

# Измерение механических деформаций упругой сферической оболочки, заполненной несжимаемой жидкостью, с помощью полупроводникового лазерного автодина

Д.А.Усанов, Ан.В.Скрипаль, С.Ю.Добдин

*Показана возможность измерения механических деформаций упругой сферической оболочки, заполненной несжимаемой жидкостью, под действием пневмоимпульса. Величина деформации определялась по сигналу полупроводникового лазерного автодина с использованием вейвлет-преобразования. Установлено, что она коррелирует с внутренним давлением.*

**Ключевые слова:** сферическая оболочка, внутреннее давление, полупроводниковый лазер, автодинный сигнал.

Исследование механических деформаций тел, оболочек которых имеют сферическую форму, относится к классическим задачам теории оболочек, решение которых обычно ограничивается теоретическим расчётом с использованием численных методов [1, 2]. Примером сферического объекта, упругие свойства которого важно знать, является глазное яблоко.

В работе [3] приведены результаты исследования склеральной капсулы глаза с помощью офтальмомеханографа, предназначенного для получения *in vivo* зависимости напряжения от деформации. Значения механических параметров склеры можно использовать для определения внутриглазного давления и биомеханических характеристик оболочек. Для измерений внутриглазного давления обычно применяемыми методами требуется обеспечить контакт между глазным яблоком и специальным грузом, что вызывает необходимость обезболивания глаза пациента. В известных неинвазивных методах измерения внутриглазного давления в качестве внешней нагрузки используется пневмоимпульс. В этом случае для бесконтактного определения характеристик механических деформаций, в том числе и в динамике, перспективно применение метода, основанного на использовании полупроводникового лазерного автодина. Данный метод позволяет измерять величину деформаций не только в точке, но и на всей плоскости деформированной поверхности.

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование с помощью полупроводникового лазерного автодина механических свойств мягкой сферической оболочки, заполненной несжимаемой жидкостью с различным внутренним давлением.

Важным параметром для исследования упругих свойств оболочки является величина её прогиба под действием внешней нагрузки. Знание этой величины позволяет определять механические характеристики оболочки и внутреннее давление. Прогиб сферической оболочки опреде-

ляется по сигналу полупроводникового лазерного автодина. Нормированная переменная составляющая автодинного сигнала может быть представлена в виде

$$P(t) = \cos\left[\theta + \frac{4\pi}{\lambda_0} Z(t)\right], \quad (1)$$

где  $\theta$  – набег фазы автодинного сигнала;  $\lambda_0$  – длина волны лазерного излучения;  $t$  – интервал времени наблюдения автодинного сигнала на различных участках движения поверхности оболочки;  $Z(t)$  – функция, описывающая продольные перемещения объекта.

Для восстановления функции  $Z(t)$  по автодинному сигналу полупроводникового лазера  $P(t)$  можно воспользоваться методикой, приведенной в [4], где функцию движения объекта  $Z(t)$  восстанавливают с помощью вейвлет-преобразования. В этом случае функция  $Z(t)$  может быть представлена в виде

$$Z(t) = K_{\psi_1}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(a, b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_1\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2}, \quad (2)$$

где  $\psi_1$  – базисная вейвлет-функция, которая является производной функции Гаусса ( $G(t) = e^{-t^2/2}$ );  $C(a, b)$  – коэффициенты вейвлет-разложения функции  $Z(t)$  по базису  $\psi_1$ ;  $a$  – коэффициент масштабирования;  $b$  – коэффициент переноса;

$$K_{\psi_1} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi_F(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega$$

– постоянная величина, определяемая базисной вейвлет-функцией;  $\psi_F$  – фурье-образ вейвлет-функции  $\psi_1$ ;  $\omega$  – частота в спектре вейвлет-функции  $\psi_1$ . Введём в рассмотрение функцию  $S(t)$ , такую, чтобы её вейвлет-спектр с точностью до постоянного множителя соответствовал спектру восстанавливаемого сигнала (1):

$$S(t) = \frac{dP(t)/dt}{\pm\sqrt{1-P^2(t)}}. \quad (3)$$

С учётом выражения для нормированной составляющей интерференционного сигнала (1) и функции, характеризующей продольные движения объекта (2), получаем

Д.А.Усанов, Ан.В.Скрипаль, С.Ю.Добдин. Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского, Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83; e-mail: UsanovDA@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 19 мая 2011 г., после доработки – 14 октября 2011 г.

$$S(t) = \frac{4\pi}{\lambda K_{\psi_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(a,b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_2\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2}, \quad (4)$$

$$C(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{4\pi} S(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_2\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (5)$$

где  $\psi_2$  – базисная вейвлет-функция, которая является второй производной функции Гаусса.

