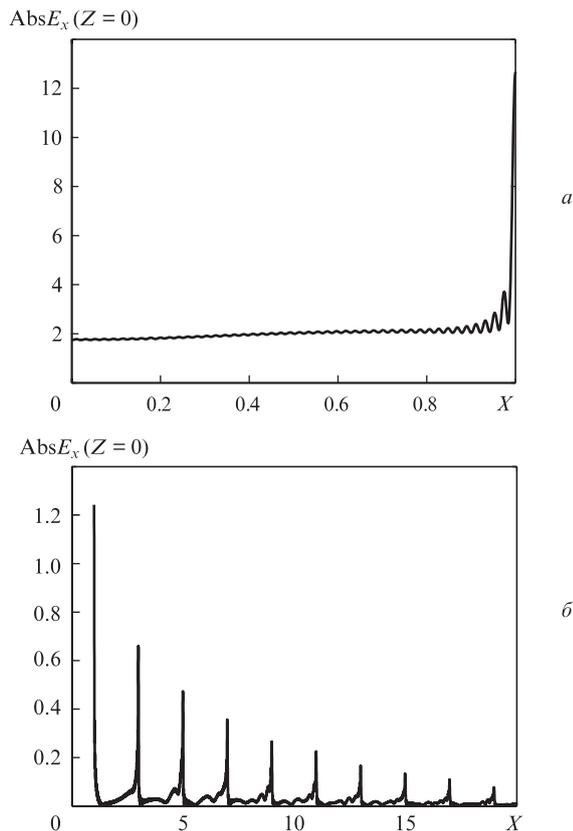


Рис.4. Компонента поля  $E_x$  в плоскости  $Z = 0$  на отрезке  $0 \leq X \leq 1$  (на выходной апертуре) (а) и при  $1 \leq X$  (б).

ответствующий нулевому углу. Его полуширина на полувысоте, как показывают численные оценки, составляет  $\sim 30^\circ$ . При рассмотрении каналов большей ширины, чем  $0.8\lambda$ , мы получали наряду с центральным также и боковые максимумы.

Более сложная структура наблюдается в ближней зоне. Рассмотрим поле в плоскости  $Z = 0$ . На рис.4 приведены зависимости модуля компоненты  $E_x$  от координаты  $X$ . При построении рисунков амплитуда падающей волны  $\alpha_{inc}$  выбиралась таким образом, чтобы соответствующая величина поля  $E_x$  для приходящей волны была единичной, т.е. чтобы выполнялось условие

$$\alpha_{inc} \frac{K_0}{W} = 1. \tag{43}$$

На рис.4 виден резкий всплеск амплитуды при  $X = \pm 1$ , т.е. на кромке выходного отверстия. Например, для модуля амплитуды  $E_x$  при  $X = 1, Z = 0$  вычисленное значение в 12 раз превышает амплитуду поля, приходящего к апертуре по каналу из бесконечности. Подчеркнем, что в точке  $X = 1$  амплитуда поля разрывна. При подходе к этой точке справа предельное значение амплитуды будет меньше указанного в  $|\epsilon|$  раз. Такой характер поведения амплитуд полей позволяет нам говорить о возникновении локализованных плазмонов в рассматриваемой системе. Если обратиться к области  $X > 1$ , то там можно увидеть последовательность резких максимумов в точках  $X = \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots$ . Интенсивность этих максимумов спадает по мере удаления точек от канала. Такая последовательность всплесков соответствует отражению волн от стенок канала.

Рассмотрим более подробно характер поведения полей в окрестности указанных особых точек. Для детального исследования здесь требуется учесть вклад мод с более высокими номерами ( $n \geq 96$ ). Однако определенные выводы можно сделать без дополнительных расчетов, используя найденную нами асимптотику коэффициентов.

