

Формирование и оптическое управление диссипативными вихревыми солитонами в заполненных газом холодных атомов полых оптических волокнах

М.Ю.Губин, А.В.Прохоров, М.Г.Гладуш, А.Ю.Лексин, С.М.Аракелян

Рассмотрена проблема формирования вихревых оптических солитонов в среде трехуровневых атомов при учете эффектов локального поля. Предсказано, что в далеких от резонанса условиях рамановского режима Λ -схемы взаимодействия в оптически плотной среде заполненного газом холодных атомов ^{87}Rb полем фотонно-кристаллическом волокне могут сформироваться вихревые оптические солитоны, управляемые волной оптической накачки.

Ключевые слова: нелинейные атомно-оптические взаимодействия, оптически плотные среды, вихревые солитоны, заполненные газом волокна, оптическое управление.

1. Введение

Изучение возможностей управления формированием устойчивых пространственных оптических образований в различных средах [1] представляет собой значительный интерес в связи с широким спектром практического применения таких образований, в частности в задачах передачи и обработки информации [2].

Известная процедура когерентных записи, хранения и считывания оптической информации с использованием состояний атомной системы [3] основана на эффекте электромагнитно-индуцированной прозрачности, соответствующей линейному режиму работы Λ -схемы атомно-оптического взаимодействия при околорезонансных условиях. Существенные задержки пробного импульса средой в этом случае связаны с эффективным возбуждением в околорезонансных условиях атомных (темных) поляритонов, скорость распространения которых определяется скоростью передачи атомных возбуждений и в предельном случае выключения поля накачки может быть устремлена к нулю. Возникающая вслед за этим фаза хранения (квантовой) оптической информации на состояниях атомного ансамбля ограничена характерным временем развития эффектов декогеренции, в частности процессов диффузии в газовых средах. При этом время жизни квантового состояния в такой системе может быть увеличено на порядки при использовании атомных когерентных ансамблей в форме бозе-эйнштейновского конденсата.

Новые возможности рассматриваемая схема приобретает в случае использования в качестве носителей информации устойчивых топологических структур, сформированных в поперечном профиле пробного оптического пучка, в частности диссипативных пространственных

солитонов [2]. Значительный интерес вызывает особый класс оптических топологических структур – оптические вихри [4], центральный провал в распределении интенсивности которых надежно регистрируется в эксперименте даже при появлении сильного дифракционного расплывания оптического пучка [5]. В настоящее время оптические вихри получены экспериментально при использовании различных лазерных схем, которые условно можно разделить на две группы. К первой относится непосредственная генерация топологических световых структур в лазерных резонаторах [6, 7], вторая основана на модуляции лазерного пучка при его пропускании через пространственно-неоднородные среды: специально синтезированные голографические пластинки [8] и оптические маски переменной толщины [9].

Однако наблюдать стабильное поведение оптических вихрей (диссипативных вихревых солитонов) в лазерной схеме при их генерации удается крайне редко [10]. Объяснением этому служит тот факт, что полноценная задача проектирования и разработки современных лазерных устройств, в которых совмещаются возможности стабильной генерации и последующего управления оптическими пучками со сложной топологией, требует корректного определения областей их устойчивости, заданных в параметрах, описывающих конкретный лазерный эксперимент. При использовании протяженных сред это может быть сделано на основе анализа уравнения распространения, полученного непосредственным выводом, например при решении самосогласованной задачи на атомы и поле [2]. Появление необходимых для формирования устойчивого солитона нелинейных слагаемых в конечной форме уравнения распространения может быть связано с использованием рамановского режима работы Λ -схемы [11], реализованного при значительных длинах среды и при увеличении концентрации активных атомов [12].

Перспективной средой для формирования и управления солитонными режимами может служить недавно созданное полое фотонно-кристаллическое волокно с загруженными внутрь него холодными атомами [13]. Удержание когерентного состояния в такой атомной среде удалось осуществить в течение значительного времени, достаточного для развития конкурентных дисперсионно-

М.Ю.Губин, А.В.Прохоров, А.Ю.Лексин, С.М.Аракелян. Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г.Столетовых, Россия, 600000 Владимир, ул. Горького, 87; e-mail: avprokhorov@vlsu.ru
М.Г.Гладуш. Институт спектроскопии РАН, Россия, Московская обл., 142190 Троицк, ул. Физическая, 5; e-mail: mglad@isan.troitsk.ru

Поступила в редакцию 7 декабря 2011 г., после доработки – 25 апреля 2012 г.

дифракционных, нелинейных и диссипативных процессов, необходимых для стабилизации диссипативных солитонов.

Однако возможность достижения значительных концентраций оптически активных частиц в такой системе требует обязательного учета эффектов локального поля [14, 15]. Вносимые при этом поправки обуславливаются наличием близких диполь-дипольных взаимодействий в среде, проявляющихся, когда частота Раби для перехода в атоме сравнима с величиной соответствующей поправки на эти взаимодействия. Оценки для ансамблей резонансных частиц показывают, что необходимость учета близких диполь-дипольных взаимодействий начинается с концентраций 10^{15} см^{-3} .

В настоящей работе рассматривается формирование и последующее оптическое управление динамикой вихревого оптического солитона [4] в условиях рамановского режима работы Λ -схемы и (в нашем случае) при учете эффектов локального отклика среды. Задача подобна получению солитонов самоиндуцированной прозрачности с учетом влияния локального поля в резонансных средах [16]. Цель проводимых исследований заключается в нахождении оценочных значений параметров среды и поля, при которых модель заполненного газом холодных атомов ^{87}Rb отрезка полого фотонно-кристаллического волокна может быть использована в практической задаче эффективной генерации устойчивых оптических топологических образований для нужд оптических телекоммуникаций и манипулирования микрообъектами в световых пучках [17]. Учет локального поля должен выявить характер влияния близких диполь-дипольных взаимодействий на процесс стабилизации вихревых оптических солитонов в изучаемой схеме.

2. Основные соотношения для Λ -схемы взаимодействия в оптически плотной среде

В рассматриваемой задаче предполагается, что пробный световой импульс заданной формы с центральной

частотой излучения ω_p и напряженностью E_p распространяется вдоль оси z полого оптического волокна (волноводного канала, заполненного газом атомов ^{87}Rb) в направлении, противоположном направлению распространения непрерывного излучения оптической накачки с напряженностью E_c (рис.1,а). В рамановском пределе для Λ -схемы взаимодействия (рис.1,б), когда отстройка частоты поля от резонанса $|\Delta_c| > d_0\Gamma_{ac}$ [12], и в предположении, что все атомы изначально находятся на уровне $|b\rangle$, самосогласованная задача атомы + пробное поле описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ba} &= -\Gamma_1\sigma_{ba} - ig\epsilon - i\Omega\sigma_{bc} - i\chi_{ba}\sigma_{ba}, \\ \dot{\sigma}_{ca} &= -\Gamma_2\sigma_{ca} - ig\epsilon\sigma_{cb} - i\chi_{ba}\sigma_{ba}\sigma_{cb}, \\ \dot{\sigma}_{bc} &= i\Delta_3\sigma_{bc} + ig\epsilon\sigma_{ac} - i\Omega^*\sigma_{ba}, \\ \dot{\sigma}_{bb} &= ig\epsilon\sigma_{ab} - ig\epsilon^*\sigma_{ba},\end{aligned}\quad (1a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial z} - ic\frac{D_0}{2}\nabla_{\perp}^2\right)\epsilon = -igN\sigma_{ba},\quad (1b)$$

