

# Моделирование выходной мощности лазеров на парах бромиде меди методом МАРС

И.П.Илиев, Д.С.Войникова, С.Г.Гочева-Илиева

*На основе большого количества экспериментальных данных для CuBr-лазеров, генерирующих излучение с длинами волн 510.6 и 578.2 нм, проведено статистическое исследование зависимости выходной мощности излучения этих лазеров от десяти входных физических параметров. С помощью гибкого непараметрического метода многомерных адаптивных регрессионных сплайнов (МАРС) строятся регрессионные модели, которые описывают как линейные, так и нелинейные локальные зависимости. Эти модели описывают более 97% исходных данных с точностью, соизмеримой с точностью эксперимента. Модели применяются для оценки и прогнозирования выходной мощности излучения существующих, а также будущих лазеров. Показано преимущество построенных моделей для оценки лазерных параметров по сравнению со стандартными параметрическими методами многомерного факторного и регрессионного анализа.*

**Ключевые слова:** лазер на парах бромиде меди, выходная лазерная мощность, многомерные адаптивные регрессионные сплайны, непараметрическая модель.

## 1. Введение

Предметом настоящей работы являются лазеры на парах бромиде меди (CuBr), генерирующие излучение с длинами волн  $\lambda_1 = 510.6$  нм и  $\lambda_2 = 578.2$  нм. Лазеры данного типа – самые эффективные источники лазерного излучения в видимом диапазоне среди лазеров на парах металлов. Они имеют широкое практическое применение и представляют большой научный интерес [1].

Для исследования этих лазеров помимо эксперимента интенсивно применяются методы аналитического и численного моделирования. Основные результаты в этом направлении получены с использованием кинетических моделей, состоящих в основном из десятков и даже сотен взаимосвязанных дифференциальных уравнений, описывающих взаимосвязь физических процессов в лазерной среде [1, 2]. Вместе с тем в последние годы разрабатываются новые подходы к исследованию таких лазеров, основанные на статистической обработке накопленных экспериментальных данных с применением специализированных компьютерных методов и программного обеспечения [3–7]. Эти подходы дают возможность напрямую получать существенную информацию об основных зависимостях лазерных параметров и прогнозировать поведение конкретной лазерной системы или типа систем. Статистические методы позволяют также выявить новые зависимости между характеристиками исследуемой системы, которые нельзя получить путем теоретических, численных и экспериментальных исследований.

Целью настоящей работы является определение явной зависимости мощности лазерного излучения от основных

входных параметров. Для этого построены непараметрические регрессионные модели с использованием метода многомерных адаптивных регрессионных сплайнов (МАРС) [8]. С помощью МАРС решались следующие задачи: 1) нахождение зависимостей, наиболее адекватно описывающих как локально линейные, так и локально нелинейные члены; 2) определение степени влияния входных параметров на выходную мощность; 3) оценка известного эксперимента и прогнозирование и планирование новых экспериментов; 4) сравнение результатов, полученных методом МАРС и стандартными статистическими методами.

Исследование проводится на базе опубликованных в работах [9–17] всех наличных экспериментальных данных для лазеров на парах бромиде меди, созданных за последние десятилетия в Лаборатории лазеров на парах металлов Института физики твердого тела им. Георгия Наджакова Болгарской академии наук. Вычисления проводились с помощью программного пакета MARS [18].

## 2. Описание данных

В работе рассматриваются следующие десять входных лазерных переменных (предикторов):  $D$  (мм) – внутренний диаметр лазерной трубы;  $D_r$  (мм) – внутренний диаметр диафрагмы;  $L$  (см) – длина активной зоны (расстояние между электродами);  $P_{in}$  (кВт) – подводимая электрическая мощность;  $P_L = P_{in}/L$  (кВт/см) – электрическая мощность на единицу длины с учетом 50% потерь;  $P_{rf}$  (кГц) – частота следования электрических импульсов;  $p_{Ne}$  (Тор) – давление буферного газа (неона);  $p_{H_2}$  (Тор) – давление добавочного газа (водорода);  $C$  (нФ) – эквивалентная емкость конденсаторной батареи;  $T_r$  (°C) – температура резервуара с CuBr. В качестве основной зависимой переменной будет рассматриваться средняя выходная лазерная мощность  $P_{out}$  (Вт).

Использовались данные для  $n = 387$  проведенных экспериментов. Буквой  $v$  будем обозначать набор входных переменных, причем упорядочение следующее:  $v = (D, D_r, L, P_{in}, P_L, P_{rf}, p_{Ne}, p_{H_2}, C, T_r)$ . Например, максимальная вы-

I.P.Iliev, Department of Physics, Technical University – Plovdiv, 25 Tzanko Dzushtabanov St, 4000 Plovdiv, Bulgaria; e-mail: iliev55@abv.bg  
D.S.Voynikova, S.G.Gocheva-Ilieva, Department of Applied Mathematics and Modelling, Faculty of Mathematics and Informatics, Paisii Hilendarski University of Plovdiv, 24 Tzar Assen St, 4000 Plovdiv, Bulgaria

Табл. 1. Статистические характеристики для набора из  $n = 387$  измерений.

