PACS 42.65.-k, 42.65.Wi, 42.65.Tg, 05.45.-a

Эллиптически поляризованные кноидальные волны в среде с пространственной дисперсией кубической нелинейности

В.А.Макаров, И.А.Пережогин, В.М.Петникова, Н.Н.Потравкин, В.В.Шувалов

Найдены новые частные аналитические решения системы нелинейных уравнений Шредингера, соответствующие эллиптически поляризованным кноидальным волнам в изотропной гиротропной среде с пространственной дисперсией кубической нелинейности и частотной дисперсией второго порядка при выполнении условий формирования волноводов единого профиля для каждой из циркулярно поляризованных компонент светового поля.

Ключевые слова: *кубическая нелинейность, пространственная дисперсия, нелинейные уравнения Шредингера, эллиптическая поляризация, кноидальные волны.*

Возможность возникновения эллиптически поляризованных кноидальных волн, ортогональные компоненты вектора напряженности электрического поля которых выражаются через эллиптические функции Якоби, широко обсуждается при решении различных задач нелинейной оптики (см., напр., [1–7]). Для изотропных оптически активных сред, обладающих локальной кубической нелинейностью, такая возможность обсуждалась в [7]. При этом, однако, не учитывалась нелокальная составляющая нелинейного оптического отклика, величина которой весьма значительна в гиротропных средах. Нелокальность существенно влияет на характер самофокусировки пучков [8, 9], компрессии импульсов [10, 11] и других режимов распространения [12] эллиптически поляризованного лазерного излучения в оптически активных средах. Именно благодаря нелокальности нелинейного отклика в средах с аномальной частотной дисперсией учет эффектов само- и кросс-модуляции в системе укороченных уравнений для медленно меняющихся амплитуд циркулярно поляризованных волн [8–12], имеющей форму системы нелинейных уравнений Шредингера (НУШ), приводит к появлению решений в виде эллиптически поляризованных уединенных волн [12]. В то же время вопрос о существовании периодических аналитических решений этой системы, т. е. эллиптически поляризованных кноидальных волн, практически не исследован. В первую очередь это связано с неинтегрируемостью системы НУШ, описывающей нелинейное распространение волн в средах с пространственной дисперсией кубической нелинейности [13].

В настоящей работе представлены найденные впервые частные решения системы НУШ, описывающей распространение лазерного излучения в изотропной среде с пространственной дисперсией кубической нелинейности и частотной дисперсией второго порядка, имеющие вид эллиптически поляризованных кноидальных волн, амплитуды двух циркулярно поляризованных компонент $A_\pm(z,t) = A_x \pm \mathrm{i}A_y$ которых связаны некоторым соотношением. Обсуждается физический смысл этого соотношения, а также приведены зависимости интенсивности $I(z,t) = (|A_+|^2 + |A_-|^2)/2$ кноидальных волн этого типа, степени эллиптичности $M(z,t) = (|A_+|^2 - |A_-|^2)/(2I)$ и угла поворота $\Psi(z,t) = 0.5\arg(A_+A_-^*)$ главной оси эллипса поляризации от продольной координаты z и времени t в собственной (бегущей) системе координат. Определены условия существования найденных решений.

В отсутствие дифракции самовоздействие лазерного излучения в нелинейной изотропной гиротропной среде с пространственной дисперсией кубической нелинейности и частотной дисперсией второго порядка описывается следующей системой НУШ [9–12]:

$$\frac{\partial A_\pm}{\partial z} - \frac{\mathrm{i}k_2}{2}\frac{\partial^2 A_\pm}{\partial t^2} + \mathrm{i}\Big[\mp\rho_0 + \Big(\frac{\sigma_1}{2}\mp\rho_1\Big)|A_\pm|^2$$
$$+\Big(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\Big)|A_\mp|^2\Big]A_\pm = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\sigma_{1,2} = 2\pi\omega^2\chi_{1,2}/(kc^2)$; $k_2 = \mathrm{d}^2k/\mathrm{d}\omega^2$ – константа, характеризующая частотную дисперсию среды; $\rho_{0,1} = 2\pi\omega^2\gamma_{0,1}/c^2$; $\chi_1 = 2\chi^{(3)}_{xyxy}$; $\chi_2 = \chi^{(3)}_{xxyy}$. В выписанных соотношениях $\hat{\chi}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega)$ – симметричный по перестановке двух последних индексов тензор локальной кубической нелинейности. Псевдоскалярные константы линейной и нелинейной гирации γ_0 и γ_1 определяют отличные от нуля компоненты тензоров нелокальных линейных и нелинейных оптических восприимчивостей соответственно.