где σ_{mn} – элемент матрицы плотности; $\Gamma_{mn} = |\mu_{mn}|^2\omega_{mn}^3 \times (3\pi\hbar c^3\epsilon_0)^{-1}$ – скорость релаксации; $\chi_{mn} = \rho|\mu_{mn}|^2/(3\hbar\epsilon_0)$ – величина локального отклика среды; μ_{mn} – дипольный момент перехода между атомными уровнями m и n ; ρ – атомная концентрация; Ω и $g\epsilon$ – частоты Раби для накачивающего и пробного полей; $g = \mu_{ba}[\omega/(2\hbar\epsilon_0 V)]^{1/2}$ – атомно-оптическая константа связи; $\epsilon = A_p[\hbar\omega_p/(2\epsilon_0 V)]^{-1/2}$; A_p – медленно меняющаяся амплитуда пробного поля; V – объем квантования; $N = \rho V$ – количество атомов в области взаимодействия; $\Gamma_1 = -[i\Delta_b - (\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})/2]$; $\Gamma_2 = -[i\Delta_c - (\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})/2]$; $\Delta_3 = \Delta_b - \Delta_c$; $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; $D_0 = \lambda_p/\pi$ – параметр, задающий дифракцию в поперечном к оси z направлении; c – скорость света в вакууме; \hbar – постоянная Планка; ϵ_0 – электрическая постоянная. Применительно к рассматриваемой задаче оптическая

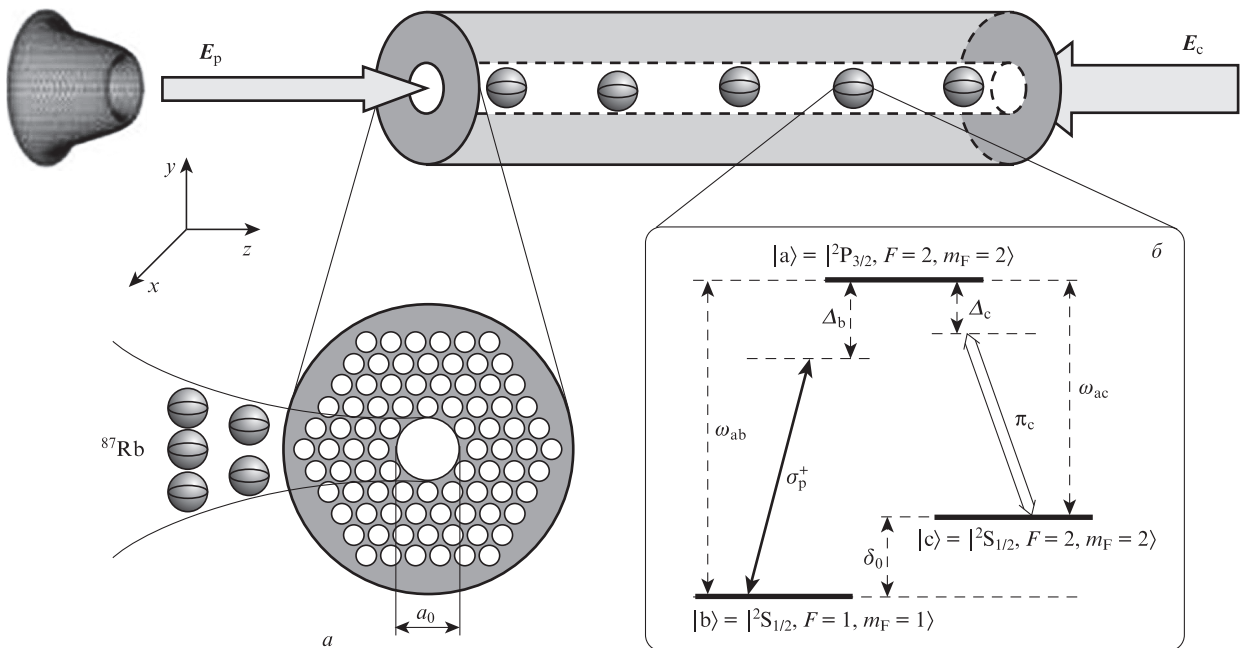


Рис.1. Модель полого, заполненного газом оптического волокна (а) и Λ -схема атомно-оптического взаимодействия для атомов ^{87}Rb (б). Частотная отстройка δ_{01} уровней $|c\rangle$ и $|b\rangle$ составляет 6.834 ГГц, дипольный матричный элемент μ_{ab} перехода $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ на длине волны $\lambda = 780.241 \text{ нм}$ равен $3.58 \times 10^{-29} \text{ Кл}\cdot\text{м}$.

толщина среды d_0 может быть определена через характерный линейный размер a_0 формируемых в плоскости xu топологических структур: $d_0 = g^2 N a_0 / (c \Gamma_{ac})$ (ср. с [12]).

При выводе (1) предполагалось, что вклад локального отклика среды сравним с частотой Раби для пробного перехода, т.е. $g\epsilon \approx \sigma_{ba} \chi_{ba}$; эффекты локального поля могут не учитываться на накачиваемом переходе при условии $\Omega > \sigma_{ca} \chi_{ca}$.

Для пробного светового импульса длительностью T_0 задача (1) может быть сведена к уравнению Гинзбурга–Ландау, описывающему его распространение в среде (ср. с [18]; см. Приложение):

$$\left(\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \epsilon + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} - i \frac{D_0}{2} \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial y^2} \right) - i \gamma_2 |\epsilon|^2 \epsilon + i \gamma_4 |\epsilon|^4 \epsilon = -\alpha_1 \epsilon - \alpha_2 |\epsilon|^2 \epsilon - \alpha_4 |\epsilon|^4 \epsilon, \quad (2)$$

где значения коэффициентов приведены в Приложении.

Уравнение (2) описывает сложное нелинейное взаимодействие между пробным полем и полем накачки, возникающее исключительно благодаря наличию поляризации на связанном с накачкой переходе ($\sigma_{ac} \neq 0$) в рамановском пределе Λ -схемы [11]. Учет локального поля в среде хотя и не вносит в уравнение (2) новых слагаемых, но уточняет картину нелинейных взаимодействий с соответствующими поправками (слагаемые с множителем χ , определяющим локальное поле, в Приложении) в случае оптически плотной среды.

Отметим, что в другом пределе Λ -схемы при околорезонансных условиях $\Delta_c \ll \Gamma_{ac}$ поляризация на переходе $|a\rangle \rightarrow |c\rangle$ исчезает – может реализовываться либо однофотонный по пробному полю процесс, лежащий в основе линейного эффекта электромагнитно-индуцированной прозрачности [3], либо его нелинейный аналог в случае достаточно мощного излучения оптической накачки [19]. Учет эффектов локального поля в таких задачах приводит к появлению еще одного слагаемого в выражении для частоты отстройки Δ_b и к дополнительной фазовой модуляции пробного импульса [20].

Для анализа уравнения (2) перейдем в бегущую систему координат с $T = t - z/v_g$ и, сделав замену переменных $u = \epsilon/\sqrt{|\epsilon_{in}|^2}$, $\xi = z/L_{dif}$, $X = x/a_0$, $Y = y/a_0$, введем следующие основные характерные параметры с размерностью длины: $L_{\beta_2} = T_0^2/|\beta_2|$ для дисперсии второго порядка, $L_{\gamma_2} = 1/(\gamma_2|\epsilon_{in}|^2)$ и $L_{\gamma_4} = 1/(\gamma_4|\epsilon_{in}|^4)$ для нелинейностей третьего и пятого порядков соответственно, $L_{\alpha_1} = 1/\alpha_1$ для линейных потерь, $L_{\alpha_2} = 1/(\alpha_2|\epsilon_{in}|^2)$ и $L_{\alpha_4} = 1/(\alpha_4|\epsilon_{in}|^4)$ для нелинейных потерь третьего и пятого порядков соответственно и $L_{dif} = a_0^2/D_0$ для дифракции, где a_0 и ϵ_{in} – начальная ширина и приведенная амплитуда оптического вихря. Знаки величин L_{β_2} , L_{γ_2} , L_{γ_4} , L_{α_1} , L_{α_2} и L_{α_4} зависят от знака соответствующих коэффициентов.

