

Элементарные процессы вынужденного излучения

П.В.Елютин

Рассматривается простейший процесс вынужденного излучения – эволюция двухуровневого возбужденного атома, взаимодействующего с квантованным электромагнитным полем, которое в начальном состоянии содержит один фотон, при различных граничных условиях, наложенных на поле. Исследуется кинетика эволюции, спектральный и модовый составы возникающего в таких процессах поля излучения. Показано, что это поле в общем случае лишь отчасти состоит из двукратно заполненных мод.

Ключевые слова: двухуровневый атом, фотон, спонтанное излучение, вынужденное излучение, резонатор, затухание, тождественность фотонов.

1. Введение

Начнем с энциклопедического определения: «Вынужденное излучение, индуцированное излучение, испускание электромагнитного излучения квантовыми системами под действием падающего на них излучения. Фотоны, испускаемые при В. и., совпадают по частоте, направлению распространения и поляризации с фотонами, вынуждающими их испускание» [1]. В общепринятом толковании вынужденное излучение возникает при взаимодействии падающего излучения с квантовыми системами в возбужденных состояниях (эти системы мы в дальнейшем будем считать имеющими дискретный энергетический спектр и называть атомами).

Утверждение второй фразы цитаты можно назвать центральной догмой квантовой электроники. Она широко известна – ее можно найти и в Нобелевских лекциях (1964 г.) основателей квантовой электроники – Ч.Х.Таунса [2, р. 60], Н.Г.Басова [2, р. 93], А.М.Прохорова [2, р. 110], и в современных on-line энциклопедиях [3, 4], и в популярных учебниках [5–7].

Теоретическим обоснованием центральной догмы принято считать результаты Дирака, содержащиеся в его работе [8], в которой построена общепринятая донные гамильтонова схема описания взаимодействия атомов с квантованным электромагнитным полем. Частной целью работы [8] был вывод выражений для коэффициентов Эйнштейна A и B из модели, в которой электромагнитное поле было квантованным, т.е. решение той же, что и у Эйнштейна в работах [9–11], задачи о кинетике распределения вероятностей по стационарным состояниям атома под действием заданного широкополосного электромагнитного поля (задача Эйнштейна – Дирака).

П.В.Елютин. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119992 Москва, Воробьевы горы; e-mail: pvelyutin@mtu-net.ru

Поступила в редакцию 16 декабря 2011 г., после доработки – 13 января 2012 г.

Благодаря свойству матричных элементов оператора рождения фотона

$$\hat{a}^+ |N\rangle = \sqrt{N+1} |N+1\rangle, \quad (1)$$

в первом порядке теории возмущений скорость перехода \dot{W} из верхнего по энергии состояния в нижнее возрастает по сравнению с той же скоростью в отсутствие поля \dot{W}_0 ,

$$\dot{W} = (\bar{N} + 1) \dot{W}_0, \quad (2)$$

где \bar{N} – среднее число квантов в резонансных с переходом модах поля. Уравнение (2) совпадает с уравнением Эйнштейна $dW = (A + B\rho)dt$ (ρ – спектральная плотность излучения на частоте перехода). Приращение скорости перехода целиком вызвано процессами, при которых возникают моды поля, заполнение которых превышает единицу. Поскольку фотоны одной моды по построению тождественны, можно сделать следующий вывод: увеличение скорости переходов из возбужденного состояния под действием внешнего поля связано с испусканием фотонов, тождественных присутствовавшим в начальном состоянии поля.

Такой вывод правилен в рамках поставленной задачи Эйнштейна – Дирака об эволюции атома (вообще – системы с дискретным спектром) под действием широкополосного внешнего поля, у которого спектральная плотность непрерывна и мало меняется на интервалах порядка естественной ширины линии. Следует, однако, помнить, что при выводе формулы (2) суммирование по модам поля заменяется интегрированием, а из-под знака интеграла выносится предполагаемая постоянной величина $\bar{N}(\omega)$ ([8]; см. также [12, §29]). Таким образом, задача Эйнштейна – Дирака описывает не элементарный процесс взаимодействия одиночного фотона с атомом, а более сложный процесс, происходящий в присутствии многих фотонов с разными частотами.

Под элементарным процессом вынужденного излучения мы будем понимать эволюцию атома, взаимодействующего с квантованным электромагнитным полем, из начального состояния, в котором атом возбужден, а поле

находится в состоянии с одним фотоном в одной из мод поля. Целью настоящей работы является рассмотрение кинетики и спектральных свойств излучения таких процессов при различных граничных условиях, наложенных на электромагнитное поле.

Будем рассматривать системы с гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_f + \hat{V}, \quad (3)$$

где \hat{H}_a – гамильтониан двухуровневого атома;

$$\hat{H}_f = \sum_{\mu} \hbar\omega_{\mu} \hat{a}_{\mu}^{\dagger} \hat{a}_{\mu} \quad (4)$$

– гамильтониан квантованного электромагнитного поля; индекс μ нумерует моды электромагнитного поля; ω_{μ} – частота моды μ ; \hat{a}_{μ}^{\dagger} и \hat{a}_{μ} – операторы рождения и уничтожения фотонов в моде μ . Оператор взаимодействия, следуя [13, с. 261], возьмем в дипольном приближении:

$$\hat{V} = \sum_{\mu} (\hat{v}_{\mu} + \hat{v}_{\mu}^{\dagger}). \quad (5)$$

Здесь

$$\hat{v}_{\mu} = -i \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{\mu}}{\mathcal{V}}} \hat{\mathbf{d}} \hat{a}_{\mu}^{\dagger} \mathbf{E}_{\mu}(\mathbf{r}); \quad (6)$$