### 5. Сингулярные точки в пространственной структуре поля

При построении зависимостей на рис.4 мы учли вклад волн с номерами  $n \leq 96$ . Как было отмечено выше, при высоких номерах мод для коэффициентов разложения магнитного поля имеет место зависимость  $\alpha_n \sim n^{-1}$ . Из этого следует, что коэффициенты в разложении  $x$ -компоненты электрического поля ( $E_x$ ) в асимптотике имеют постоянный модуль (см. формулы (11) и (18) для волновых векторов и (25) для поля). Заранее ясно, что наличие в разложении для поля величин, содержащих неубывающие коэффициенты, должно привести к неограниченным амплитудам поля в некоторых точках пространства. Для дальнейшего анализа особенностей структуры полей будет удобно использовать именно коэффициенты разложения поля  $E_x$ . Введем в рассмотрение вместо  $\alpha_n$  новые коэффициенты  $\beta_n$ ,

$$\beta_n = -\eta_n \frac{K_n}{W} \alpha_n. \tag{44}$$

Указанная выше зависимость  $|\alpha_n|$  от  $n$  и полученные в расчетах фазовые характеристики этих коэффициентов дают возможность представить значения  $\beta_n$  при  $n \gg 1$  в виде

$$\beta_n = -\beta_\infty (-1)^n. \tag{45}$$

Что касается входного значения  $\beta_{inc}$ , то, как и прежде (см. (43)), будем считать, что в исходной волне, приходящей в канал со стороны отрицательных  $Z$ , компонента  $E_x$  имеет единичную амплитуду,

$$\beta_{inc} \equiv \frac{K_0}{W} \alpha_{inc} = 1. \tag{46}$$

При этом значении  $\beta_{inc}$  расчеты давали  $\beta_\infty \approx 0.05 + 0.05i$ .

Перейдем к оценке поля, основанной на учете бесконечного набора коэффициентов  $\beta_n$ . Для краткости будем рассматривать только область  $|X| \leq 1, Z < 0$ . Преобразуем формулу (25), заменив в ней коэффициенты  $\alpha_n$  на  $\beta_n$  в соответствии с формулой (44) и используя выражения вида (21) для пространственной зависимости функций  $\psi_n$  при  $|X| \leq 1$ , а также разбив бесконечную сумму на две суммы. Получим

$$E_x(X, Z) = \sum_{n=0}^N [\delta_{n0} \exp(iK_n Z) + \beta_n \exp(-i\eta_n K_n Z)] \cos(Q_n X) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \beta_n \exp(-i\eta_n K_n Z) \cos(Q_n X). \tag{47}$$

Теперь перейдем к приближенным расчетам: заменим во второй сумме в формуле (47) величины  $\beta_n, Q_n$  и  $K_n = i\sqrt{Q_n^2 - W^2}$  их асимптотическими значениями. При этом точное равенство (47) заменится следующим приближенным выражением:

$$E_x(X, Z) = \Sigma_N^{(E_x)} + (\sigma_\infty^{(E_x)} - \sigma_N^{(E_x)}). \quad (48)$$

Здесь конечная сумма из (47) обозначена символом  $\Sigma_N^{(E_x)}$  (для нее не было сделано никаких приближений);

$$\sigma_\infty^{(E_x)} = \beta_\infty \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos[(\pi n + b)X] \exp[(\pi n + b)Z]; \quad (49)$$

$$\sigma_N^{(E_x)} = \beta_\infty \sum_{n=0}^N (-1)^n \cos[(\pi n + b)X] \exp[(\pi n + b)Z]. \quad (50)$$

Суммируя ряды, входящие в (49), с помощью [14] получаем

$$\begin{aligned} \sigma_\infty^{(E_x)} = & \beta_\infty \cos(bX) e^{bZ} \frac{e^{\pi Z} \cos(\pi X) + 1}{1 + 2e^{\pi Z} \cos(\pi X) + e^{2\pi Z}} \\ & + \beta_\infty \sin(bX) e^{bZ} \frac{e^{\pi Z} \sin(\pi X)}{1 + 2e^{\pi Z} \cos(\pi X) + e^{2\pi Z}}. \end{aligned} \quad (51)$$

Подчеркнем, что мы проводим расчеты для  $Z < 0$ , так что сходимость рядов в (49) обеспечена.