Поскольку в общем случае система (1) является неинтегрируемой, наложим на искомые решения дополнительное ограничение в виде интеграла второго порядка, т. е. линейной связи между интенсивностями двух циркулярно поляризованных компонент распространяющейся волны:

$$\delta_+|A_+(z,t)|^2 + \delta_-|A_-(z,t)|^2 = \delta_0, \qquad (2)$$

где константы $\delta_{0,\pm}$ подлежат дальнейшему определению. Подчеркнем, что при выполнении условия (2) выражения

В.А.Макаров, И.А.Пережогин, В.М.Петникова, Н.Н.Потравкин, В.В.Шувалов. Физический факультет и Международный лазерный центр Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы;
e-mail: vamakarov@phys.msu.ru, vsh@vsh.phys.msu.su

Поступила в редакцию 6 декабря 2011 г.

в квадратных скобках в (1) также оказываются линейно связанными. Фактически они описывают изменение показателя преломления среды за счет локальной и нелокальной кубической нелинейности. Поэтому при распространении волн, описываемых искомыми решениями, в среде за счет нелинейности для каждой из компонент $A_{\pm}(z,t)$ будут формироваться однотипные нелинейные волноводы, профили которых различаются лишь масштабными коэффициентами.

Воспользуемся далее стандартной процедурой разделения переменных, считая $A_{\pm}(z,t) = R_{\pm}(t)\exp(\mathrm{i}z\kappa_{\pm})$. Подчеркнем, что фазы циркулярно поляризованных компонент поля линейно растут с ростом координаты z, а амплитуды $R_{\pm}(t)$ являются действительными и зависят только от времени. Благодаря соотношению (2) константы $\kappa_{\pm}$ становятся собственными значениями непосредственно следующих из (1) двух независимых уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}^2R_{\pm}}{\mathrm{d}t^2} - \frac{2}{k_2}\left[(\kappa_{\pm} \mp \rho_0 + \delta_0\delta_{\mp}^{-1}) + \left(\frac{\sigma_1}{2} \mp \rho_1 - \frac{\delta_{\pm}}{\delta_{\mp}}\right)R_{\pm}^2\right]R_{\pm} = 0. \quad (3)$$

Все возможные действительные периодические решения двух полученных обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть выражены через эллиптические функции Якоби [2, 14]: $\mathrm{sn}(vt,\mu)$, $\mathrm{cn}(vt,\mu)$ и $\mathrm{dn}(vt,\mu)$, где v – произвольный действительный масштабный коэффициент, а μ – модуль эллиптической функции. Соотношения между эллиптическими функциями [15] позволяют выразить $\delta_{0,\pm}$ через шесть величин: $\kappa_{\pm}$, v, μ и максимальные значения $R_{\pm}$. Две из них остаются свободными параметрами задачи (3). В качестве последних удобно выбрать v и μ, т. к. именно квадрат эллиптической функции Якоби определяет профиль нелинейного волновода для каждой из циркулярно поляризованных волн. Заметим, что аналогичная ситуация имела место для устойчивых ортогонально поляризованных многокомпонентных кноидальных волн в фоторефрактивных средах [3]. Все возможные парные комбинации эллиптических функций образуют семейство физически различных частных решений задачи (1)–(3) в виде девяти кноидальных волн. Для удобства будем обозначать их первыми буквами входящих в выражения для $A_+(z, t)$ и $A_-(z, t)$ эллиптических функций Якоби, т. е. ss, cc, dd, sc, cs, sd, ds, cd и dc.