\mathcal{V} – объем области, содержащей электромагнитное поле; $\hat{\mathbf{d}}$ – оператор дипольного момента; $\mathbf{E}_{\mu}(\mathbf{r})$ – распределение напряженности электрического поля в моде μ , нормированное условием

$$\int |\mathbf{E}_{\mu}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = \mathcal{V}. \quad (7)$$

2. Элементарный процесс вынужденного излучения в резонаторе (одномодовый случай, нет затухания)

Пусть атом взаимодействует с одной модой поля резонатора. В этом случае тождественность всех фотонов обеспечена по построению, но вопрос о кинетике вынужденного излучения остается. В отсутствие затухания поля такая модель была рассмотрена Джейнсом и Каммингсом [14]. Гамильтониан (3) запишем в традиционном виде с использованием приближения вращающегося поля:

$$\hat{H}_{JC} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\omega \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + i\hbar \frac{\Omega}{2} (\hat{\sigma}_+ \hat{a} - \hat{a}^{\dagger} \hat{\sigma}_-), \quad (8)$$

где $\hat{\sigma}_i$ – матрицы Паули ($\hat{\sigma}_{\pm} = (\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)/2$). Для упрощения формул мы ограничимся случаем точного резонанса, в котором частоты атомного перехода ω_0 и фотона единственной моды ω совпадают. Вакуумная частота Раби

$$\Omega = 2\zeta \sqrt{\frac{2\pi\omega}{\hbar\mathcal{V}}} d, \quad (9)$$

где d – модуль матричного элемента компоненты дипольного момента перехода, а ζ – безразмерный геометрический фактор, зависящий от формы резонатора, типа моды и положения атома в резонаторе. Например, для основной ТМ моды цилиндрического резонатора и атома в пучности поля (на оси резонатора) $\zeta = 1.926$ [14].

Если в начальном состоянии поле находится в N -фотонном состоянии, то модель становится двухуровневой системой с вектором состояния $|\Psi\rangle = K|+, N\rangle + L|-, N+1\rangle$ (в базисном состоянии $|+, N\rangle$ атом в верхнем состоянии, в моде N фотонов, а в базисном состоянии $|-, N+1\rangle$ атом в нижнем состоянии, в моде $N+1$ фотон). Уравнения движения для амплитуд имеют вид

$$\frac{dK}{dt} = \sqrt{N+1} \frac{\Omega}{2} L, \quad \frac{dL}{dt} = -\sqrt{N+1} \frac{\Omega}{2} K. \quad (10)$$

Решения системы (10) описывают происходящий с N -фотонной частотой Раби $\tilde{\Omega} = \sqrt{N+1}\Omega$ обмен энергией между атомом и полем. При начальных условиях $K(0) = 1$, $L(0) = 0$ вероятность нахождения атома в верхнем состоянии

$$W_+(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos\sqrt{N+1}\Omega t). \quad (11)$$

Рассмотрим для примера молекулу аммиака (частота перехода $\omega_0 = 1.50 \times 10^{11} \text{ с}^{-1}$, матричный элемент дипольного момента $d = 1.47 \times 10^{-18}$ ед. СГС) в настроенном на частоту основной моды ω_0 цилиндрическом резонаторе длиной $L = 10$ см. Тогда для вакуумной частоты Раби из (9) получаем $\Omega = 62.8 \text{ с}^{-1}$. Эту величину интересно сравнить со скоростью Γ_s спонтанного радиационного перехода в свободной молекуле; при выбранных значениях параметров

$$\Gamma_s = \frac{4d^2\omega_0^3}{3\hbar c^3} = 3.41 \times 10^{-7} \text{ с}^{-1}. \quad (12)$$

Наличие резонатора, настроенного на частоту перехода, в нашем примере увеличивает скорость передачи энергии от атома к полю приблизительно в 10^8 раз.

3. Элементарный процесс вынужденного излучения в резонаторе (одномодовый случай, есть затухание)

Резонаторы первых мазеров имели добротности Q от 1000 [15] до 12000 [16]. Приняв большее значение, в условиях нашего примера получим скорость затухания поля

$$\kappa = \frac{\omega}{2Q} = 6.25 \times 10^6 \text{ с}^{-1} \approx 10^5 \Omega, \quad (13)$$

т. е. в этом случае «атом» (молекула аммиака) в резонаторе есть сильно демпфированная система, и модель Джейнса–Каммингса (8) для нее неприменима даже приближенно.

Прогресс экспериментальной техники и методики (применение высокодобротных сверхпроводящих резонаторов, использование ридберговских атомов с большим дипольным матричным элементом перехода и т. п.) давно уже позволил достичь области малого демпфирования $\kappa \ll \Omega$. Впервые это было сделано в СВЧ диапазоне Вальтером с соавторами ($\kappa = 0.18\Omega$ [17]), а в оптическом диапазоне – Кимблом ($\kappa = 0.14\Omega$ [18]). Поэтому представляет интерес исследование влияния затухания на кинетику вынужденного излучения в резонаторе в широком диапазоне значений отношения $\eta = \kappa/\Omega$.