Переменная	Минимальное значение	Максимальное значение	Среднее значение	Асимметрия	Экссесс
$D$	15.00	58.00	$46.59 \pm 10.072$	$-0.809 \pm 0.12$	$1.451 \pm 0.25$
$D_r$	4.50	58.00	$34.83 \pm 18.31$	$0.265 \pm 0.12$	$-1.602 \pm 0.25$
$L$	30.00	200.00	$106.59 \pm 70.70$	$0.478 \pm 0.12$	$-1.670 \pm 0.25$
$P_{in}$	1.00	5.00	$2.10 \pm 1.27$	$1.065 \pm 0.12$	$-0.321 \pm 0.25$
$P_L$	5.00	16.67	$10.92 \pm 2.51$	$-0.467 \pm 0.12$	$0.183 \pm 0.25$
$P_{rf}$	3.20	125.50	$23.24 \pm 25.69$	$3.589 \pm 0.12$	$11.530 \pm 0.25$
$P_{Ne}$	8.00	250.00	$22.56 \pm 24.17$	$6.389 \pm 0.12$	$46.454 \pm 0.25$
$P_{H_2}$	0	0.80	$0.36 \pm 0.25$	$-0.416 \pm 0.12$	$-1.430 \pm 0.25$
$C$	0.33	4.00	$1.33 \pm 0.61$	$2.313 \pm 0.12$	$6.233 \pm 0.25$
$T_r$	350.00	590.00	$478.22 \pm 23.25$	$-1.673 \pm 0.12$	$7.332 \pm 0.25$
$P_{out}$	0.25	120.00	$34.024 \pm 35.57$	$0.808 \pm 0.12$	$-0.862 \pm 0.25$

ходная мощность  $P_{out} = 120$  Вт получена в эксперименте с  $v_{387} = (58, 58, 200, 5, 12.5, 0.6, 17.5, 20, 1.3, 490)$  [14].

Основные статистические характеристики экспериментов приведены в табл. 1. Нужно отметить, что в целом они не соответствуют многомерному нормальному распределению, поэтому применение параметрических методов к используемой полной выборке необоснованно. Однако такое условие не обязательно для непараметрических методов (таких как МАРС), которые имеют более широкую область применения и не связаны с определенным типом распределения данных.

### 3. Метод МАРС

Этот метод разработан выдающимся американским физиком и статистиком Дж.Фридманом в 1990–1991 гг. [8]. Он реализован в программных пакетах MARS [18], STATISTICA, R и в некоторых других. В последнее десятилетие МАРС зарекомендовал себя в качестве предсказательной методики в различных областях науки и практики [18, 19].

По сравнению с другими регрессионными методиками модели МАРС являются более гибкими и могут аппроксимировать локальные нелинейности данных. Автоматически выделяются те предикторы, которые наиболее сильно влияют на зависимую переменную, а результаты моделирования имеют простой вид, их легко понять и интерпретировать. Методом МАРС можно обрабатывать как малые, так и большие совокупности данных. При этом достаточно, чтобы ошибки приближения имели нормальное распределение. Для статистически значимой модели смещение оценки, как правило, очень мало.

Пусть имеется набор данных  $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  и зависящая от них переменная  $y = y(X)$ . Предположим, что переменные  $y, x_1, x_2, \dots, x_p$  суть векторы с размерностью  $n$ . Общее выражение для модели МАРС  $\hat{y}_{[M]}$  для приближения величины  $y$  имеет вид

$$\hat{y}_{[M]} = b_0 + \sum_{j=1}^M b_j F_j(X), \tag{1}$$

где  $b_0, b_j$  – постоянные коэффициенты модели;  $j = 1, 2, \dots, M$ ;  $F_j(X)$  – базисные функции.

В линейном случае базисные функции имеют вид одной из «зеркальных» одномерных функций:

$$F_j(X) = \max(0, x_k - c_k) \text{ или } F_j(X) = \max(c_k - x_k, 0). \tag{2}$$

Здесь  $c_k$  – константа (узел) базисной функции со значениями в интервале определения переменной  $x_k$ . Графиче-

ски линейная модель МАРС является частично линейной функцией и на каждом отдельном участке может рассматриваться как линейная регрессионная кривая.

При построении нелинейных моделей МАРС базисные функции могут содержать также произведения двух и более функций типа (2) с неповторяющимися индексами. Например, базисная функция

$$F_j(X) = \max(0, x_k - c_k) \max(0, x_l - c_l) \tag{3}$$

может учитывать влияние взаимодействия двух предикторов,  $x_k$  и  $x_l$ , на зависимую переменную  $y$ . Отметим, что модель МАРС (1) отличается от модели обычных сплайнов тем, что узлы  $c_k$ , реальный набор базисных функций и их число  $M$  заранее неизвестны и определяются из ряда дополнительных оптимизирующих условий.