Сравнивая интегральные представления функций  $Z(t)$  и  $S(t)$ , видим, что они различаются базисными вейвлет-функциями и постоянным множителем  $4\pi/\lambda$ , но имеют одинаковые коэффициенты вейвлет-разложения  $C(a,b)$ . Поэтому полученные в результате обратного вейвлет-преобразования коэффициенты разложения (5) можно использовать для восстановления функции движения объекта  $Z(t)$ , подставив их в соотношение (2).

Таким образом, решение задачи нахождения  $Z(t)$  (обратная задача) будет включать в себя измерение автодинного сигнала  $P(t)$ , численный расчёт его производной  $dP(t)/dt$ , построение функции  $S(t)$  с помощью соотношения (3), получение коэффициентов вейвлет-разложения  $C(a,b)$  функции  $S(t)$  и затем расчёт функции  $Z(t)$ , характеризующей продольные движения объекта, с использованием формулы (2). По восстановленной функции движения объекта  $Z(t)$  можно определить величину прогиба в каждой точке сферической оболочки.

Были проведены эксперименты по измерению механических деформаций сферических оболочек под действием пневмоимпульса при различном внутреннем давлении. В качестве объекта исследований использовался резиновый шарик диаметром 24 мм, заполненный гелем с плотностью, близкой к плотности внутриглазной жидкости. Внутри шарика, который можно рассматривать как модель глазного яблока, вводилась трубка, свободный конец которой был связан с Y-образным резиновым шлангом. К свободным концам шланга присоединялись нагнетатель и измеритель давления.

Для воздействия на анализируемый участок шарика применялся компрессор мембранного типа с мощностью 2 Вт, давлением 0.01 МПа и частотой пневмоимпульсов 1 Гц. Фотография экспериментальной установки приведена на рис.1. Излучение полупроводникового лазера 1, накачиваемого стабилизированным источником тока 2, направлялось на объект 3, на который воздействовали пневмоимпульсом компрессора 4. Фиксация объекта исследования обеспечивалась специальным механизмом 5. Давление внутри объекта изменялось с помощью резиновой груши 6 и измерялось манометром 7. Часть излучения, отражённого от объекта, возвращалась в резонатор полупроводникового лазера, изменение выходной мощности которого регистрировалось встроенным фотодетектором. Сигнал с фотодетектора поступал через усилитель на АЦП 8, а затем в цифровой виде в память компьютера 9, где и сохранялся для последующего анализа в математическом пакете MathCad.

При проведении эксперимента пневмоимпульсы компрессора по гибкому шлангу и пластмассовой трубке направлялись на поверхность одного из объектов, что создавало нагрузку на оболочку извне. Все эксперименты выполнялись в условиях, при которых пневмоимпульсы были одинаковыми. Движение поверхности объекта приводило к изменению автодинного сигнала полупроводникового лазера. Величина прогиба при этом определялась по автодинному сигналу с помощью методики, опи-

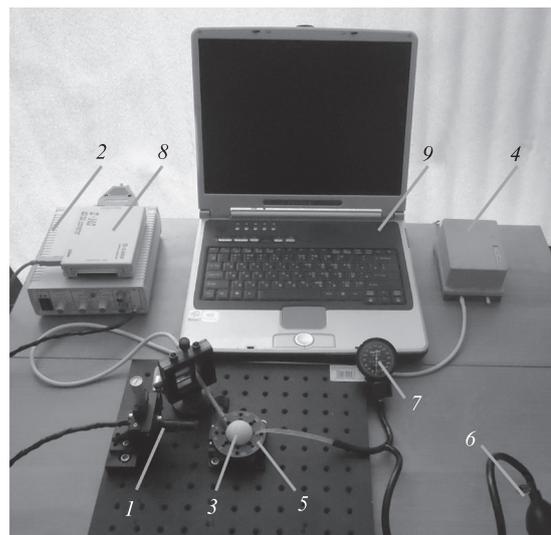


Рис.1. Фотография экспериментальной установки: 1 – полупроводниковый лазер; 2 – источник тока; 3 – объект; 4 – компрессор; 5 – механизм фиксации объекта; 6 – резиновая груша; 7 – манометр; 8 – АЦП; 9 – компьютер.