Динамика двухуровневого атома, связанного с одной модой квантованного электромагнитного поля в резона-

торе с затуханием, была впервые исследована Сачдевом [19]. В основе модели лежит уравнение для матрицы плотности системы

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{\text{JC}}, \hat{\rho}] - \kappa (\hat{a}^+ \hat{a} \hat{\rho} - 2\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^+ + \hat{\rho} \hat{a}^+ \hat{a}). \quad (14)$$

Здесь и далее мы ограничиваемся случаем нулевой температуры резонатора. Вместо рассмотрения уравнений для элементов матрицы плотности можно построить систему уравнений для моментов

$$A_p = \langle (\hat{a}^+)^p \hat{a}^p \rangle, \quad p \geq 0, \quad A_0 = 1, \quad (15)$$

$$B_p = \frac{1}{2} \langle (\hat{a}^+)^p \hat{\sigma}_z \hat{a}^p \rangle, \quad p \geq 0, \quad B_0 = \frac{1}{2} \langle \hat{\sigma}_z \rangle, \quad (16)$$

$$C_p = \langle (\hat{a}^+)^p \hat{a}^{p-1} \hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+ (\hat{a}^+)^{p-1} \hat{a}^p \rangle, \quad p > 0. \quad (17)$$

Для спонтанного излучения ($N = 0$) эта система принимает вид

$$\frac{dB_0}{dt} = \frac{\Omega}{2} C_1, \quad \frac{dA_1}{dt} = -\frac{\Omega}{2} C_1 - 2\kappa A_1, \quad (18)$$

$$\frac{dB_1}{dt} = \frac{\Omega}{4} C_1 - 2\kappa B_1, \quad \frac{dC_1}{dt} = -\Omega B_0 - 2\Omega B_1 - \frac{\Omega}{2} - \kappa C_1$$

($A_p, B_p, C_p \equiv 0$ при $p \geq 2$). Система (18) допускает аналитическое решение [19], но оно громоздко, поэтому ограничимся асимптотиками для предельных случаев. В случае слабого демпфирования ($\kappa \ll \Omega$) вероятность нахождения атома в верхнем состоянии, $W_+ = B_0 + 1/2$, изменяется по закону

$$W_+(t) \approx \frac{e^{-\kappa t}}{2} (1 + \cos \Omega t), \quad (19)$$

т.е. совершает осцилляции Раби (11) с вакуумной частотой, затухающие со скоростью, вдвое меньшей, чем скорость затухания энергии поля без взаимодействия с атомом. Это легко интерпретировать: система в среднем только половину времени хранит энергию в затухающей моде поля. В противоположном случае большого демпфирования ($\kappa \gg \Omega$) населенность убывает по экспоненциальному закону

$$W_+(t) \approx \exp\left(-\frac{\Omega^2}{2\kappa} t\right). \quad (20)$$

Показатель экспоненты в (20) может быть представлен в виде

$$\frac{\Omega^2}{2\kappa} = \frac{4d^2 \omega^3}{3\hbar c^3} \frac{3\zeta^2 Q \lambda^3}{4\pi^2 \mathcal{V}} = \Gamma_s \frac{3\zeta^2 Q \lambda^3}{4\pi^2 \mathcal{V}}, \quad (21)$$

где $\lambda = 2\pi c/\omega$ – длина волны резонансного излучения. Этот результат был впервые получен Перселлом из феноменологической модели, в которой геометрический фактор имел универсальное значение $\zeta = 1$ [20].

Простейший случай вынужденного излучения ($N = 1$) описывается аналогичной (18) системой седьмого порядка:

$$\frac{dB_0}{dt} = \frac{\Omega}{2} C_1, \quad \frac{dA_1}{dt} = -\frac{\Omega}{2} C_1 - 2\kappa A_1,$$

$$\frac{dB_1}{dt} = \frac{\Omega}{4} C_1 - 2\kappa B_1 + \frac{\Omega}{2} C_2, \quad \frac{dC_1}{dt} = -\Omega B_0 - 2\Omega B_1 - \frac{\Omega}{2} - \kappa C_1, \quad (22)$$

$$\frac{dA_2}{dt} = -\Omega C_1 - 4\kappa A_2, \quad \frac{dB_2}{dt} = \frac{\Omega}{2} C_2 - 4\kappa B_2,$$

$$\frac{dC_2}{dt} = -2\Omega B_1 - 2\Omega B_2 - \Omega - 3\kappa C_2$$

($A_p, B_p, C_p \equiv 0$ при $p \geq 3$). Общее аналитическое решение системы (22) невозможно, однако она легко решается численно. На рис. 1 показаны зависимости вероятностей нахождения атома в возбужденном состоянии от времени для спонтанного ($N(0) = 0$) и простейшего вынужденного ($N(0) = 1$) случаев.

Определим эффективную скорость излучения Γ соотношением

$$\frac{1}{\Gamma} = \int_0^\infty W_+(t) dt. \quad (23)$$

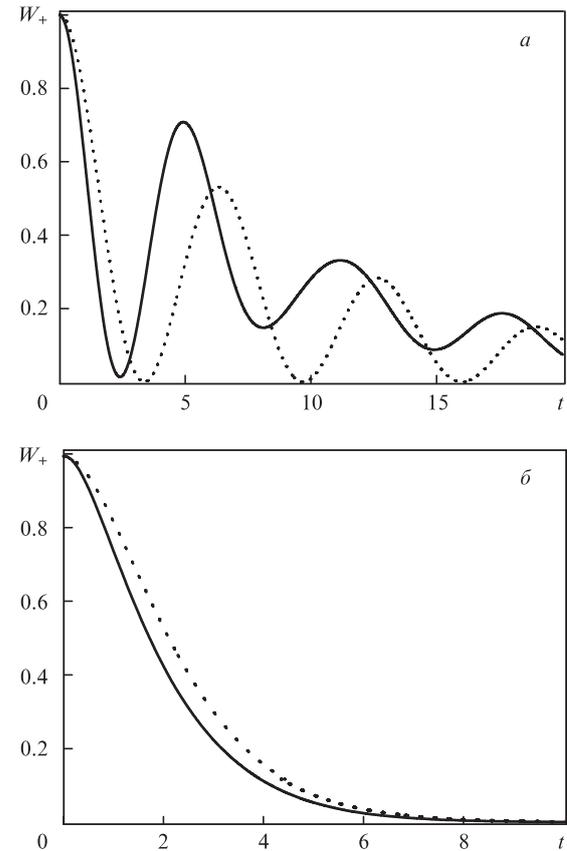


Рис. 1. Зависимости вероятностей W_+ пребывания изначально возбужденного двухуровневого атома, взаимодействующего с резонансной затухающей модой электромагнитного поля, в возбужденном состоянии от времени (в единицах Ω^{-1}) для случаев малого демпфирования $\kappa = 0.1 \Omega$ (а) и пограничного демпфирования $\kappa = \Omega$ (б). Пунктирные кривые – спонтанное излучение (начальное состояние поля $|0\rangle$), сплошные кривые – элементарное вынужденное излучение (начальное состояние поля $|1\rangle$).