Построение модели проводится в два этапа. Сначала задается некоторое максимальное число возможных базисных функций (обозначим его  $M_0$ ), а также максимальный порядок взаимодействия между ними (количество членов в произведениях базисных функций). Рекомендуется выбирать  $M_0 \geq 3p$  [19]. На первом этапе осуществляется так называемый пошаговый прямой ход. Начиная с некоторого  $b_0$  (например, с  $b_0 = \min_i y_i$ ), на каждом шаге в модель добавляется одна пара базисных функций типа (2). Для текущей модели с  $M$  базисными функциями переменная, коэффициенты и соответствующий искомой переменной узел определяются из условия минимизации суммы квадратов ошибок

$$S_{[M]} = \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}_{[M]}(X_i)]^2.$$

Если процедура прямого хода оканчивается через  $M_1$  шагов, то получаются  $M_1$  вложенных моделей. На втором этапе проводится обратный ход, состоящий в пошаговом удалении одного за другим тех членов, которые не улучшают модель в смысле ее кроссвалидации (GCV) [19, 20]. Выбирается «наилучшая модель» из  $m = M$  членов, для которой достигается минимум величины

$$GCV_{[m]} = \frac{\sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}_{[m]}(X_i)]^2}{n[1 - c(m)/n]^2}, \quad m = 1, 2, \dots, M_1, \tag{4}$$

где  $c(m) = m + \delta(m - 1)/2$ ;  $\delta \in [2, 3]$ . Обратный ход позволяет исключить возможную переподгонку модели. Отметим, что в зависимости от целей исследования можно использовать каждую из полученных статистически значимых моделей.

#### 4. Моделирование выходной мощности излучения лазера с помощью МАРС

На основе вышеописанных данных построим различные модели МАРС для оценки выходной мощности  $P_{out}$  и получим явные выражения для зависимости типа (1). Эти модели строятся с использованием всех десяти заданных независимых переменных из разд.2 в качестве предикторов и выходной мощности  $P_{out}$  в качестве зависимой переменной.

Для простоты приводим только результаты, полученные с помощью наилучших моделей МАРС. Далее для модели будем использовать обозначение  $(M_0; r)$ , где  $M_0$  – максимальное число первоначальных базисных функций, а  $r$  соответствует выбранному максимальному порядку взаимодействия между предикторами.

##### 4.1. Наилучшие модели МАРС первого порядка

Модели первого порядка являются частично линейными регрессионными моделями  $(M_0; 1)$  для каждой из базисных функций модели (1). Более подробно распишем модель  $(30; 1)$ . В наилучшую модель МАРС входят следующие 18 базисных функций:

$$\begin{aligned} F_1 &= \max(0, P_{in} - 2.5), & F_3 &= \max(0, C - 1.9), \\ F_5 &= \max(0, D_r - 40), & F_6 &= \max(0, 40 - D_r), \\ F_7 &= \max(0, C - 2.18), & F_9 &= \max(0, C - 1.3), \\ F_{11} &= \max(0, P_{rf} - 16.3), & F_{13} &= \max(0, P_{rf} - 21.5), \\ F_{15} &= \max(0, C - 1.1), & F_{17} &= \max(0, C - 1), \\ F_{19} &= \max(0, P_{rf} - 18.5), & F_{21} &= \max(0, P_{in} - 2), \\ F_{23} &= \max(0, P_{rf} - 26), & F_{25} &= \max(0, P_L - 10), \\ F_{26} &= \max(0, 10 - P_L), & F_{27} &= \max(0, p_{H_2} - 0.5), \\ F_{28} &= \max(0, 0.5 - p_{H_2}), & F_{29} &= \max(0, P_{rf} - 14). \end{aligned} \quad (5)$$

Соответствующая модель МАРС для выходной мощности  $P_{out}$  имеет вид

$$\begin{aligned} P_{out}^{(30;1)} &= 31.6223 - 28.9857F_1 + 120.663F_3 \\ &+ 1.10983F_5 - 0.436723F_6 - 78.8721F_7 \\ &- 112.399F_9 - 3.25176F_{11} + 8.49341F_{13} \\ &+ 209.183F_{15} - 142.364F_{17} - 6.14717F_{19} \\ &+ 44.4853F_{21} - 2.54973F_{23} - 1.63555F_{25} \\ &- 1.60555F_{26} - 34.5407F_{27} - 9.7688F_{28} \\ &+ 3.45331F_{29}. \end{aligned} \quad (6)$$

В формулах (5) и (6) из десяти входных переменных существенное влияние на модель оказывают только шесть:  $C$  (100),  $P_{in}$  (78.3),  $P_{rf}$  (63.9),  $D_r$  (43.5),  $P_L$  (14.6),  $p_{H_2}$  (13.0) (в скобках приведен их относительный вклад). Отдельный вклад каждого предиктора легко получить, если обнулить все члены модели, его не содержащие. В качестве примера на рис.1 показаны вклады предикторов  $P_{in}$  и  $C$ . Видно, что изменение  $P_{in}$  в интервале [1, 2] не влияет на модель, в интервале [2, 2.5] его вклад составляет 0–25, а в интервале [2.5, 5] вклад постепенно растет и достигает 65. Аналогично легко оценить влияние на модель емкости  $C$  и каждого из предикторов.