Рассмотрим окрестность точки  $Z = 0$ ,  $X = 1$ . Положим  $X = 1 - \xi$ ,  $Z = -\zeta$ , где  $\xi, \zeta$  положительны и  $\xi, \zeta \ll 1$ . При этом

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0, \zeta \ll \xi} \sigma_\infty^{(E_x)} = & \beta_\infty e^{bZ} \\ & \times \frac{1}{\pi} \left[ \cos(bX) \frac{\zeta}{\xi^2 + \zeta^2} - \sin(bX) \frac{\xi}{\xi^2 + \zeta^2} \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Используя представление дельта-функции через предел непрерывных функций (см. [15]) и учитывая, что ряд (49) применим только при  $|X| \leq 1$ , а при прочих  $X$  поле задается другим выражением, получаем следующий результат. При условии  $\zeta \ll \xi$ ,  $\xi \rightarrow 0$  формула (52) принимает вид

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0, \zeta \ll \xi} \sigma_\infty^{(E_x)} = & \beta_\infty e^{bZ} \\ & \times \left[ \frac{1}{2} \cos(bX) \delta(1 - X) - \sin(bX) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 - X} \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Выражение (53) даёт представление о поле  $E_x$  вблизи особой точки в том виде, который будет наблюдаться при приближении к этой точке по линии  $Z = 0$ .

Симметричные преобразования можно сделать для случая  $\xi \ll \zeta$ ,  $\zeta \rightarrow 0$ , что даст поле, которое должно наблюдаться при приближении к ребру по стенке канала. Таким образом, мы еще раз убеждаемся, что в точке  $X = 1$ ,  $Z = 0$  поле  $E_x$  имеет особенность.

С помощью аналогичных преобразований можно выделить сингулярные слагаемые в выражениях для полей  $H_y$  и  $E_z$ . Вид этих слагаемых показывает, что компонента  $E_z$  имеет особенности такого же типа, как и компонента  $E_x$ , а магнитное поле нарастает в окрестности точки  $X = 1$  более медленно, чем электрическое. Не будет содержать особенностей только векторный потенциал.

Приведенный результат следует сравнить с известными решениями задач электростатики [16, 17]. В [16] рассматривается поле вблизи ребра идеального металла, в [17] исследуется поле при наличии двух ребер, т. е. факти-

чески на выходе из канала, проходящего в идеальном металле. В [16, 17] показано, что в случае прямых углов между металлическими поверхностями электрическое поле нарастает с приближением к ребру как  $(\xi^2 + \zeta^2)^{-1/6}$ , а потенциал описывается зависимостью  $(\xi^2 + \zeta^2)^{1/3}$ , где величина  $(\xi^2 + \zeta^2)^{1/2}$  есть расстояние от точки наблюдения до ребра. Различие связано с тем, что в указанных задачах ставится условие убывания поля на бесконечности, а в нашем случае такого требования нет. Напротив, в нашей схеме есть волна, приходящая к ребру по каналу со стороны отрицательных значений  $z$ .

Мы рассмотрели особые точки в структуре поля в области  $|X| \leq 1$ . При анализе, относящемся к области  $|X| > 1$ , выявляется последовательность бесконечно интенсивных всплесков на границе металла с окружающей средой в точках  $X = \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots$  В реальных условиях этот эффект частично подавляется за счет скругленности ребер и шероховатости поверхности. При отклонении поверхности от идеальной нарушаются фазовые соотношения между пространственными гармониками, что приводит к размытию максимумов. Можно считать, что при неоднородности порядка  $\lambda/m$  будут конструктивно интерферировать только волны с волновыми векторами, меньшими  $m/\lambda$ , т. е. с номерами  $n < m\lambda$ . В этом случае для получения оценки величины поля следует учитывать вклад конечного числа гармоник с номерами, меньшими  $m\lambda$ . Наша оценка в разд.4, основанная на вычислении конечной суммы, соответствует случаю, когда масштаб неоднородности составляет  $\sim \lambda/100$ .

## 6. Заключение

Получены волновые числа для полей в планарном канале внутри реального металла. Для наиболее низких номеров мод (менее 96) волновые числа найдены с помощью численных расчетов, для высших – получены асимптотические формулы.