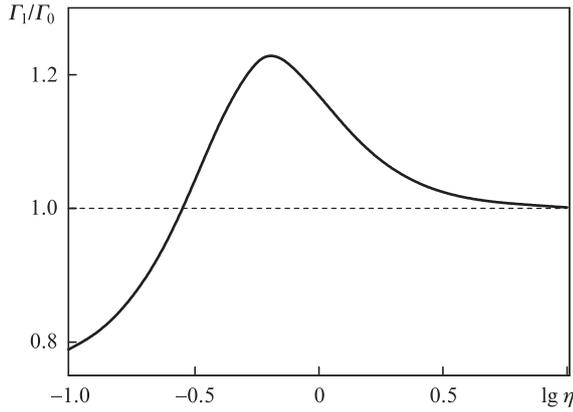


Рис.2. Зависимость отношения эффективных скоростей излучения элементарного вынужденного (Γ_1) и спонтанного (Γ_0) излучений двухуровневого атома, связанного с одной резонансной модой поля, от $\lg \eta = \lg(\kappa/\Omega)$.

Зависимость отношения эффективных скоростей простейшего вынужденного (Γ_1) и спонтанного (Γ_0) излучений от $\eta = \kappa/\Omega$ показана на рис.2.

Видно, что при малых затуханиях вынужденное излучение происходит медленнее спонтанного; при исчезающе малом затухании отношение Γ_1/Γ_0 стремится к 0.75. При $\eta > 0.28$ вынужденное излучение происходит быстрее спонтанного. Максимум отношения Γ_1/Γ_0 достигается при $\eta = 0.65$ и равен 1.23.

4. Элементарный процесс вынужденного излучения в резонаторе (двухмодовый случай, нет затухания)

Рассмотрим теперь задачу, в которой атом может взаимодействовать с двумя модами резонатора (без затухания). Пусть одна из них имеет частоту $\omega_1 = \omega_0$, равную частоте перехода, а вторая имеет небольшую расстройку, $\omega_2 = \omega_0 + \Delta$, $|\Delta| \ll \omega_0$. Мы будем называть их резонансной и нерезонансной модами соответственно, а вакуумные частоты Раби Ω для них будем считать одинаковыми. Тогда в приближении вращающегося поля систему можно считать находящейся в суперпозиции пяти близких по энергии состояний:

$$|\Psi\rangle = A|+10\rangle + B|+01\rangle + C|-20\rangle + D|-02\rangle + E|-11\rangle. \quad (24)$$

Система уравнений для амплитуд имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \sqrt{2} \frac{\Omega}{2} C + \frac{\Omega}{2} E e^{-i\Delta t}, & \frac{dB}{dt} &= \sqrt{2} \frac{\Omega}{2} D e^{-i\Delta t} + \frac{\Omega}{2} E, \\ \frac{dC}{dt} &= -\sqrt{2} \frac{\Omega}{2} A, & \frac{dD}{dt} &= -\sqrt{2} \frac{\Omega}{2} B e^{i\Delta t}, \\ \frac{dE}{dt} &= -\frac{\Omega}{2} A e^{i\Delta t} - \frac{\Omega}{2} B. \end{aligned} \quad (25)$$

Начальные условия, соответствующие простейшему процессу, таковы: $A(0) = 1$, а все остальные амплитуды в начальный момент равны нулю. В этой задаче мы будем рассматривать появление состояний с двумя фотонами

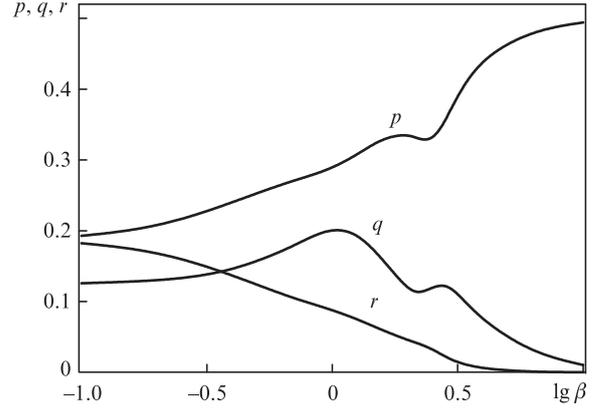


Рис.3. Зависимости средних вероятностей заселения мод от $\lg \beta = \lg(|2\Delta|/\Omega)$. Кривая p – два кванта в резонансной моде, q – по одному кванту в каждой из мод, r – два кванта в нерезонансной моде.

как процесс копирования начального фотона. Решение системы (25) имеет квазипериодический характер (определённое конечное состояние отсутствует), и наибольший интерес представляют средние по времени значения вероятностей. Управляющим параметром системы (25) является $\beta = |2\Delta|/\Omega$ – расстройка нерезонансной моды, отнесенная к половине вакуумной частоты Раби.

Введем обозначения $p = |C|^2$, $q = |E|^2$, $r = |D|^2$ для средних по времени вероятностей состояний, в которых поле содержит два фотона. Зависимости этих величин от логарифма параметра β показаны на рис.3.