Модель (5), (6) описывает 98% всех данных со статистической значимостью  $P = 0$  и значимостью коэффици-

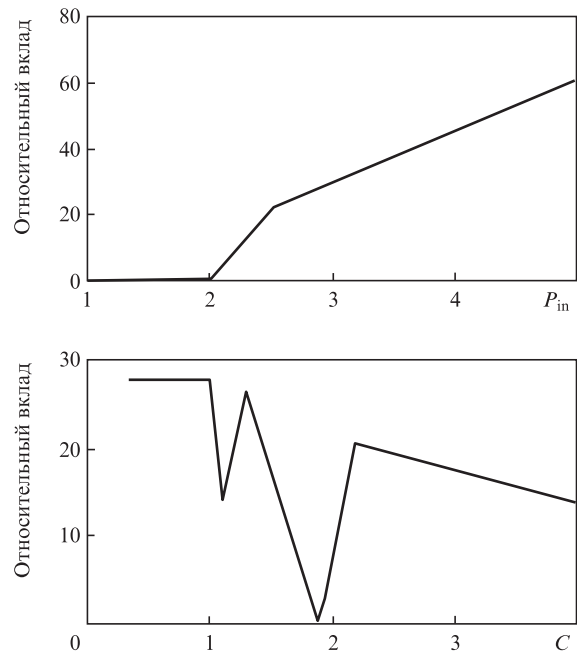


Рис.1. Вклады (в нормированных единицах) входной мощности  $P_{in}$  и емкости конденсаторной батареи  $C$  в модель (5), (6).

ентов в (6) менее 0.00128. Модель очень легко использовать для вычисления прогнозного значения  $P_{out}^{(30;1)}$ , если заданы значения предикторов. Например, для набора  $v = (40, 40, 120, 2.6, 10.83, 0.6, 17.5, 20, 1, 450)$  сначала из (5) находим  $F_1 = 0.1, F_3 = F_5 = F_6 = F_7 = F_9 = 0, F_{11} = 1.2, F_{13} = F_{15} = F_{17} = F_{19} = 0, F_{21} = 0.6, F_{23} = 0, F_{25} = 0.83, F_{26} = 0, F_{27} = 0.1, F_{28} = 0, F_{29} = 3.5$ . Затем, подставляя эти значения в (6), получаем  $P_{out}^{(30;1)}(v) = 58.78$  Вт. Экспериментальное значение для этого измерения равно 57.8 Вт.

Результаты, полученные для основных моделей первого порядка приведены в табл.2. Эти модели построены для последующего сравнения их с моделями более высокого порядка взаимодействия между предикторами.

##### 4.2. Наилучшие модели МАРС второго порядка

Поскольку кроме линейных существуют также и нелинейные локальные связи между предикторами, построим модели второго порядка взаимодействия (см. формулу (3)). Приведем здесь модель  $(30; 2)$ . Она строится с помощью следующих 22 базисных функций:

$$\begin{aligned} F_1 &= \max(0, P_{in} - 2.5), & F_2 &= \max(0, 2.5 - P_{in}), \\ F_3 &= \max(0, C - 0.33)F_1, & F_4 &= \max(0, P_{rf} - 17.5)F_1, \\ F_5 &= \max(0, 17.5 - P_{rf})F_1, & F_7 &= \max(0, 0.6 - p_{H_2}), \\ F_8 &= \max(0, P_{rf} - 23)F_2, & F_{10} &= \max(0, P_L - 7.5)F_2, \\ F_{11} &= \max(0, 7.5 - P_L)F_2, & F_{12} &= \max(0, P_L - 9.58333)F_2, \\ F_{14} &= \max(0, P_{rf} - 16)F_1, & F_{16} &= \max(0, P_{rf} - 18.5)F_1, \\ F_{19} &= \max(0, 1.9 - C), & F_{20} &= \max(0, P_L - 7.5)F_{19}, \\ F_{21} &= \max(0, 7.5 - P_L)F_{19}, & F_{22} &= \max(0, D_r - 20)F_{19}, \\ F_{23} &= \max(0, 20 - D_r)F_{19}, & F_{24} &= \max(0, p_{H_2} - 0.3)F_{19}, \\ F_{25} &= \max(0, 0.3 - p_{H_2})F_{19}, & F_{26} &= \max(0, P_{in} - 2)F_{19}, \\ F_{28} &= \max(0, C - 1.3)F_1, & F_{30} &= \max(0, P_L - 5)F_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Соответствующая модель для  $P_{out}$  включает 21 из функций (7) и имеет вид

Табл.2. Основные характеристики наилучших моделей МАРС для расчета выходной мощности  $P_{out}$ . Предикторы приведены в порядке уменьшения их относительного вклада в модели.

$r$	$M_0$	$R^2$	$G_{R^2}$	Стандартная ошибка регрессии	Число предикторов	$M$	Используемые предикторы
1	20	0.9744	0.9700	5.60	4	13	$P_{in}, C, P_{rf}, D_r$
	25	0.9786	0.9737	5.31	5	15	$P_{in}, C, P_{rf}, D_r, D$
	30	0.9816	0.9765	4.95	6	18	$C, P_{in}, P_{rf}, D_r, P_L, p_{H_2}$
	35	0.9818	0.9763	4.93	6	19	$C, P_{in}, P_{rf}, D_r, p_{H_2}, P_L$
	40	0.9818	0.9762	4.92	6	19	$C, P_{in}, P_{rf}, D_r, p_{H_2}, P_L$
2	20	0.9856	0.9817	4.35	6	15	$P_{in}, C, P_{rf}, L, p_{H_2}, P_L$
	25	0.9885	0.9851	3.9	6	17	$P_{in}, C, P_{rf}, D_r, P_L, p_{H_2}$
	30	0.9910	0.9874	3.48	6	21	$P_{in}, C, P_{rf}, D_r, p_{H_2}, P_L$
	35	0.9944	0.9918	2.74	6	25	$P_{in}, C, P_{rf}, D_r, p_{H_2}, P_L$
	40	0.9950	0.9923	2.51	7	26	$P_{in}, C, P_{rf}, D_r, p_{H_2}, P_L, D_r$
3	20	0.9872	0.9838	4.11	6	16	$P_{in}, C, P_{rf}, P_L, p_{H_2}, L$
	25	0.9904	0.9879	3.55	6	16	$P_{in}, C, P_{rf}, P_L, p_{H_2}, L$
	30	0.9921	0.9888	3.26	7	22	$P_{in}, C, P_{rf}, P_L, p_{H_2}, L, D_r$
	35	0.9934	0.9894	3.00	8	28	$P_{in}, C, P_{rf}, P_L, p_{H_2}, L, D_r, p_{Ne}$
	40	0.9945	0.9903	2.71	8	31	$P_{in}, C, P_{rf}, P_L, p_{H_2}, L, D_r, T_r$