После домножения обеих частей уравнения (2) на L_{dif} и перехода к цилиндрическим координатам окончательно получим

$$i \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right) + |U|^2 U - \nu |U|^4 U = Q, \quad (3)$$

где $Q = i[-\delta U - \phi |U|^2 U - \mu |U|^4 U]$ – диссипативный член; $r = (X^2 + Y^2)^{1/2}$; θ – угол в сферических координатах; $U = uM$; $M^2 = L_{dif}/L_{\gamma_2}$. В (3) введены основные парамет-

ры задачи: $\delta = L_{dif}/L_{\alpha_1}$, $\phi = L_{\gamma_2}/L_{\alpha_2}$, $\mu = L_{\gamma_2}^2/(L_{\alpha_4} L_{dif})$, $\nu = L_{\gamma_2}^2/(L_{\gamma_4} L_{dif})$.

Поскольку при используемых далее параметрах взаимодействия справедливо неравенство $L_{dif} \ll L_{\beta_2}$, дисперсионное слагаемое в уравнении (3) исключено и далее речь идет только о пространственных эффектах при распространении излучения.

3. Формирование вихревых солитонов в заполненных газом оптических волокнах

Следуя концепции диссипативных солитонов [14], для поддержания энергии светлых солитонов на неизменном уровне по мере их распространения в среде необходимо реализовать чередование эффектов поглощения и усиления для различных участков на огибающей пробного светового импульса. Это может происходить при выполнении неравенств $\delta > 0$, $\phi < 0$, $\mu > 0$, знаки которых определяются сочетанием знаков соответствующих коэффициентов.

На рис.2 представлены зависимости характерных диссипативных параметров от частоты отстройки поля накачки от резонанса Δ_c при использовании в качестве модельной среды заполненного газом атомов ^{87}Rb одномодового оптического волокна при следующих условиях: атомная концентрация $\rho = 7.3 \times 10^{21} \text{ м}^{-3}$, частота отстройки пробного поля $\Delta_b = 0$, скорости релаксации $\Gamma_{ab} = \Gamma_{ac} = 2.5 \times 10^8 \text{ Гц}$, величина локального отклика $\chi_{ab} \equiv \chi = 3.36 \times 10^9$. Интенсивности используемых полей выбраны следующими: $I_c = 58 \text{ Вт/см}^2$ для поля накачки и $I_p = 58 \text{ мВт/см}^2$ для пробного поля. Соответствующие частоты Раби могут быть рассчитаны по формулам $\Omega = \mu_{ac} E_c / \hbar$ и $g\epsilon = \mu_{ab} E_p / \hbar$ через напряженности полей $E_{c,p} = [2I_{c,p}/(\epsilon\epsilon_0)]^{1/2}$ и составят $\Omega = 7.13 \times 10^9 \text{ с}^{-1}$ и $g\epsilon = 2.25 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$. При выборе $a_0 = 11 \text{ мкм}$ и с учетом рассчитанных значений параметров $g = 1.3 \times 10^6 \text{ с}^{-1}$ и $N = 19.7 \times 10^8$ соответствие задачи рамановскому пределу взаимодействия обусловлено выполнением соотношения $\Delta_c/(d_0 \Gamma_{ac}) \approx 6.5$.

Область, в которой требуемые для стабилизации солитона неравенства могут быть удовлетворены в рассматриваемой модели, расположена в левой части рис.2. Для дальнейшего моделирования зафиксируем вблизи порога генерации точку А, которой соответствует частота от-

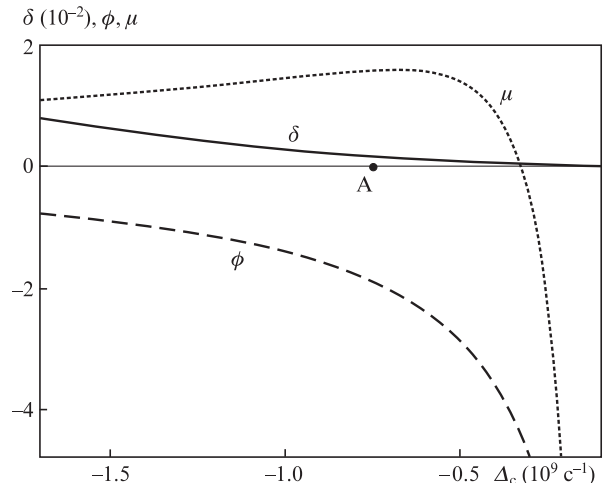


Рис.2. Частотные зависимости коэффициентов диссипативной части безразмерного уравнения Гинзбурга–Ландау (3) при начальной длительности пробного импульса $T_0 = 10 \text{ нс}$.

стройки $\Delta_c^A = -7.5 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$. В этой точке выполняется дополнительное условие сохранения формы диссипативного солитона $L_{\text{dif}} \simeq L_{\gamma_2}$ с учетом того, что $D > 0$ и $\gamma_2 > 0$ [21].

Используя вариационные методы, с помощью уравнения (3) найдем области значений параметров, при которых в нашей задаче могут возникать устойчивые солитоны. При этом остановимся на важном классе диссипативных вихревых солитонов, описываемых выражением [18]

$$U = A_0 A \left(\frac{r}{R_0 R} \right)^S \exp \left[-\frac{r^2}{2(R_0 R)^2} + i \left(C \frac{r^2}{R_0^2} + S\theta + \Psi \right) \right], \quad (4)$$

где A , R , C , Ψ – амплитуда, пространственная ширина, кривизна волнового фронта и фаза импульса соответственно. Параметр S определяет топологический заряд вихревого солитона и в настоящей работе принят равным единице.

Коэффициенты A_0 и R_0 могут быть получены из условия нормировки полной мощности лазерного излучения

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |U(r, \theta)|^2 r dr d\theta = \pi S! A_0^2 R_0^2 A^2 R^2;$$

в простейшем случае $P = A^2 R^2$ имеем $A_0 = 1/(R_0 \sqrt{\pi})$ и далее полагаем $R_0 = 1$.

На практике эффекты диффузионного расплывания в атомных ансамблях, как правило, приводят к заполнению светом центрального провала в распределении интенсивности вихревого солитона (4) даже при наличии долговременного сохранения внешнего профиля в виде светлого солитона при его распространении в таких средах [5]. Для самоподдержания в процессе распространения формы вихревых солитонов (4) помимо баланса нелинейно-дисперсионных и диссипативных эффектов [21] требуется также выполнение дополнительных условий, связанных, например, с наличием оптической диффузии [2, 22] либо модуляции показателя преломления [23] и/или поглощения с помощью функций сложного вида [18]. В последнем случае параметр линейного поглощения может быть заменен новым пространственно-зависящим (координата r) эффективным параметром $\delta_{\text{eff}} = \delta - Vr^2$, что соответствует внедрению в заполненное газом волокно дополнительного насыщающегося поглотителя; этот случай мы и рассматриваем далее, полагая везде $V = -0.03$.