При $\beta \rightarrow 0$, когда частоты мод сближаются, поле, состоящее из двух фотонов, в среднем с вероятностью $3/8$ содержит два фотона, идентичных начальному, с вероятностью $1/4$ – два фотона в разных модах и с вероятностью $3/8$ – два фотона в моде, отличной от начальной. Таким образом, если расстройка пренебрежимо мала, то средняя по времени вероятность Υ нахождения поля с двумя фотонами в состоянии с двукратно заполненной модой $\Upsilon(2) = 0.75$. С ростом β величина p , пропорциональная вероятности нахождения двух идентичных начальному фотонов, в основном возрастает, стремясь к предельному значению $1/2$, свойственному одномодовому случаю (см. (11)). Величина q при малых β возрастает, достигая максимума $\max q = 0.204$ при $\beta = 1.0$, а затем в основном убывает при $\beta \gg 1$ как $q \approx \beta^{-2}$. Величина $r(\beta)$ монотонно убывает: при больших расстройках $r \approx \beta^{-4}$. Интересно отметить небольшие нарушения монотонности $p(\beta)$ и $r(\beta)$ при $\beta \approx 2$.

В качестве меры частотного отклонения фотонов от начального значения можно взять среднюю частоту. Тогда относительная частотная погрешность копирования будет даваться выражением

$$\delta_\omega(\beta) = \frac{\Omega}{2\omega_0} F(\beta), \quad F(\beta) = \beta \frac{q + 2r}{p + r + q}. \quad (26)$$

График функции $F(\beta)$ показан на рис.4. Видно, что она достигает максимума, равного 0.97, при $\beta = 2.82$. Следовательно, при взаимодействии атома с двумя модами поля с близкими частотами в резонаторе частотная погрешность копирования фотона δ_ω может достигать $\sim \Omega/2\omega_0$. В условиях использованного выше примера $\delta_\omega = 2.09 \times 10^{-10}$. Заметим также, что поскольку рассмотренные моды могут иметь поля совершенно различной структуры, ника-

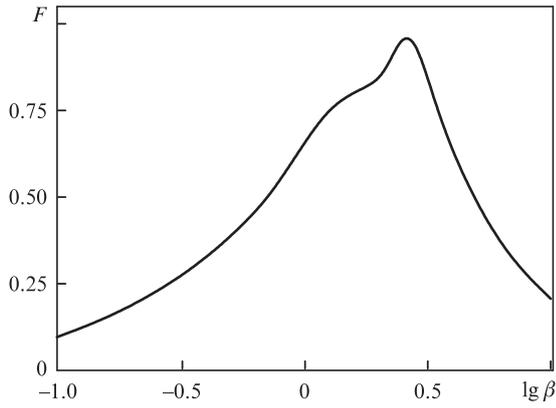


Рис.4. Зависимость функции F (26), пропорциональной частотной погрешности копирования δ_ω , от $\lg \beta = \lg(2\Delta/\Omega)$.

кой простой связи между распределениями поля в модах вынуждающего и вынужденного фотонов быть не может.

5. Элементарный процесс вынужденного излучения в свободном пространстве

Рассмотрим теперь процесс рассеяния фотона (мы будем называть его начальным и обозначим как $|1_0\rangle$, а его частоту как ω) на возбужденном атоме в свободном пространстве. Как обычно, мы будем считать поле находящимся в кубе с ребром L ($L^3 = \mathcal{V}$) и подчиненным периодическим граничным условиям на гранях куба, а в конце расчетов совершим предельный переход $\mathcal{V} \rightarrow \infty$. Для виртуального резонатора-куба распределение электрического поля $\mathbf{E}_\mu(\mathbf{r})$ будет даваться функцией $\mathbf{e}_\mu \exp(-i\mathbf{k}_\mu \mathbf{r})$, где \mathbf{e}_μ – единичный вектор поляризации моды μ , а \mathbf{k}_μ – ее волновой вектор, однако в рамках используемого нами дипольного приближения можно просто положить $\mathbf{E}_\mu(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\mu$.

В первом порядке теории возмущений процесс излучения возбужденным атомом одного фотона с частотой ω_1 в присутствии одного начального фотона с частотой ω описывается стандартным решением Вайскопфа – Вигнера [21] (см. также [22, §18]): динамическое взаимодействие падающего фотона и атома отсутствует, а комбинаторное взаимодействие увеличивает в $\sqrt{2}$ раз матричный элемент перехода только для одной моды. В пределе $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ этот матричный элемент становится бесконечно малым и не вносит изменений ни в кинетику перехода, которая остается экспоненциальной,

$$W_+(t) = \exp(-\Gamma_s t), \tag{27}$$

ни в спектральное распределение излучения, которое остается лоренцевским,

$$G(\omega_1) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega_1)^2 + \gamma^2} \tag{28}$$

(здесь $\gamma = \Gamma_s/2$ – половина скорости спонтанного излучения), и не зависит от частоты ω начального фотона.

Доступные наблюдению эффекты, в которых падающий фотон динамически взаимодействует с атомом, вызывая в нем переход, описываются третьим порядком теории возмущений. Поскольку для двухуровневого атома возможна только последовательность переходов $|+\rangle \rightarrow |-\rangle \rightarrow |+\rangle \rightarrow |-\rangle$, то в приближении вращающегося поля возможен только процесс, в котором атом испускает фотон в