$$\begin{aligned}
 P_{out}^{(30;2)} = & 35.0442 - 44.6739F_1 - 26.0407F_2 \\
 & + 68.9544F_3 + 6.30534F_4 - 5.30336F_5 \\
 & - 25.2627F_7 - 0.0240315F_8 + 10.1025F_{10} \\
 & + 14.1118F_{11} - 12.0007F_{12} - 5.37771F_{14} \\
 & - 7.34248F_{16} - 0.850553F_{20} - 9.95073F_{21} \\
 & + 1.15859F_{22} + 0.928972F_{23} - 48.494F_{24} \\
 & + 21.027F_{25} + 34.1073F_{26} - 35.9377F_{28} \\
 & - 1.4502F_{30}.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

В модели (7), (8) содержатся шесть из десяти первоначальных предикторов. В порядке уменьшения их влияния на модель (их относительный вклад указан в скобках) это переменные  $P_{in}$  (100),  $C$  (38),  $P_{rf}$  (30),  $D_r$  (15),  $p_{H_2}$  (12),  $P_L$  (10). Частичное взаимодействие второй степени (также в порядке уменьшения их относительного вклада в модель) обнаружили группы переменных  $\{P_{in}, P_{rf}\}$ ,  $\{P_{in}, C\}$ ,  $\{P_{in}, p_{H_2}\}$ ,  $\{P_{in}, P_L\}$ ,  $\{D_r, C\}$ ,  $\{C, p_{H_2}\}$  и  $\{P_L, C\}$ . Области вклада первых двух из этих групп показаны на рис.2. Для повышения выходной мощности нужно определить, в каких интервалах значений должны выбираться отдельные предикторы. Например, из рис.2,*a* видно, что влияние группы  $\{P_{in}, P_{rf}\}$  достигает максимума в области  $P_{rf} \in [50, 125]$  и  $P_{in} \in [2.5, 3.5]$ . Аналогично из рис.2,*б* видно, что

максимальное влияние на выходную мощность группа  $\{P_{in}, C\}$  имеет при  $P_{in} \in [4.5, 5]$  и  $C \in [1.6, 2]$ .

Модель (7), (8) описывает 99% всех данных со статистической значимостью  $P = 0$  и значимостью коэффициентов в (8) менее 0.00201. Результаты, полученные для основных моделей второго порядка тоже приведены в табл.2.

Были построены также модели третьего и более высоких порядков, но, как видно из табл.2, они не дали существенного улучшения результатов по сравнению с моделями второго порядка.

### 5. Сравнение моделей

Сравнение моделей можно провести по их основным параметрам (см. табл.2). Из табл.2 видно, что для линейных моделей коэффициент детерминации  $R^2 = 97\% - 98\%$ , а для остальных моделей  $R^2 > 99\%$  (этот коэффициент характеризует процент числа наблюдений, описываемых данной моделью). Также достаточно высокие значения имеет коэффициент  $G_{R^2}$  кроссвалидации  $R^2$  [20]. Последнее означает, что если построить модель на 90%-ной случайной «обучающей» выборке данных и использовать ее для прогнозирования остальных 10% данных, то степень приближения будет равна  $G_{R^2}$  (в процентах).

Из всех моделей локально линейные и локально нелинейные члены наиболее адекватно описываются моделья-

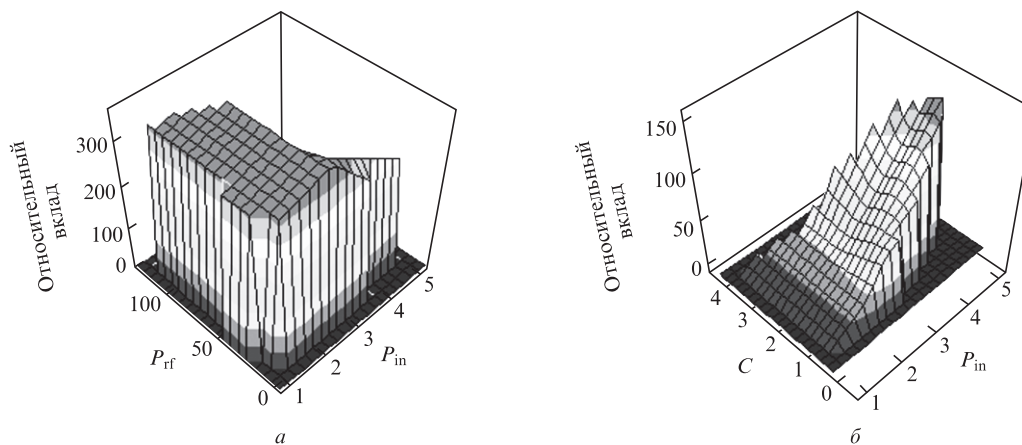


Рис.2. Вклады (в нормированных единицах) в модель (7), (8) взаимодействия между  $P_{in}$  и  $P_{rf}$  (a) и  $P_{in}$  и  $C$  (б).