Дано теоретическое описание преобразования светового поля на выходе из канала в свободное пространство, включающего в себя отражение мод на выходной апертуре и их трансформацию в моды других номеров.

Для выбранных значений ширины канала, длины волны и диэлектрической проницаемости металла получены численные значения коэффициентов трансформации исходной низшей моды в отраженную низшую моду и в моды более высоких номеров.

Расчеты преобразования поля на апертуре выполнены на основе развитого в статье математического метода; существенно, что для применимости метода не требуется выполнения условия ортогональности собственных мод канала. (Подчеркнем, что при наличии поглощения ортогональность отсутствует.)

Обнаружены сингулярные точки в пространственной структуре поля на выходной плоскости, в которых амплитуда поля резко возрастает. Наиболее резкий рост амплитуды происходит на краях выходной апертуры, отвечающих точкам  $\pm 1$  в принятых здесь обозначениях. Такие особые точки имеют аналог в электростатике идеальных проводников. Существенно, что учет реальных диэлектрических характеристик металла не отменяет эффекта. При неидеальной форме металлических поверхностей эффект ослабевает, максимумы размываются, но не исчезают.

Поле на выходной поверхности металла содержит последовательность равноотстоящих ярких точек, интен-

сивность поля в которых убывает по мере удаления точки от выходной апертуры. Таким образом, можно говорить о возникновении локализованных плазмонов на поверхности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-02-00795-а).

Авторы благодарны В.С.Лебедеву, А.В.Масалову и А.Г.Витухновскому за обсуждение работы.

1. Raether H. *Surface Plasmons on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings* (Berlin: Springer-Verlag, 1988).
2. Otto A. *Z. Phys.*, **216**, 398 (1968).
3. Kretschmann E. *Z. Phys.*, **241**, 313 (1971).
4. Laluet J.-Y., de Leon-Perez F., Mauboub O., Hohenau A., Ditlbacher H., Garcia-Vidal F.J., Dintinger J., Ebbesen T.W., Martin-Moreno L., Krenn J.R. *Opt. Express*, **16**, 3420 (2008).
5. Baudrion A.-K., Drezet A., Genet C., Ebbesen T.W. *New J. Phys.*, **10**, 105014 (2008).
6. Kihm H.W., Lee K.G., Kim D.S., Ahn K.J. *Opt. Commun.*, **282**, 2442 (2009).
7. Ebbesen T.W., Lezec H.J., Graemi H.F., Thio T., Wolff P.A. *Nature (Ldn)*, **391**, 667 (1998).
8. Dai W., Soukoulis C.M. *Phys. Rev. B*, **80** (15), 155407 (2009).
9. Nikitin A.Yu., Rodrigo S.G., Garcia-Vidal F.J., Martin-Moreno L. *New J. Phys.*, **11**, 123020 (2009).
10. Nikitin A.Yu., Garcia-Vidal F.J., Martin-Moreno L. *Phys. Stat. Sol. RRL*, **4** (10), 250 (2010).
11. Адамс М. *Введение в теорию оптических волноводов* (М.: Мир 1984).
12. Kuznetsova T.I., Lebedev V.S. *Phys. Rev. B*, **70**, 035107 (2004).
13. Kuznetsova T.I., Lebedev V.S. *Phys. Rev. E*, **78**, 016607 (2008).
14. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды* (М.: Наука, 1981, т. 1, с.739).
15. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (М.: Наука 1970).
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика* (М.: Наука 1982, т. VIII).
17. Смирнов В.И. *Курс высшей математики* (М.: Гостехиздат, 1953, т. III, ч. 2, гл. II).

## ПОПРАВКА

**А.С.Башкин, Л.В.Гуров, М.В.Курдюков.** Расчетное исследование возможности повышения энергетических характеристик автономного непрерывного химического DF-лазера при замене щелевой конфигурации сопловой решетки на зубчатую («Квантовая электроника», 2011, т. 41, №8, с. 697–702).

В статье на рис.2, с. 701, допущена ошибка. Размерность по оси  $x$  должна быть в миллиметрах, а не в сантиметрах, как на рисунке.