моду μ в присутствии начального фотона, затем поглощает начальный фотон с частотой ω и, наконец, испускает второй фотон в моду ν . Процесс, в котором на втором переходе происходит поглощение только что испущенного фотона с частотой ω_μ , не будет зависеть от характеристик начального фотона; он описывает радиационную поправку к спонтанному излучению атома. В силу закона сохранения энергии частоты перехода и фотонов связаны соотношением

$$\omega_0 + \omega = \omega_\mu + \omega_\nu. \tag{29}$$

В дальнейшем нас будут интересовать только процессы с участием фотонов с частотами, близкими к резонансной ($|\omega_\mu - \omega_0| \ll \omega_0$), поэтому всюду, кроме резонансных знаменателей, мы будем считать частоты всех трех фотонов одинаковыми и равными ω_0 . С учетом конечности ширины линии составной матричный элемент третьего порядка имеет вид

$$\tilde{r}^{(3)} = i \left(\frac{2\pi\hbar\omega_0}{\mathcal{V}} \right)^{3/2} \sum_{\mu,\nu} \left[\frac{\langle -1_\mu 1_\nu | \hat{\mathbf{d}}_{\nu} \hat{\mathbf{a}}_{\nu}^+ | +1_\mu \rangle}{(\omega_0 - \omega + i\gamma)} \times \left[\frac{\langle +1_\mu | \hat{\mathbf{d}}_{\mu} \hat{\mathbf{a}}_{\mu}^+ | -1_0 1_\mu \rangle \langle -1_0 1_\mu | \hat{\mathbf{d}}_{\mu} \hat{\mathbf{a}}_{\mu}^+ | +1_0 \rangle}{(\omega_0 - \omega_\mu + i\gamma)} \right] \right]. \tag{30}$$

Скорость процесса перехода в элементарный интервал на энергетической поверхности постоянна во времени и дается формулой

$$d\dot{W} = \frac{2\pi}{\hbar} |\tilde{r}^{(3)}|^2 d\rho(E_k), \tag{31}$$

где $d\rho(E_k)$ – дифференциал плотности конечных состояний в элементарном интервале, отличных от энергии интегралов движения на энергетической поверхности [8].

Найдем спектральное сечение излученных в этом процессе фотонов, пропорциональное вероятности того, что частота одного из фотонов лежит в интервале $d\omega_1$ вблизи ω_1 :

$$d\sigma = \mathcal{V} \frac{d\dot{W}}{c}. \tag{32}$$

В зависимости от того, испускаются ли фотоны в заполненную моду или в пустые моды, дифференциал плотности конечных состояний имеет разный порядок по \mathcal{V} . Основной вклад вносят процессы, в которых фотоны испускаются в различные моды (μ и ν). Для них дифференциал плотности конечных состояний

$$d\rho = \mathcal{V} \frac{\omega_1^2}{\hbar(2\pi c^3)} d\Omega_1 \mathcal{V} \frac{\omega_2^2}{\hbar(2\pi c^3)} d\Omega_2 d(\hbar\omega_1). \tag{33}$$

Если квант моды μ испускается в моду начального фотона, то матричный элемент получает множитель $\sqrt{2}$, но суммирование по модам в (30) идет только по индексу конечного состояния моды ν ,

$$d\rho = \mathcal{V} \frac{\omega_1^2}{\hbar(2\pi c^3)} d\Omega_1, \tag{34}$$

и соответствующий вклад в скорость процесса при $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ становится исчезающе малым. Аналогично пренебрежи-

мо малыми оказываются и вклады от других случаев, в которых проявляется комбинаторное взаимодействие. Таким образом, неисчезающий вклад в спектральное сечение простейшего процесса излучения при рассеянии фотона на возбужденном атоме при $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ дают статистически подавляющие случаи, в которых оба фотона испускаются в незаполненные моды.

Спектральное сечение нетрудно привести к выражению вида

$$\frac{d\sigma}{d\omega_1} = \frac{16}{9} \frac{d^6 \omega_0^7}{\hbar^3 c^7} G(\omega_0, \omega, \omega_1, \gamma), \quad (35)$$

где функция G может быть представлена в виде отношения однородных полиномов четвертой и восьмой степеней от аргументов, имеющих характер частоты:

$$G(\omega_0, \omega, \omega_1, \gamma) = \frac{P_4(\omega_0, \omega, \omega_1, \gamma)}{P_8(\omega_0, \omega, \omega_1, \gamma)}. \quad (36)$$

Выражение для G в общем случае очень громоздко, и мы его не приводим. При точном резонансе ($\omega = \omega_0$) функция G имеет простой вид:

$$G(\omega_0, \omega_0, \omega_1, \gamma) = \left(\frac{2}{\Delta^2 + \gamma^2} \right)^2, \quad (37)$$

где $\Delta = \omega_1 - \omega_0$ – расстройка частот перехода и одного из излученных фотонов. Ширина этой линии излучения близка к естественной, но форма несколько иная (рис.5). Для лоренцевской линии при малых γ половина полной спектральной мощности лежит в интервале $|\Delta| \leq \gamma$, а для линии с формой (37) – при $|\Delta| \leq 0.442\gamma$.

Отметим, что к такой же форме спектрального распределения приводит модель Моллоу [23], описывающая рассеяние монохроматического излучения с частотой ω на двухуровневой системе с релаксацией с резонансной частотой ω_0 . Для случая точного резонанса ($\omega = \omega_0$) спектр мощности излучения в слабом поле ($\Omega \ll \gamma$) имеет вид

$$P(\omega_1) = \frac{\Omega^2}{2\gamma^2} \left[2\pi\delta(\omega_1 - \omega_0) + \frac{2\Omega^2\gamma}{(\Delta^2 + \gamma^2)^2} \right]. \quad (38)$$

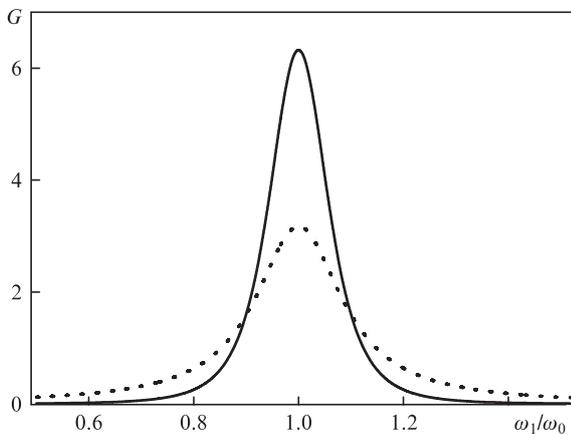


Рис.5. Формы спектральных распределений спонтанного излучения (пунктир) и простейшего вынужденного излучения (сплошная кривая) при резонансе частот начального фотона и перехода. Полуширина линии спонтанного излучения $\gamma = 0.1$.