Подробный анализ устойчивости вихревых солитонов при линеаризации управляющего уравнения более общего по сравнению с (3) вида (которое, по всей видимости, может быть получено при решении самосогласованной задачи путем серии последовательных приближений и без разложения нелинейных по полю функций для матрицы плотности в степенные ряды; см. Приложение) и с учетом оптической диффузии приведен в работе [24].

Используя уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial \bar{L}_c}{\partial \eta'} \right) - \frac{\partial \bar{L}_c}{\partial \eta} = 2 \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty \int_0^{2\pi} Qr \frac{\partial U^*}{\partial \eta} dr d\theta \right),$$

где

$$\bar{L}_c = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} L_c dr d\theta$$

– усредненный консервативный лагранжиан уравнения (3), а $\eta = \{A(\xi), R(\xi), C(\xi), \Psi(\xi)\}$ – набор варьируемых параметров функций пространственной координаты ξ , и с учетом (4) получаем

$$\frac{dA}{d\xi} = -\frac{5\phi A^3}{16\pi} - \frac{8\mu A^5}{81\pi^2} + A(-\delta - C + VR^2),$$

$$\frac{dR}{d\xi} = \frac{\phi A^2 R}{16\pi} + \frac{2\mu A^4 R}{81\pi^2} + CR + VR^3, \quad (5)$$

$$\frac{dC}{d\xi} = -C^2 + \frac{1}{8R^4} - \frac{A^2}{16\pi R^2} + \frac{2vA^4}{81\pi^2 R^2},$$

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{3A^2}{8\pi} - \frac{10vA^4}{81\pi^2} - \frac{1}{2R^2}.$$

В приближении малой частотной модуляции ($C^2 \simeq 0$; ср. с [18]) справедлива следующая система уравнений, упрощающая поиск стационарных точек решения системы (5):

$$C = \frac{A^2(-81\pi\phi - 32A^2\mu)}{1296\pi^2} - \frac{162\pi^2 V}{A^2(81\pi - 32A^2v)},$$

$$R^2 = \frac{162\pi^2}{A^2(81\pi - 32A^2v)}, \quad (6)$$

$$-\frac{5\phi A^3}{16\pi} - \frac{8\mu A^5}{81\pi^2} + A(-\delta - C + VR^2) = 0.$$

Система уравнений (6) имеет 16 решений, только два из которых отвечают физическим ограничениям, накладываемым на энергию и ширину вихревого солитона ($A > 0$, $R > 0$ и $A, R \in \mathbb{R}$), при этом лишь одно из них с бóльшим значением A и отрицательной частотной модуляцией ($C < 0$) будет являться устойчивым [18].

На рис.3 приведена параметрическая плоскость, образованная следующими параметрами: плотностью резонансных атомов в системе ρ и частотой отстройки поля накачки от резонанса Δ_c . Серым цветом выделена область

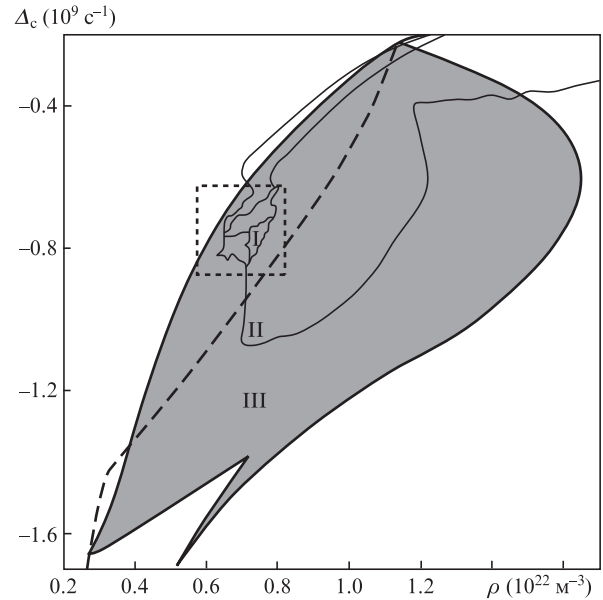


Рис.3. Параметрическая плоскость в координатах частота отстройки поля накачки от резонанса Δ_c и плотность ρ резонансных атомов, загруженных в волокно. Выделенная серая область – область существования стационарных вихревых солитонов, полученная вариационным путем. Цифрами отмечены найденные прямым численным моделированием уравнения (3) области истинной устойчивости осесимметричных вихревых солитонов (I), перехода к вихревым солитонам с $S = 0$ (II) и потери устойчивости (III). Штриховая линия – сепаратриса $C = 0$. Параметры взаимодействия соответствуют рис.2 (см. описание рис.2 в тексте).

стабильности вихревого солитона для выбранного физического решения системы уравнений (6) [18]. Данная область стабильности определялась из анализа собственных значений λ_j матрицы Якоби системы уравнений (5), т.е. условием $\text{Re}(\lambda_j) < 0$, где $j = 1, 2, 3$ [25], и соответствующей точке устойчивого фокуса.

Прямое численное моделирование уравнения (3) с перебором параметров η для функции вида (4) и с учетом начальных возмущений R и C [24, 26] показывает, что набор полученных устойчивых решений упрощенной системы (6) оказывается весьма приближенным, а истинная область стабильности (отмечена цифрой I на рис.3 и 4) имеет значительно меньшие размеры. Внутри полученной вариационным путем области устойчивости проявляется «тонкая» структура в виде отдельных зон стабильности для солитонов с модифицированными формами, а также зона III, где оптические вихри затухают.

В частности, для области II (точке В на рис.4 из этой области при $\rho = 7.3 \times 10^{21} \text{ м}^{-3}$ и $\Delta_c = -8.7 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$ соответствуют параметры $v = 0.5052$, $\delta = 0.0023$, $\phi = -1.6255$ и $\mu = 1.5319$ уравнения (3)) фазовый портрет системы при условии $\lambda_3 < \text{Re}(\lambda_{1,2})$ трансформируется в два узких пуч-

ка фазовых траекторий, значительно сужающихся вблизи самой особой точки. Таким образом, даже сильные начальные возмущения параметров подстановки (4) быстро гасятся при стремлении фазовых траекторий из дальней зоны фазового пространства к такой особой точке. Однако небольшие флуктуации параметров вихревого солитона в самой особой точке выводят систему на неустойчивую траекторию. В итоге вихревой солитон спонтанно теряет топологический заряд и переходит в новое устойчивое состояние с $S = 0$ (см. вставки к рис.4). Это новый тип эволюции вихревых солитонов, не описанный в [18].

Области IV и V являются переходными: в области IV (точке D из этой области при $\rho = 6.8 \times 10^{21} \text{ м}^{-3}$ и $\Delta_c = -7.9 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$ соответствуют параметры $v = 0.3240$, $\delta = 0.0018$, $\phi = -1.7989$ и $\mu = 1.5183$ уравнения (3)) осуществляется спонтанный переход осесимметричного вихря в двугорбые, а в области V (точке E из этой области при $\rho = 7.5 \times 10^{21} \text{ м}^{-3}$ и $\Delta_c = -7 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$ соответствуют параметры $v = 0.3448$, $\delta = 0.0015$, $\phi = -2.0409$ и $\mu = 1.6160$ уравнения (3)) – в односторонние несимметричные устойчивые вихревые солитоны. Бифуркации подобного типа описаны в [24].