Решения sc, cs, sd и ds оказываются возможными при выполнении неравенств $\rho_1 > 0$, $k_2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) < 0$ и $-\rho_1 < \sigma_2 < \rho_1$ или неравенств $\rho_1 < 0$, $k_2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) > 0$ и $\rho_1 < \sigma_2 < -\rho_1$. Если параметры нелинейной гиротропной среды удовлетворяют условиям $\sigma_2 > 0$, $-\sigma_2 < \rho_1 < \sigma_2$ и $k_2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) > 0$ или условиям $\sigma_2 < 0$, $\sigma_2 < \rho_1 < -\sigma_2$, $k_2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) < 0$, то реализуется решение ss. Наконец, решения cd, dc, cc и dd возможны, если справедливы неравенства $\sigma_2 > 0$, $k_2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) < 0$ и $-\sigma_2 < \rho_1 < \sigma_2$ или неравенства $\sigma_2 < 0$, $k_2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) > 0$ и $\sigma_2 < \rho_1 < -\sigma_2$.

В оптическом диапазоне частот размер области проявления нелокальности оптического отклика существенно меньше длины волны и $|\rho_1| \ll |\sigma_{1,2}|$. Поэтому решения sc, sd, cs и ds не могут быть реализованы. Ниже приведены выражения для компонент $A_{\pm}(z,t)$, соответствующие физически реализуемым в случае гиротропных сред решениям задачи (1), (2), а также для отвечающих этим решениям интенсивностей распространяющихся кноидальных волн, степеней эллиптичности их эллипсов поляризации и углов поворота главных осей этих эллипсов. Для решений типа cd и dc имеем:

$$A_{\pm}(z,t) = \left\{\mu v\left[-\frac{k_2(\sigma_2 \mp \rho_1)}{\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}\right]^{1/2}\right\}\mathrm{cn}(vt,\mu)\exp\left[\pm \mathrm{i}z\rho_0\right.$$
$$\left. + \mathrm{i}zv^2k_2\frac{\mu^2(\sigma_2 \mp \rho_1)(\sigma_1 \mp 2\rho_1) - (\rho_1^2 - \sigma_2^2 \mp \rho_1\sigma_1 \mp 2\rho_1\sigma_2)}{2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}\right], \quad (4)$$

$$A_{\mp}(z,t) = \left\{v\left[-\frac{k_2(\sigma_2 \mp \rho_1)}{\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}\right]^{1/2}\right\}\mathrm{dn}(vt,\mu)\exp\left[\mp \mathrm{i}z\rho_0 + \mathrm{i}zv^2\right.$$
$$\left.\times k_2\frac{(\sigma_2 \pm \rho_1)(\sigma_1 \pm 2\rho_1) - \mu^2(\rho_1^2 - \sigma_2^2 \pm \rho_1\sigma_1 \pm 2\rho_1\sigma_2)}{2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}\right], \quad (5)$$

$$I(t) = -v^2k_2\frac{(\sigma_2 \pm \rho_1)(1-\mu^2) + 2\mu^2\sigma_2\mathrm{cn}^2(vt,\mu)}{2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}, \quad (6)$$

$$M(t) = \mp\frac{(\sigma_2 \pm \rho_1)(1-\mu^2) \pm 2\mu^2\rho_1\mathrm{cn}^2(vt,\mu)}{(\sigma_2 \pm \rho_1)(1-\mu^2) + 2\mu^2\sigma_2\mathrm{cn}^2(vt,\mu)}, \quad (7)$$

$$\Psi(t) = z\left[\rho_0 \pm v^2k_2\frac{(3\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)(\mu^2 - 1)}{4(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}\right]. \quad (8)$$

В формулах (4)–(8) верхний знак соответствует решению cd, нижний – dc. Отметим, что линейная зависимость Ψ от координаты z содержит как линейные, так и нелинейные характеристики среды.