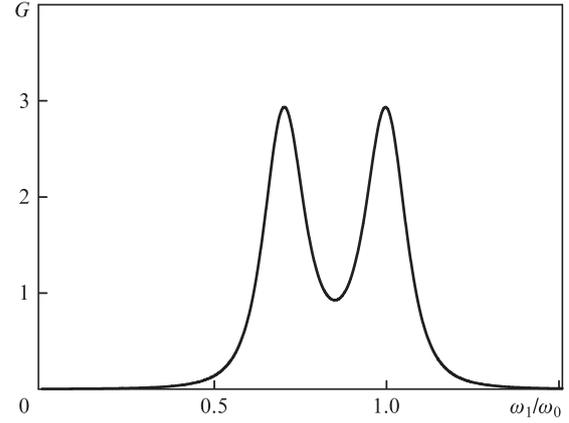


Рис.6. Форма спектрального распределения простейшего вынужденного излучения в нерезонансном случае ($\omega_0 = 1, \omega = 0.7, \gamma = 0.1$).

Здесь Ω – частота Раби падающего на систему (классического) поля, а расстройка $\Delta = \omega_1 - \omega_0$. Первое слагаемое описывает упругое рассеяние одиночных фотонов с сохранением энергии (процесс, детально исследованный Гайтлером, см. [22, с. 234]), а второе, описывающее рассеяние пар фотонов с обменом энергией между ними, имеет ту же форму, что и найденная нами зависимость $G(\omega)$.

Полное сечение рассеяния при точном резонансе

$$\sigma = \frac{3}{\pi} \lambda^2 \quad (39)$$

вдвое больше сечения резонансной флуоресценции (см. [13, с. 416]).

При отстройке частоты начального фотона от резонанса форма линии (36), сохраняя симметрию относительно частоты $\bar{\omega} = (\omega_0 + \omega)2$, уширяется, а при достаточно больших расстройках расщепляется на две приблизительно лоренцевы линии с максимумами интенсивности на частотах перехода и начального фотона (рис.6).

Погрешность спектрального копирования начального фотона δ_ω при простейшем процессе вынужденного излучения в свободном пространстве определяется отношением естественной ширины линии $\gamma = \Gamma_s/2 = 2d^2\omega_0^3/(3\hbar c^3)$ (см. (12)) к ее центральной частоте ω_0 . Этому отношению можно придать вид

$$\delta_\omega = \frac{\gamma}{\omega} \sim \alpha^3 \left(\frac{\omega_0}{\omega_{at}} \right)^2, \quad (40)$$

где $\alpha = e^2/\hbar c$ – постоянная тонкой структуры; $\omega_{at} = me^4\hbar^{-3} = 4.13 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$ – атомный масштаб частоты. В оптическом диапазоне погрешность частотного копирования $\delta_\omega \sim 3 \times 10^{-9}$ очень мала. Напротив, пространственные характеристики начального фотона копируются плохо: погрешности копирования волнового вектора и вектора поляризации велики, $\delta_k \sim 1, \delta_e \sim 1$. У этого явления две причины. С одной стороны, точечный в дипольном приближении атом не чувствует пространственную структуру поля – динамическое взаимодействие в свободном пространстве не зависит от волнового вектора. С другой стороны, комбинаторное взаимодействие, приводящее к небольшому, в $\sqrt{2}$ раз, увеличению матричного элемента для излучения фотона в заполненную моду, в свободном пространстве подавляется за счет уменьшения числа возможных конечных состояний.

6. Выводы

Приведенные выше расчеты показывают, что две черты, присущие задаче Эйнштейна – Дирака, а именно увеличение скорости перехода и появление кратно заполненных мод квантованного поля излучения, в элементарных процессах вынужденного излучения присутствуют в разной мере. При взаимодействии с одной модой поля в резонаторе копирование фотона является точным (средняя по времени вероятность нахождения поля с двумя фотонами в состоянии с двукратно заполненной модой $\Upsilon(1) = 1$), но при наличии затухания поля скорость перехода атома в нижнее состояние при вынужденном излучении может быть как больше, так и меньше скорости перехода при спонтанном излучении. Из рассмотрения задачи с двумя модами резонатора следует, что копирование начального фотона является в общем случае приближенным, а его эффективность зависит от расстройки второй (нерезонансной) моды. Если расстройка пренебрежимо мала, то средняя по времени вероятность нахождения поля с двумя фотонами в состоянии с двукратно заполненной модой $\Upsilon(2) = 0.75$ (см. п.4). Расчеты, которые здесь не приводятся, показывают, что для трех резонансных мод $\Upsilon(3) = 0.556$. Не вызывает сомнений, что с дальнейшим ростом числа резонансных мод вероятность двукратного заполнения мод будет продолжать падать. В предельном случае бесконечного числа мод, соответствующем излучению в свободном пространстве, процесс рассеяния фотона на возбужденном атоме не приводит к двукратному заполнению мод, хотя спектральное копирование начального фотона имеет место с высокой точностью.

Отсюда следует необходимость уточнения определения вынужденного излучения (такая необходимость на основе иных соображений уже отмечалась в [24]). Начать можно с тривиального факта: присутствие начального фотона меняет процесс эволюции атомной системы, его кинетику и модовый состав возникающего излучения.