В области VI (точке F из этой области при $\rho = 7.5 \times 10^{21} \text{ м}^{-3}$ и $\Delta_c = -6.3 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$ соответствуют параметры $v = 0.2372$, $\delta = 0.0013$, $\phi = -2.2755$ и $\mu = 1.6131$ уравнения (3)) учет угловых эффектов в (3) приводит к разрушению вихревых солитонов с появлением на их месте отдельных нестационарных многогорбых локализованных структур, которые, однако, не затухают, а испытывают постоянную эволюцию [27]. В области III (точке С из этой области при $\rho = 6 \times 10^{21} \text{ м}^{-3}$ и $\Delta_c = -8.5 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$ соответствуют параметры $v = 0.2261$, $\delta = 0.0018$, $\phi = -1.6652$ и $\mu = 1.4236$ уравнения (3)) происходит потеря стабильности и затухание вихревых солитонов. При выборе начальных значений A , R и C , отличных от значений, соответствующих уравнениям (6), в области III наблюдается расщепление оптического пучка на отдельные филаменты, которые либо затухают, либо продолжают эволюционировать во времени аналогично тому, как описано в [26].

Отметим, что точка А (см. также рис.2) действительно попадает в область стабильности, рассчитанную на основе обоих – вариационного и численного – методов, что соответствует проведенному выше качественному анализу уравнения (3). При этом для формирования вихревого солитона в рассматриваемой среде начальные пространственная ширина r_R и линейная частотная модуляция C_R светового импульса вида (4) должны составлять 12 мкм и $-7.7 \times 10^8 \text{ м}^{-2}$ соответственно (безразмерные параметры $A = 3.496$, $R = 1.096$, $C = -0.093$); рассчитанные параметры уравнения (3) для точки А на рис.4 таковы: $v = 0.3723$, $\delta = 0.0017$, $\phi = -1.8995$ и $\mu = 1.5817$.

Принципиальным моментом в рассматриваемой задаче оказывается учет эффектов локального поля. Действительно, в случае $\chi = 0$, т.е. без учета этих эффектов, область стабильности не только трансформируется, но и полностью выходит за пределы представленной на рис.3 и 4 параметрической плоскости. При этом все полученные решения для вихревых солитонов становятся неустойчивыми. Таким образом, стратегия возможного эксперимента кардинально меняется с учетом локального отклика среды.

Дальнейший анализ и получение других, отличных от найденной, областей стабильности вихревого солитона требуют решения полной нелинейной системы (5), а также проведения расширенного численного многомерного эксперимента в пространстве параметров задачи.

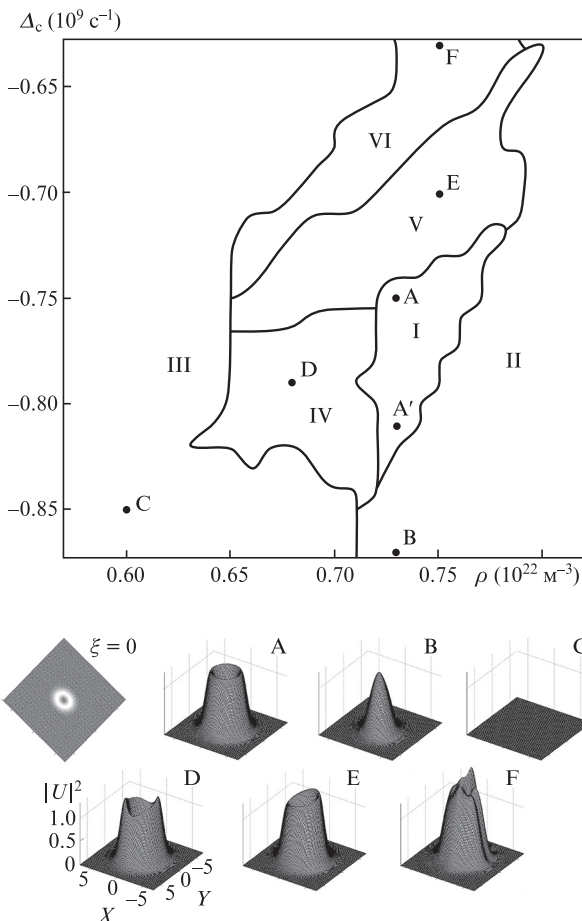


Рис.4. Масштабированная область вокруг зоны истинной устойчивости I на рис.3. Внизу представлены полученные прямым численным моделированием уравнения (3) пространственные профили (в плоскости XY) оптических пучков после прохождения ими расстояния $\xi = 100000$, соответствующего $\sim 50 \text{ м}$ в среде заполненного газом волокна. Буквы над каждым распределением отвечают точкам на параметрической плоскости, координаты которых используются для расчета параметров уравнения (3); распределение для $\xi = 0$ соответствует форме оптического вихря на входе в среду (вид сверху) при наличии азимутальных возмущений.

4. Оптическое управление динамикой вихревых солитонов без нарушения условий их стабильности

Рассмотрим возможность управления динамикой получаемых вихревых солитонов при соблюдении условий задачи, не нарушающих их стабильность.

На рис.5,*a* представлена кусочно-линейная функция, зависящая от времени t , при внешнем изменении частоты отстройки поля накачки (параметр ζ) и соответствующие ей изменения групповой скорости Δv_g (выражение для v_g приведено в Приложении) в процессе распространения вихревого солитона в заполненном газом волокне.

Выбрав в качестве начальных условий значения параметров для точки А на рис.4 (при неизменной на начальном отрезке времени $t \in [0; 10 \text{ нс}]$ отстройке Δ_c^A), получим стабилизацию соответствующего вихревого солитона за характерное время $\sim 5 \text{ нс}$ (рис.5,*б*).

Изменение частоты отстройки до величины $\Delta_c^{A'}$ для точки А' в той же области стабильности (рис.4) приводит к уменьшению групповой скорости вихревого солитона на $\Delta v_g = 1.8 \times 10^4 \text{ м/с}$ с сохранением устойчивого режима для осесимметричного солитона. Возникающие при этом осцилляции интенсивности вихревого солитона быстро затухают за время $\tau_d = 3 \text{ нс}$ (рис.5,*б*).

При возвращении частоты отстройки к прежней величине Δ_c^A реализуется схожий сценарий стабилизации сим-

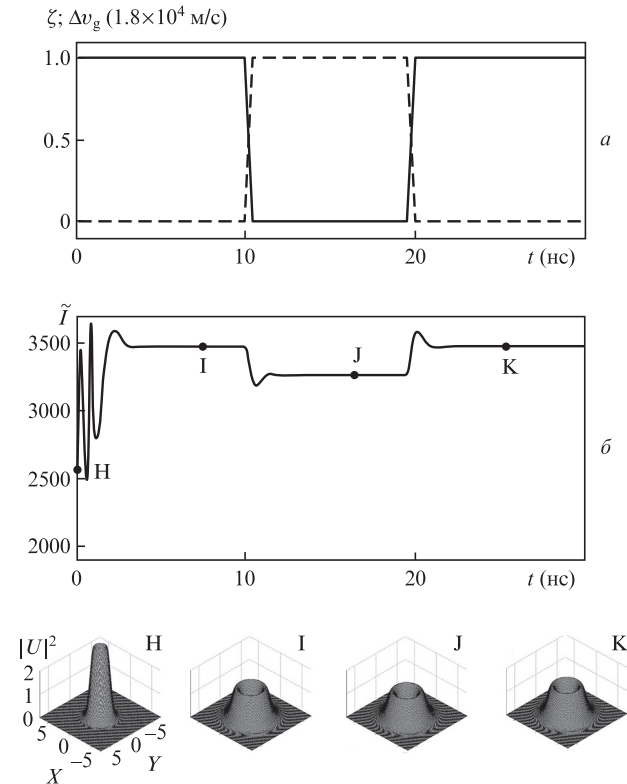


Рис.5. Оптическое управление динамикой вихревого солитона: временные зависимости относительного приращения частоты отстройки $\zeta = (\Delta_c - \Delta_c^A)/(\Delta_c^A - \Delta_c^A)$ (сплошная линия) и изменения групповой скорости $\Delta v_g = v_g^A - v_g$ (штриховая линия) (*a*), а также полученная при численном моделировании (3) временная зависимость нормированной интенсивности \tilde{I} вихревого солитона (4), соответствующая почти мгновенной перестройке от точки А к точке А' на рис.4 (*б*). Внизу – форма вихревого солитона в различные моменты времени, отвечающие рис.5,*б*.