Решения задачи (1), (2) трех оставшихся типов (ss, cc и dd) вырождены, т. е. содержат в выражениях для $A_+(z, t)$ и $A_-(z, t)$ одинаковые эллиптические функции

$$A_{\pm}(z,t) = \frac{\mu v[k_2(\sigma_2 \mp \rho_1)]^{1/2}}{(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)^{1/2}}\mathrm{sn}(vt,\mu)$$
$$\times\exp\left\{\mathrm{i}z\left[\pm\rho_0 - \frac{k_2v^2(\mu^2+1)}{2}\right]\right\}, \quad (9)$$

$$A_{\pm}(z,t) = \frac{\mu v[-k_2(\sigma_2 \mp \rho_1)]^{1/2}}{(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)^{1/2}}\mathrm{cn}(vt,\mu)$$
$$\times\exp\left\{\mathrm{i}z\left[\pm\rho_0 + \frac{k_2v^2(2\mu^2-1)}{2}\right]\right\}, \quad (10)$$

$$A_{\pm}(z,t) = \frac{v[-k_2(\sigma_2 \mp \rho_1)]^{1/2}}{(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)^{1/2}}\mathrm{dn}(vt,\mu)$$
$$\times\exp\left\{\mathrm{i}z\left[\pm\rho_0 + \frac{k_2v^2(2-\mu^2)}{2}\right]\right\}. \quad (11)$$

Для каждого из этих решений степень эллиптичности постоянна: $M(t) = -\rho_1/\sigma_2$, а угол поворота главной оси эллипса поляризации линейно зависит от координаты z и коэффициента линейной гирации: $\Psi(z) = \rho_0 z$. Зависимости интенсивностей кноидальных волн, отвечающих решениям (9)–(11), от времени получаются последовательной подстановкой в общее выражение $-\mu^2v^2k_2\sigma_2F/(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$ функций $-\mathrm{sn}^2(vt,\mu)$, $\mathrm{cn}^2(vt,\mu)$ и $\mathrm{dn}^2(vt,\mu)/\mu^2$ вместо F.

В заключение отметим, что нам не удалось найти в литературе упоминаний о том, что условие формирования в среде однотипных для двух компонент поля нелинейных волноводов (т. е. волноводов, профили которых различаются лишь масштабными коэффициентами) эквивалентно введению линейной связи между интенсивностями этих компонент (т. е. интегралу второго порядка). Полученные нами новые типы частных периодических решений системы НУШ, по-видимому, представляют интерес не только для прикладных задач волоконной оптики и оптики сред с пространственной дисперсией кубической нелинейности, но и для решения достаточно широкого класса задач из других областей физики [16]. Все приведенные нами частные периодические решения имеют в пределе $\mu = 1$ солитонные асимптотики. При этом решения cd, dc, cc и dd превращаются в пару «светлых» солитонов, а решения ss – в пару «темных» солитонов, которые совпадают с полученными в [12] уединенными решениями. Это является прямым следствием того, что рассмотренная в [12] линейная связь между амплитудами волн при $\mu = 1$ эквивалентна использованному нами условию (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-02-00653-а).

1. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. *Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки* (М.: Физматлит, 2003).
2. Petnikova V.M., Shuvalov V.V., Vysloukh V.A. *Phys. Rev. E*, **60**, 1009 (1999).
3. Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Phys. Rev. E*, **79**, 026605 (2009).
4. Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **39**, 1137 (2009).
5. Akhmediev N., Buryak A., Soto-Crespo J.M. *Opt. Commun*., **112**, 278 (1994).
6. Akhmediev N., Buryak A., Soto-Crespo J.M., Andersen D.R. *J. Opt. Soc. Am. B*, **12**, 434 (1995).
7. Akhmediev N.N., Ostrovskaya E.A. *Opt. Commun*., **132**, 190 (1996).
8. Голубков А.А., Макаров В.А. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **31**, 1042 (1988).
9. Голубков А.А., Макаров В.А., Пережогин И.А. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика и астрономия*, № 1, 52 (2009).
10. Голубков А.А., Макаров В.А., Рахматуллина И.Г. *Квантовая электроника*, **19**, 1195 (1992).
11. Makarov V.A., Perezhogin I.A., Potravkin N.N. *Laser Phys*., **19**, 322 (2009).
12. Макаров В.А., Петров К.П. *Квантовая электроника*, **20**, 1011 (1993).
13. Christiansen P.L., Eilbeck J.C., Enolskii V.Z., Kostov N.A. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **456**, 2263 (2000).
14. Davydov A.S. *Solitons in Molecular Systems* (The Netherlands, Dordrecht: Reidel, 1985).
15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971).
16. Инфельд Э., Роуландс Дж. *Нелинейные волны, солитоны и хаос* (М.: Физматлит, 2005).