ми второго и третьего порядков взаимодействия. Например, достаточно выбрать 30 или 40 исходных функций и модели (30;2), (30;3) или (40;2), (40;3). Эти модели дают точность приближения около 5%, что сопоставимо с точностью измерения экспериментальных данных.

Из последней колонки табл.2 видно, что с увеличением порядка модели и числа  $M_0$  исходных базисных функций набор существенных предикторов моделей стабилизируется. Так, переменные  $P_{in}$ ,  $C$ ,  $P_{rf}$ ,  $D_r$ ,  $p_{H_2}$ ,  $P_L$  важны при определении выходной мощности  $P_{out}$ . Отметим, что относительный вклад  $D_r$ ,  $p_{Ne}$  и  $T_r$  в модели (40;2), (30;3), (35;3) и (40;3) составляет менее 4, и их влиянием можно пренебречь.

В ранее проведенных нами статистических исследованиях параметрическими методами многомерного факторного и регрессионного анализа были получены модели на основе случайных выборок из рассматриваемой здесь совокупности данных. На базе переменных из ряда  $P_{in}$ ,  $D_r$ ,  $D$ ,  $L$ ,  $P_L$ ,  $p_{H_2}$  в [3] были получены линейные модели, в [6] – нелинейные параметрические модели, а в [5] – модели МАРС для выходной мощности. Отметим также, что в этих моделях переменные  $C$  и  $P_{rf}$  не используются, т. к. они принимают только несколько оптимизированных значений, что не учитывается параметрическими методами. Данные модели имели худшие статистические показатели и более ограниченную область применения, чем построенные нами модели МАРС. С одной стороны, это связано с жесткими ограничениями на применение параметрических методов, а с другой – наличием частично нелинейных зависимостей и высокой мультиколлинеарности исследованных данных для лазеров на парах бромида меди.

## 6. Оценка и прогнозирование результатов эксперимента с помощью моделей МАРС

Будем использовать модели МАРС для прогнозирования результатов известных и будущих экспериментов. Как показано в п.4.1, имея некоторую модель и набор ее параметров, легко вычислить значения базисных функций и получить соответствующую оценку  $P_{out}$ . Для определенности будем использовать наилучшие модели МАРС – (30;2), (40;2), (30;3), (40;3).

### 6.1. Прогнозирование результатов известных экспериментов

Модель (30;2) для эксперимента с набором входных параметров  $v_{387}$  и  $P_{out} = 120$  Вт дает оценку  $P_{out}^{(30;2)} = 119.7$  Вт. Сравнение экспериментальных значений  $P_{out}$  и их модельных оценок по формулам (7), (8) представлено на рис.3.

Для демонстрации возможности прогноза известных значений выходной мощности на основе 377 экспериментов построены четыре модели – (30;2), (40;2), (30;3) и (40;3). С помощью данных моделей выполнен прогноз результатов последних десяти из 387 экспериментов. Эти результаты приведены в табл.3 в порядке возрастания  $P_{out}$ .

### 6.2. Прогнозирование результатов будущих экспериментов

По аналогии с п.6.1 модели МАРС можно использовать также для прогнозирования результатов новых экспериментов. Наша цель – получить прогноз характеристик лазеров с повышенной выходной мощностью на парах бромида меди. Для этого с учетом поведения основных

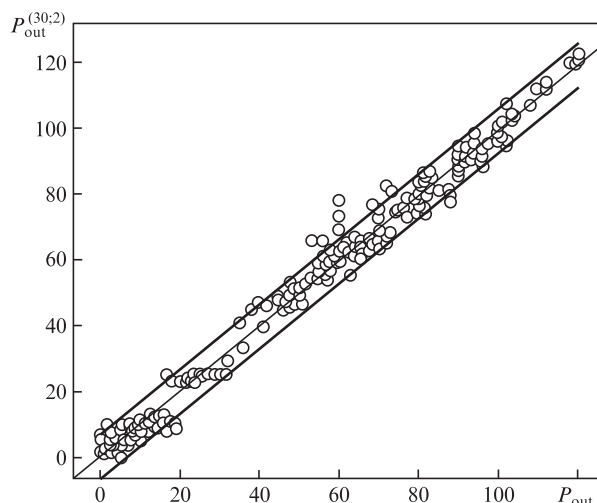


Рис.3. Приближение мощности  $P_{out}$  с помощью наилучшей модели МАРС (30;2). Сплошные линии показывают 5%-ное отклонение от среднего значения.

Табл.3. Прогнозные результаты, полученные на основе 377 наблюдений с помощью четырех моделей МАРС для десяти экспериментов ( $D = 58$  мм,  $D_r = 58$  мм,  $L = 200$  см,  $p_{H_2} = 0.6$  Торр,  $p_{Ne} = 20$  Торр,  $C = 1.3$  нФ,  $T_r = 490$  °С).