метричного вихревого солитона на уровне, предшествующем началу изменений Δ_c .

В нижней части рис.5 представлен также процесс деформации вихревого солитона по мере его распространения в заполненном газом волокне. Эти результаты получены при численном моделировании уравнения (3) с начальной функцией (4) при модуляции $\Delta_c(t)$, соответствующей рис.5,*a*. При этом общая длина заполненного газом волокна, отвечающая всему интервалу времени $t \in (0; t_K)$, составляет 14 см.

Отметим, что изменение времени переключения влияет лишь на характер перехода к новым условиям стабильности вихревого солитона со временем установления τ_{st} при расположении точек А и А' внутри области I (рис.4).

Однако смещение частоты отстройки $\Delta_c(t)$ за пределы зоны стабильности – при переходе от точки А к точке В на рис.4 – приводит к индуцированной полем накачки потере топологического заряда вихревым солитоном и переходу к новым условиям стабильности, но уже для безвихревого солитона (см. рис.6,*a* и форму оптического пучка для точки К на рис.6,*б*). Попытка реализации сценария возврата системы к начальным условиям, сходного с при-

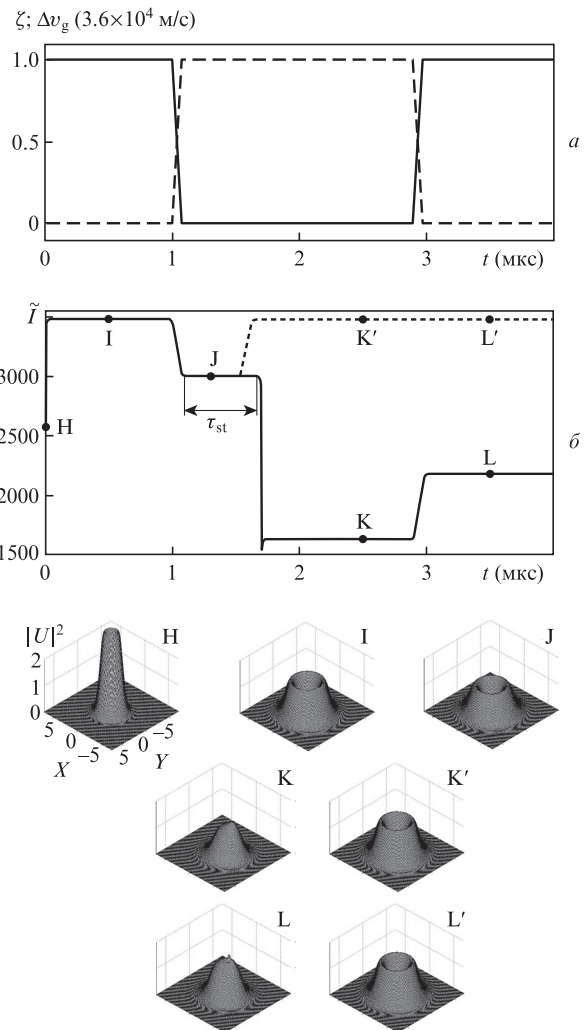


Рис.6. То же, что и на рис.5, но при перестройке параметра Δ_c к условиям, отвечающим точке В на рис.4. Пунктирная линия на рис.6,*б* соответствует обратной перестройке от точки В к точке А на рис.4 в течение времени установления τ_{st} с сохранением формы вихревого солитона.

веденным на рис.5, терпит неудачу: изменение частоты отстройки Δ_c при обратном переходе к точке А также приводит к стабилизации солитона, однако его вихревая структура для $S = 1$ уже не поддерживается (см. форму оптического пучка для точки L на рис.6,б).

Особенностью системы для условий, соответствующих рис.6, является наличие процесса установления с характерным временем установления τ_{st} , возникающего уже после достижения при модуляции Δ_c условий, отвечающих точке В на рис.4, и предшествующего почти мгновенному переключению от вихревого солитона к безвихревому режиму. Для рис.6,б время установления составит 0.5 мкс. Выполненная в течение этого времени обратная модуляция Δ_c к условиям, соответствующим точке А, не позволяет распастись вихревой структуре солитона (см. профили оптического пучка для точек К' и L' на рис.6,б). Указанная особенность обуславливает дополнительные возможности использования предложенной схемы оптического управления диссипативными вихревыми солитонами для оптической обработки информации.

Отметим, что осуществление оптической модуляции за пределы области устойчивости диссипативных солитонов, полученной численными методами (рис.3), приводит к быстрому уменьшению интенсивности вихревого солитона до полного затухания без возможности дальнейшего восстановления его формы.

5. Заключение

В работе рассмотрена задача формирования и управления динамикой оптических вихревых солитонов пробного поля, возникающих в рамановском режиме Λ -схемы взаимодействия при учете эффектов локального поля. С использованием вариационных методов и прямого численного моделирования предсказаны области значений параметров среды и полей, при которых в модели заполненного газом атомов ^{87}Rb полого оптического волокна может происходить эффективное формирование вихревых оптических солитонов. Учет диполь-дипольных взаимодействий в такой задаче оказывает стабилизирующее действие на процесс формирования диссипативных солитонов. Установлено, что возникающая в системе модуляция частоты отстройки поля накачки от резонанса не приводит к драматическому разрушению вихревого солитона в том случае, когда такие изменения не выходят за границы найденной области стабильности. Это обуславливает дополнительную топологическую помехоустойчивость предложенной схемы для генерации вихревых оптических солитонов с существенно более стабильными значениями параметров. К другим преимуществам схемы относятся возможность чисто оптического управления параметрами формируемых вихревых солитонов и сравнительно простого сопряжения с оптоволоконными линиями связи, а также компактность схемы.

Экспериментальное наблюдение рассмотренных эффектов является непростой задачей и возможно, например, при использовании заполненных газом атомов бозе-эйнштейновского конденсата фотонно-кристаллических волокон с полой сердцевиной; время жизни когерентного состояния атомной системы в этом случае достигает 400 мкс [13].

Существенное увеличение фазовой плотности ансамбля атомов при их загрузке в волокно из магнитооптической ловушки, содержащей бозе-эйнштейновский конденсат,

возможно с использованием предложенной в [28] геометрии сужающегося волокна, заканчивающегося горизонтальным участком с диаметром примерно несколько микрометров.

Дополнительным фактором увеличения времени жизни когерентного состояния может служить эффект каналирования атомов в волноводе при создании вдоль его полой сердцевины поверхностной световой волны, взаимодействуя с которой атомы могут терять свою энергию. Приводимые в работе [28] оценки показывают, что при достижимой концентрации ансамбля атомов 10^{15} см^{-3} температура атомной системы в таком волноводе может быть оценена как $1.5 \times 10^{-5} \text{ К}$.

В отсутствие значительных уширений спектральных линий и при минимальных для данной газовой среды диффузионных эффектах становится возможным уверенное наблюдение проанализированных нами эффектов в образце тонкого, заполненного газом волокна.