санной выше. Для определения максимальной величины прогиба полупроводниковый лазер, закреплённый на подвижном столике, смещался микровинтом (с шагом 1 мм). Подобный подход позволил восстановить профиль деформируемой поверхности.

Перед восстановлением функции движения  $Z(t)$  для исключения высокочастотных составляющих проводилось сглаживание экспериментальной кривой с использованием встроенной функции *supsmooth* математического пакета MathCad. На рис.2 показаны восстановленные профили поверхности объекта при воздействии пневмоимпульса для образцов с разным внутренним давлением. Давление измерялось манометром.

Как следует из рис.2, глубина прогиба для образцов с различным внутренним давлением различна. Измерение величин прогиба в разных точках поверхности позволило восстановить её рельеф и определить локальные особенности при воздействии пневмоимпульса. Из результатов измерений следует, что глубина прогиба сферической оболочки коррелирует с давлением внутри объекта. Поэтому неизвестное давление можно определить по величине прогиба самой оболочки.

Описание поведения сферической оболочки под действием нагрузки можно использовать для получения биомеханических свойств биообъектов *in vivo*. Исследование биомеханических характеристик оболочки глаза (склеры) позволит проводить диагностику различных нарушений её биомеханического статуса. Использование полупроводникового лазерного автодина повышает точность определения области и величины прогиба по сравнению с обеспечиваемой известными методами, а отсутствие непосредственного контакта между глазом и измерителем давления исключает необходимость обезболивания.

Таким образом, в настоящей работе рассмотрена возможность использования полупроводникового лазерного автодина для измерения механических деформаций сферических оболочек объектов, имеющих внутреннее давление, под действием пневмоимпульса. Применение лазерной системы позволяет с высокой точностью определить величину прогиба в каждой точке сферической оболочки. Показано, что эта величина связана с внутрен-

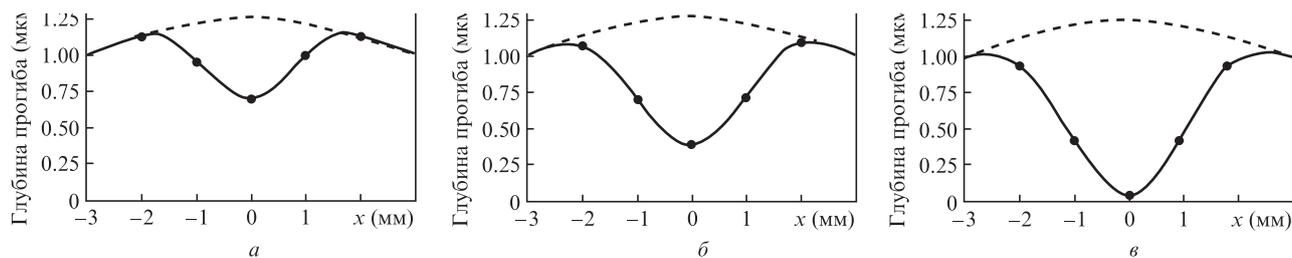


Рис.2. Восстановленные при воздействии пневмоимпульса профили поверхности объекта с внутренним давлением 40 (а), 30 (б) и 20 Тор (в). Штриховые кривые – начальное положение оболочки.

ним давлением. Подобная зависимость может быть использована, в частности, для бесконтактного измерения внутриглазного давления *in vivo*.

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки* (М.: Наука, 2009).
2. Вольмир А.С. *Гибкие пластинки и оболочки* (М.: Изд-во технической литературы, 1956).
3. Иомдина Е.Н., Брагин В.Е., Бречко А.В., Коновалов Г.А. В сб.: *Биомеханика глаза* (С.-Петербург, НИИ химии СПб ГУ, 2001, с. 26–33).
4. Чанилов О.И., Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Камышанский А.С. *Письма в ЖТФ*, **31**, 21 (2005).