$n$	$P_{in}$	$P_L$	$P_{rf}$	$P_{out}^{exp}$	$P_{out}^{(30;2)}$	$P_{out}^{(40;2)}$	$P_{out}^{(30;3)}$	$P_{out}^{(40;3)}$
378	4	10.00	18.5	104	104.1	104.2	103.4	105.7
379	5	12.50	15	106	106.8	106.3	106.0	106.5
380	4.5	11.25	16	108	112.4	109.3	111.1	111.1
381	4.5	11.25	17.5	110	112.1	113.0	114.9	116.1
382	4.5	11.25	16.5	112	112.3	113.2	112.4	112.8
383	4.5	11.25	18.5	112	114.0	112.7	113.1	113.1
384	5	12.50	16	118	120.0	114.0	118.5	118.1
385	5	12.50	16.5	120	119.9	117.9	120.1	119.6
386	5	12.50	18.5	120	122.1	119.2	121.0	117.5
387	5	12.50	17.5	120	119.7	118.5	123.3	122.5

Примечание:  $P_{out}^{exp}$ ,  $P_{out}^{(30;2)}$ ,  $P_{out}^{(40;2)}$ ,  $P_{out}^{(30;3)}$  и  $P_{out}^{(40;3)}$  – выходные мощности излучения, полученные в эксперименте и рассчитанные по моделям (30;2), (40;2), (30;3) и (40;3) соответственно.

предикторов в интервалах возрастания  $P_{out}$  зададим новые наборы характеристик и вычислим соответствующие им приближения для  $P_{out}$ . Полученные прогнозные результаты для десяти выбранных наборов параметров, обозначенных как  $v_{pr}$ , приведены в табл.4.

## 7. Физическая интерпретация результатов моделирования

При построении моделей для расчета выходной мощности  $P_{out}$  использовались десять независимых переменных, из которых девять – физические. Только переменная  $P_L = P_{in}/L$  (с учетом 50% потерь) является производной величиной. Как отмечено в разд.5, в моделях второго и третьего порядков для расчета выходной мощности лазеров на парах бромида меди важны только следующие шесть входных параметров:  $P_{in}$ ,  $C$ ,  $P_{rf}$ ,  $D_r$ ,  $p_{H_2}$ ,  $P_L$ . Первостепенное значение имеет подводимая электрическая мощность  $P_{in}$  (почти 100 относительных единиц), что вполне соответствует реальному эксперименту. Вклад в модель емкости конденсаторной батареи  $C$  и частоты следования электрических импульсов  $P_{rf}$  составляет 20–35 относительных единиц, а вклад остальных переменных – 10–15 относительных единиц. Эти шесть параметров оказывают

Табл.4. Прогнозные результаты, полученные на основе 387 реальных наблюдений с помощью четырех моделей МАРС для десяти планируемых экспериментов ( $P_{rf} = 17.5$  кГц,  $C = 1.3$  нФ).

$v_{pr}$	$D$	$D_r$	$L$	$P_{in}$	$P_L$	$P_{H_2}$	$P_{Ne}$	$T_r$	$P_{out}^{(30;2)}$	$P_{out}^{(40;2)}$	$P_{out}^{(30;3)}$	$P_{out}^{(40;3)}$
1	60	60	210	5.1	12.14	0.6	20	490	125.0	124.1	127.1	127.8
2	68	65	220	5.2	11.82	0.6	20	500	132.4	131.5	130.8	133.0
3	70	68	225	5.25	11.67	0.6	20	500	136.4	135.6	132.7	135.6
4	75	73	230	5.3	11.52	0.5	20	500	144.7	142.6	134.5	138.2
5	70	70	240	5.5	11.46	0.5	20	500	147.9	145.8	139.9	144.7
6	70	70	240	5.6	11.67	0.5	20	500	149.4	146.9	141.5	145.9
7	70	68	240	5.7	11.88	0.5	21	500	149.4	146.7	143.1	147.0
8	75	73	240	5.5	11.46	0.5	21	500	150.0	147.8	139.9	144.7
9	70	70	240	5.7	11.88	0.5	21	500	150.8	148.0	143.1	147.0
10	75	75	240	5.7	11.88	0.5	21	500	154.3	151.3	143.1	147.0

Примечание:  $P_{out}^{(30;2)}$ ,  $P_{out}^{(40;2)}$ ,  $P_{out}^{(30;3)}$  и  $P_{out}^{(40;3)}$  – выходные мощности излучения, рассчитанные по моделям (30;2), (40;2), (30;3) и (40;3) соответственно.

существенное влияние на среднюю выходную мощность лазера, поскольку они задают распределение напряженности электрического поля, энергию электронов и температурный профиль ионизованного газа. Все это влияет на процесс заселения верхних лазерных уровней и, следовательно, на мощность лазерной генерации  $P_{out}$ .

Обратим особое внимание на переменную  $P_L$ . Она важна с точки зрения дизайна лазерной трубы. Без нее модели МАРС не дают хороших результатов, так же как и параметрические модели [3–7]. Из прогнозных результатов, приведенных в табл.4, видно, что  $P_L$  уменьшается. Это означает, что увеличение  $L$  должно осуществляться быстрее увеличения  $P_{in}$ , так, чтобы величина  $P_L = P_{in}/L$  уменьшалась. Физически это объясняется тем, что при увеличении расстояния  $L$  между электродами происходит перераспределение подводимой электрической мощности  $P_{in}$  между ними и в активном объеме положительного столба газового разряда, что и приводит к увеличению выходной мощности и эффективности лазерной генерации.