Отметим также, что вызывает интерес задача осуществления практически полной остановки и последующего ускорения в оптической схеме солитонных образований без нарушения их стабильности. Такой подход позволит избежать процедуры записи профиля волнового пакета на состояния атомных возбуждений среды, при которой время хранения квантовой информации ограничено временем когерентности атомной среды. Это особенно актуально для реализации оригинальных алгоритмов обработки квантовой информации на основе кодирования и управления временными задержками пробных импульсов в многолучевых схемах атомно-оптического взаимодействия [29], в том числе при использовании квантовых солитонов. Для решения такой задачи необходим поиск более широкой области стабильности вихревых солитонов на основе анализа фазовых портретов полной системы уравнений (5), аналогично тому, как это описано в [30] для случая обычных светлых солитонов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/11823) и государственного задания высшим учебным заведениям (№ 2.4053.2011), а также РФФИ (гранты № 12-02-97529-р_центр_а и 10-02-13300-РТ_оми).

Приложение. Вывод коэффициентов уравнения Гинзбурга–Ландау для рамановского предела Λ -схемы атомно-оптического взаимодействия

При выводе уравнения (2) будем использовать уравнение распространения пробного поля, которое в общем случае имеет вид (16). Это требует нахождения в явном виде выражения для элемента матрицы плотности σ_{ba} (поляризации) на пробном переходе, зависящего только от материальных параметров среды и характеристик оптических полей. Решим систему уравнений (1а) в два этапа.

На первом этапе определим поляризацию системы на нижних уровнях σ_{cb} , исходя из приближения неизменных населенностей уровней в стационарном режиме, т. е. при $\dot{\sigma}_{aa} = \dot{\sigma}_{bb} = \dot{\sigma}_{cc} = 0$. Кроме того, полагаем, что пробный импульс имеет достаточно большую длительность по сравнению с обратной частотой Раби для поля накачки ($T_0 > (\Omega d_0)^{-1}$) для обеспечения «плавного входа» [12]; это

позволяет не учитывать быстрые осцилляции σ_{ba} [31], и, следовательно, глубокая модуляция огибающей пробного импульса отсутствует. Таким образом, для переднего фронта пробного импульса должны быть справедливы условия $\dot{\sigma}_{ba} = \dot{\sigma}_{ca} = 0, \dot{\sigma}_{bc} = 0$.

С учетом данного приближения из (1а) может быть получено алгебраическое уравнение для поляризации σ_{bc} :

$$\Omega\chi g \varepsilon^* \sigma_{bc}^2 + i(\Gamma_1 g^2 |\varepsilon|^2 + \Gamma_2^* \Theta) \sigma_{bc} + i g \varepsilon \Omega^* \Gamma_2^* = 0, \quad (\text{П1})$$

корни которого имеют следующий вид:

$$\sigma_{bc} = \frac{-i(\Gamma_1 g^2 |\varepsilon|^2 + \Gamma_2^* \Theta) \pm \sqrt{D}}{2\Omega\chi g \varepsilon^*}, \quad (\text{П2})$$

где $D = -(\Gamma_1 g^2 |\varepsilon|^2 + \Gamma_2^* \Theta)^2 - 4i\chi g^2 |\Omega|^2 \Gamma_2^* |\varepsilon|^2$; $\Theta = |\Omega|^2 - i\Delta_3(\Gamma_1 + i\chi)$; $\chi \equiv \chi_{ba}$.

Решения (П2) определяют фактически две ветви спиновых возбуждений, возникающих на переходе между уровнями |b) и |c) (рис.1). Решение, содержащее знак минус в (П2), приводит к задаче с насыщающейся нелинейностью типа $\sigma_{bc} \approx 1/\varepsilon$ и в настоящей работе не рассматривается.

Разложение другого, содержащего знак плюс, решения (П2) в ряд по пробному полю ε приводит к следующему соотношению:

$$\sigma_{bc} \approx -\frac{g\Omega^*}{\Theta} \varepsilon + \frac{g^3 \Omega^*}{\Gamma_2^* \Theta^2} \left(\Gamma_1 + i \frac{|\Omega|^2 \chi}{\Theta} \right) |\varepsilon|^2 \varepsilon - \frac{g^5 \Omega^*}{(\Gamma_2^*)^2 \Theta^3} \left(\Gamma_1^2 + \frac{3i|\Omega|^2 \chi \Gamma_1}{\Theta} - \frac{2\chi^2 |\Omega|^4}{\Theta^2} \right) |\varepsilon|^4 \varepsilon. \quad (\text{П3})$$

На втором этапе выразим из уравнений для $\dot{\sigma}_{ca}$ и $\dot{\sigma}_{bc}$ системы (1а) поляризацию атомной системы на пробном переходе в режиме распространения в ней пробного импульса при $\dot{\sigma}_{bc} \neq 0$. Тогда получим

$$\sigma_{ba} = \left[i \left(\dot{\sigma}_{bc} - i \frac{g\varepsilon\chi}{\Omega\Gamma_2^*} \sigma_{bc} \dot{\sigma}_{cb} \right) + \left(\Delta_3 + i \frac{g^2 |\varepsilon|^2}{\Gamma_2^*} \right) \sigma_{bc} + i \frac{g\varepsilon\chi}{\Omega\Gamma_2^*} |\sigma_{bc}|^2 \left(\Delta_3 - i \frac{g^2 |\varepsilon|^2}{\Gamma_2^*} \right) \right] \left(\Omega^* - \frac{g^2 |\varepsilon|^2 \chi^2}{\Omega |\Gamma_2^*|^2} |\sigma_{bc}|^2 \right)^{-1}. \quad (\text{П4})$$

Подставив разложение (П3) в (П4) и выполнив дополнительное разложение, имеем

$$\sigma_{ba} \approx -i \frac{g}{\Theta} \dot{\varepsilon} - \frac{g\Delta_3}{\Theta} \varepsilon - i \frac{g^3}{\Gamma_2^* \Theta} \left[1 + i\Delta_3 \left(\frac{\Gamma_1}{\Theta} + i \frac{\chi}{\Theta^*} + i \frac{\chi |\Omega|^2}{\Theta^2} \right) \right] |\varepsilon|^2 \varepsilon + g^5 \left\{ \frac{1}{(\Theta\Gamma_2^*)^2} \left[i \left(1 - \frac{\chi\Delta_3}{\Theta^*} \right) \times \left(\Gamma_1 + i \frac{\chi |\Omega|^2}{\Theta} \right) - \frac{\Delta_3}{\Theta} \left(\Gamma_1^2 - 2 \frac{\chi^2 |\Omega|^4}{\Theta^2} + 3i \frac{\chi \Gamma_1 |\Omega|^2}{\Theta} \right) \right] - \frac{i\chi}{|\Theta|^2 |\Gamma_2^*|^2} \left[i + \frac{\Delta_3}{\Theta^*} \left(\Gamma_1^* - i \frac{\chi |\Omega|^2}{\Theta^*} \right) - i \frac{\chi\Delta_3}{\Theta} \right] \right\} |\varepsilon|^4 \varepsilon. \quad (\text{П5})$$

Для того чтобы определить вклады эффектов, которые требуется учесть в рассматриваемой системе, подставим найденное выражение (П5) в (1б) и получим уравнение

$$\left(\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - i \frac{D_0}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} \right) - i\gamma_2 |\varepsilon|^2 \varepsilon + i\gamma_4 |\varepsilon|^4 \varepsilon = -\alpha_1 \varepsilon - \alpha_2 |\varepsilon|^2 \varepsilon - \alpha_4 |\varepsilon|^4 \varepsilon, \quad (\text{П6})$$