Если следовать Эйнштейну и считать определяющей характеристикой вынужденного излучения изменение кинетики перехода (оригинальный термин – *Zustandsänderungen durch Einstrahlung*, изменение состояний под действием облучения [9–11]*), то упоминание об испускании тождественных фотонов должно быть устранено из определения вынужденного излучения, ибо такое испускание может иметь место отчасти (см. п.4) или не иметь места вообще (см. п.5). Кроме исторической преемственности, такое кинетическое определение предпочтительно, поскольку описывает явление в терминах наблюдаемых и не привязано к специфической модели. В частности оно допускает возможность описания вынужденного излучения с помощью классических моделей, известную еще Эйнштейну [9–11] и нашедшую широкое применение в научной литературе (см., напр., [27–29]).

* Переводчики статей [9–11] для собрания трудов Эйнштейна [25] всюду перевели *Einstrahlung* (облучение) как «индуцированное излучение». Во-первых, это немедленно привело к физически ошибочным утверждениям – например, о том, что «оно может вызывать с равным успехом как уменьшение, так и приращение энергии» (с. 390). Во-вторых, это анахронизм: термин «индуцированное излучение» (induced emission) был введен ван Флеком лишь в 1924 г. [26], а эквивалентный термин «вынужденное излучение» (stimulated emission) – Дираком в 1927 г. [8]

С другой стороны, формально можно следовать центральной догме и *определить* вынужденное излучение как процесс испускания фотонов в заполненные моды. В этом случае тождественность испущенных квантов начальным будет гарантирована. Но тогда изменение спектральных свойств излучения возбужденного атома в свободном пространстве при взаимодействии с внешним фотоном (см. п.5) придется описывать как новый, третий тип процесса, ибо он не будет являться ни спонтанным, ни вынужденным излучением. Бритва Оккама отсекает такой подход.

Необходимо также отметить, что совершенно неверное утверждение о точном копировании одиночного фотона при рассеянии его на возбужденном атоме повсеместно (от школьных [30, 31] до университетских [5–7] учебников) используется для объяснения высокой пространственной направленности и квазимонохроматичности излучения лазеров. С этим надо что-то делать.

Автор благодарит С.П.Кулика за постановку вопросов, которые инициировали написание этой статьи, и за постоянную информационную помощь. Автор благодарит также А.В.Борисова, А.А.Никулина, Е.А.Островскую, А.А.Самохина, Г.А.Чижова и А.В.Шепелева за интерес к работе и полезные обсуждения.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (№ НШ 4464.2006.2) и РФФИ (грант № 11-02-00317-А).

1. *Большая советская энциклопедия* (М.: Сов. энциклопедия, 1971, т. 5, с. 528)
2. *Nobel Lectures in Physics 1963–1970* (Singapore: World Scientific, 1998).
3. *Wikipedia*. http://en.wikipedia.org/wiki/Stimulated_emission
4. *Britannica Online Encyclopedia. Stimulated Emission from the Article Light (Physics)*. <http://www.britannica.com/>
5. Матвеев А.Н. *Оптика* (М.: Высшая школа, 1985).
6. Клышко Д.Н. *Физические основы квантовой электроники* (М.: Наука, 1986).
7. Сивухин Д.В. *Общий курс физики. Оптика* (М.: Физматлит, 2005, т. IV).
8. Dirac P.A.M. *Proc. Roy. Soc. (London)*, **114A**, 243 (1927).
9. Einstein A. *Verhandl. Dtsch. Phys. Ges.*, **18**, 318 (1916).
10. Einstein A. *Mitteil. Phys. Ges. Zürich*, **16**, 47 (1916).
11. Einstein A. *Physik. Zs.*, **18**, 121 (1917).
12. Шифф Л. *Квантовая механика* (М.: ИЛ, 1959).
13. Лоудон Р. *Квантовая теория света* (М.: Мир, 1976).
14. Jaynes E.T., Cummings F.W. *Proc. IEEE Int. Soc. Opt. Eng.*, **51**, 89 (1963).
15. Басов Н.Г., Прохоров А.М. *УФН*, **57**, 485 (1955).
16. Gordon J.P., Zeiger H.J., Townes C.H. *Phys. Rev.*, **99**, 1264 (1955).
17. Meschede D., Walther H., Müller G. *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 551 (1985).
18. Kimble H.J. *Physica Scripta*, **T76**, 127 (1998).
19. Sachdev S. *Phys. Rev. A*, **29**, 2627 (1984).
20. Purcell E.M. *Phys. Rev.*, **69**, 681 (1946).
21. Weisskopf V., Wigner E. *Z. Phys.*, **63**, 54 (1930).
22. Гайтлер В. *Квантовая теория излучения* (М.: ИЛ, 1956).
23. Mollow B.R. *Phys. Rev.*, **188**, 1969 (1969).
24. Букин В.В., Гарнов С.В., Самохин А.А. *Кр. сообщ. физ. ФИАН*, №3, 3 (2006).
25. Эйнштейн А. *Собрание научных трудов* (М.: Наука, 1966, т. III).
26. van Vleck J.H. *Phys. Rev.*, **24**, 330 (1924).
27. Собельман И.И., Тютин И.В. *УФН*, **79**, 595 (1963).
28. Cocke W.J. *Phys. Rev. A*, **17**, 1713 (1978).
29. Fain V., Milonni P.W. *J. Opt. Soc. Am. B*, **4**, 78 (1987).
30. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. *Физика: Оптика. Квантовая физика. 11 кл.* (М.: Дрофа, 2002, с. 324).
31. Касьянов В.А. *Физика. 11 кл.* (М.: Дрофа, 2004, с. 341).