При конструировании лазеров также важна удельная мощность  $P_V = P_{in}/V$  (в Вт/см<sup>3</sup>) на единицу активного объема  $V$  в лазерной трубе с учетом 50% потерь. Для последних трех строк табл.3 ( $P_{out} = 120$  Вт) мощность  $P_V = 0.47$  Вт/см<sup>3</sup>. Для десяти прогнозных наборов переменных  $v_{pr}$  из табл.4 величина  $P_V$  уменьшается с ростом номера набора. Расчеты показывают, что соответствующие  $P_V$  меньше 0.47 Вт/см<sup>3</sup> на 30%–35%. Это можно объяснить тем, что в исследуемом лазере использовались повышенные значения подводимой мощности. С учетом полученных результатов при конструировании будущих лазеров можно рекомендовать использовать удельную входную мощность  $P_V = 0.3$  Вт/см<sup>3</sup>. Это позволит уменьшить термохимическую деградацию лазерной трубы и активных рабочих веществ, приведет к увеличению срока службы и уменьшит снижение средней лазерной мощности в трубе в процессе ее эксплуатации.

## 8. Заключение

В настоящей работе для лазеров на парах бромид меди выполнено статистическое моделирование зависимости выходной мощности лазерного излучения от десяти входных переменных с помощью гибкой прогнозной методики МАРС. На основе большого количества известных экспериментальных данных построены частично линейные и частично нелинейные модели МАРС, дающие отличное приближение к исходным наборам данных. Вы-

делены шесть основных переменных для расчета выходной мощности лазеров. Полученные модели использовались как для расчета параметров существующих лазеров, так и для прогнозирования характеристик будущих лазеров. Проведена физическая интерпретация построенных моделей и прогнозов. Данный подход и полученные результаты можно применять для планирования экспериментов.

Работа выполнена при поддержке фонда НПД Пловдивского Университета им. Паисия Хилендарского (проект НИ11-ФМИИ-004).

1. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Серия Б. Том XI-4. Газовые и плазменные лазеры. Под ред. С.И.Яковленко (М.: Физматлит, 2005).
2. Бойченко А.М., Евтушенко Г.С., Жданев О.В., Яковленко С.И. *Квантовая электроника*, **33**, 1047 (2003).
3. Илиев И.П., Гочева-Илиева С.Г., Астаджанов Д.Н., Денев Н.П., Саботинов Н.В. *Квантовая электроника*, **38**, 436 (2008).
4. Iliev I.P., Gocheva-Ilieva S.G., Astadjov D.N., Denev N.P., Sabotinov N.V. *Opt. Laser Technol.*, **40**, 641 (2008).
5. Gocheva-Ilieva S.G., Iliev I.P. *Math. Probl. Eng.*, **2010**, Article ID 697687 (2010).
6. Gocheva-Ilieva S.G., Iliev I.P. *Proc. 19th Int. Conf. on Computational Statistics (COMPSTAT'2010)* (Paris: Physica-Verlag, Springer\_ebook, 2010, pp 1063–1070).
7. Gocheva-Ilieva S.G., Iliev I.P. *Statistical Models of Characteristics of Metal Vapor Lasers* (New York: Nova Science Publ. Inc., 2011).
8. Friedman J.H. *Ann. Stat.*, **19**, 1 (1991).
9. Astadjov D.N., Vuchkov N.K., Sabotinov N.V. *IEEE J. Quantum Electron.*, **24**, 1927 (1988).
10. Vuchkov N.K., Astadjov D.N., Sabotinov N.V. *Opt. Quantum Electron.*, **23**, S549 (1991).
11. Astadjov D.N., Dimitrov K.D., Little C.E., Sabotinov N.V. *IEEE J. Quantum Electron.*, **30**, 1358 (1994).
12. Dimitrov K.D., Sabotinov N.V. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **3052**, 126 (1996).
13. Astadjov D.N., Dimitrov K.D., Jones D.R., Kirkov V.K., Little L., Little C.E., Sabotinov N.V., Vuchkov N.K. *Opt. Commun.*, **135**, 289 (1997).
14. Astadjov D.N., Dimitrov K.D., Jones D.R., Kirkov V.K., Little C.E., Sabotinov N.V., Vuchkov N.K. *IEEE J. Quantum Electron.*, **33**, 705 (1997).
15. *NATO contract Sfp*, 97 2685 (2000).
16. Stoilov V.M., Astadjov D.N., Vuchkov N.K., Sabotinov N.V. *Opt. Quantum Electron.*, **32**, 1209 (2000).
17. Denev N.P., Astadjov D.N., Sabotinov N.V. *Proc. IV Int. Symp. on Laser Technologies and Lasers 2005* (Plovdiv, 2006, p. 153).
18. <http://salford-systems.com/products/mars/overview.html>.
19. *MARS 3.0 Technical User's Guide*, Salford Systems (San Diego, California, 2011).
20. Craven P., Wahba G. *Numer. Math.*, **31**, 377 (1979).