где соответствующие коэффициенты имеют вид

$$v_g = \frac{c}{1 + \text{Re}(g^2 N / \Theta)}$$

– групповая скорость;

$$\beta_2 = \frac{d\beta_1}{d\omega_p} = \frac{1}{v_g^2} \frac{dv_g}{d\Delta_b}$$

– дисперсия групповых скоростей второго порядка;

$$\gamma_2 = \text{Im} \left\{ -\frac{g^4 N}{\Theta \Gamma_2^* c} \left[1 + i\Delta_3 \left(\frac{\Gamma_1}{\Theta} + i \frac{\chi}{\Theta^*} + i \frac{\chi |\Omega|^2}{\Theta^2} \right) \right] \right\}$$

– коэффициент кубической нелинейности;

$$\gamma_4 = \text{Im} \left\{ \frac{ig^6 N}{c} \left(\frac{1}{(\Theta\Gamma_2^*)^2} \left[i \left(1 - \frac{\chi\Delta_3}{\Theta^*} \right) \left(\Gamma_1 + i \frac{\chi |\Omega|^2}{\Theta} \right) - \frac{\Delta_3}{\Theta} \left(\Gamma_1^2 - 2 \frac{\chi^2 |\Omega|^4}{\Theta^2} + 3i \frac{\chi \Gamma_1 |\Omega|^2}{\Theta} \right) \right] - \frac{i\chi}{|\Theta|^2 |\Gamma_2^*|^2} \left[i + \frac{\Delta_3}{\Theta^*} \left(\Gamma_1^* - i \frac{\chi |\Omega|^2}{\Theta^*} \right) - i \frac{\chi\Delta_3}{\Theta} \right] \right) \right\}$$

– коэффициент нелинейности пятого порядка;

$$\alpha_1 = \text{Im} \left(\frac{g^2 N \Delta_3}{\Theta c} \right)$$

– коэффициент линейных потерь;

$$\alpha_2 = \text{Re} \left\{ \frac{g^4 N}{\Theta \Gamma_2^* c} \left[1 + i\Delta_3 \left(\frac{\Gamma_1}{\Theta} + i \frac{\chi}{\Theta^*} + i \frac{\chi |\Omega|^2}{\Theta^2} \right) \right] \right\}$$

– коэффициент кубических нелинейных потерь;

$$\alpha_4 = \text{Re} \left\{ \frac{ig^6 N}{c} \left(\frac{1}{(\Theta\Gamma_2^*)^2} \left[i \left(1 - \frac{\chi\Delta_3}{\Theta^*} \right) \left(\Gamma_1 + i \frac{\chi |\Omega|^2}{\Theta} \right) - \frac{\Delta_3}{\Theta} \left(\Gamma_1^2 - 2 \frac{\chi^2 |\Omega|^4}{\Theta^2} + 3i \frac{\chi \Gamma_1 |\Omega|^2}{\Theta} \right) \right] - \frac{i\chi}{|\Theta|^2 |\Gamma_2^*|^2} \left[i + \frac{\Delta_3}{\Theta^*} \left(\Gamma_1^* - i \frac{\chi |\Omega|^2}{\Theta^*} \right) - i \frac{\chi\Delta_3}{\Theta} \right] \right) \right\}$$

– коэффициент нелинейных потерь пятого порядка.

Уравнение (П6) соответствует (2) и с указанными коэффициентами определяет основное соотношение для рассматриваемой задачи.

1. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. *Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов* (М.: Физматлит, 2005).
2. Розанов Н.Н. *Диссипативные оптические солитоны. От микро-нано- и атто-* (М.: Физматлит, 2011).
3. Fleischhauer M., Lukin M.D. *Phys. Rev. A*, **65**, 022314 (2002).

4. Розанов Н.Н., Федоров А.В., Федоров С.В., Ходова Г.В. *Оптика и спектроскопия*, **79**, 868 (1995).
5. Pugatch R., Shuker M., Firstenberg O., Ron A., Davidson N. *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 203601 (2007).
6. Гурашвили В.А., Зотов А.М., Короленко П.В., Напартович А.П., Павлов С.П., Родин А.В., Саркаров Н.Э. *Квантовая электроника*, **31**, 821 (2001).
7. Smith A.V., Armstrong D.J. *Opt. Express*, **11** (8), 868 (2003).
8. Bezuharov K., Dreischuh A., Paulus G.G., Schatzel M.G., Walther H. *Opt. Lett.*, **29** (16), 1942 (2004).
9. Шведов В.Г., Издебская Я.В., Алексеев А.Н., Воляр А.В. *Письма в ЖТФ*, **28**, 87 (2002).
10. Genevet P., Barland S., Giudici M., Tredicce J.R. *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 223902 (2010).
11. Gorbach A.V., Skryabin D.V., Harvey C.N. *Phys. Rev. A*, **77**, 063810 (2008).
12. Gorshkov A.V., André A., Lukin M.D., Sørensen A.S. *Phys. Rev. A*, **76**, 033805 (2007).
13. Bajcsy M., Hofferberth S., Peyronel T., Balic V., Liang Q., Zibrov A.S., Vuletic V., Lukin M.D. *Phys. Rev. A*, **83**, 063830 (2011).
14. Hopf F.A., Bowden C.M., Louisell W.H. *Phys. Rev. A*, **29**, 2591 (1984).
15. Кузнецов Д.В., Гладуш М.Г., Рерих Вл.К. *ЖЭТФ*, **140** (4), 742 (2011).
16. Власов Р.А., Лемеза А.М., Михневич С.Ю. *Квантовая электроника*, **36** (6), 539 (2006).
17. Сойфер В.А., Котляр В.В., Хонина С.Н., Скиданов Р.В. *Компьютерная оптика*, **28**, 5 (2005).
18. Skarka V., Aleksic N.B., Leblond H., Malomed B.A., Mihalache D. *Phys. Rev. Lett.*, **105**, 213901 (2010).
19. Прохоров А.В., Алоджанц А.П., Аракелян С.М. *Письма в ЖЭТФ*, **80** (12), 870 (2004).
20. Fleischhaker R., Dey T.N., Evers J. *Phys. Rev. A*, **82**, 013815 (2010).
21. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. *Солитоны* (М.: Физматлит, 2003).
22. Mihalache D., Mazilu D., Lederer F., Leblond H., Malomed B.A. *Phys. Rev. A*, **76**, 045803 (2007).
23. Mihalache D., Mazilu D., Skarka V., Malomed B.A., Leblond H., Aleksic N.B., Lederer F. *Phys. Rev. A*, **82**, 023813 (2010).
24. Fedorov S.V., Rosanov N.N., Shatsev A.N., Veretenov N.A., Vladimirov A.G. *IEEE J. Quantum Electron.*, **39**, 197 (2003).
25. Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* (Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000).
26. Skarka V., Aleksic N.B., Derbazi M., Berezghiani V.I. *Phys. Rev. B*, **81**, 035202 (2010).
27. Розанов Н.Н., Федоров С.В., Шацев А.Н. *Оптика и спектроскопия*, **95**, 902 (2003).
28. Балькин В.И., Ларюшин Д.В., Субботин М.В., Летохов В.С. *Письма в ЖЭТФ*, **63** (10), 763 (1996).
29. Прохоров А.В., Алоджанц А.П., Аракелян С.М. *Квантовая электроника*, **37**, 1115 (2007).
30. Прохоров А.В., Губин М.Ю., Лексин А.Ю., Гладуш М.Г., Алоджанц А.П., Аракелян С.М. *ЖЭТФ*, **142** (7), 5 (2012).
31. Скалли М.О., Зубайри М.С. *Квантовая оптика* (М.: Физматлит, 2003).