

Об аналогии между радиацией Хокинга и нелинейно-оптическим процессом генерирования субгармоник (волноводная модель черной дыры)

Л.А.Ривлин

Наблюдение в мысленном эксперименте за поведением фотонов волноводной модели пространственной локализации электромагнитного поля устанавливает детальную аналогию между квантово-механическим рождением фотонных пар на горизонте испаряющейся черной дыры и классическим нелинейным явлением генерирования субгармоник.

Ключевые слова: пространственная локализация электромагнитного поля и волноводная модель фотона, рождение фотонных пар на горизонте и испарение черной дыры, нелинейно-оптическое генерирование субгармоник.

1. Введение

Воспроизведение некоторых свойств черных дыр [1] в цикле мысленных «настошных» экспериментов, обобщенных в [2, 3], позволило сделать ряд поучительных наблюдений, способствующих более ясному пониманию этого сложного космического явления. В настоящей заметке обсуждается явление радиации Хокинга, которое состоит в рождении фотонных пар и испарении черной дыры, что препятствует ее бессмертию [1].

Обсуждение, как и все другие мысленные эксперименты цикла [2,3], построено на так называемой волноводной модели фотона, которая является эвристически продуктивным воплощением концепции физической бессодержательности образа пространственно неограниченного электромагнитного волнового поля (в частности, бесконечной плоской волны).

Эта концепция есть непосредственное следствие физической нереализуемости электромагнитной волны, которая характеризуется полным потоком энергии

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E} dx dy > 0, \quad (1)$$

не испытывающим каких-либо ограничений, т. е. с

$$\Phi \neq \infty. \quad (2)$$

Здесь $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 f(x, y, z, t)$ – плотность потока энергии; $\mathcal{E}_0 > 0$ – амплитуда плотности потока вектора Пойнтинга; x, y – поперечные координаты; t – время; волна распространяется вдоль оси z .

Утверждение (1), (2) не может быть выполнено при $f(x, y) = \text{const} > 0$, поскольку несобственный интеграл (1) имеет конечное значение лишь при достаточно быстром убывании функции $f(x, y)$ с ростом координат x, y , т. е. при пространственной локализации волнового поля \mathcal{E}

(функция \mathcal{E} записана здесь в декартовых координатах, но ее поперечное ограничение, перпендикулярное направлению распространения волны, с очевидностью присутствует и во всех других конфигурациях: в цилиндрических координатах (r, ϕ, z) оно определяется радиусом r , в полярной системе (ϕ, ϑ, r) сферической волны – конечностью телесного угла 4π и т. п.).

В итоге образ электромагнитного поля с поперечно неограниченным волновым потоком (в частности, идеальная плоская волна) едва ли может быть признан содержательным с физической точки зрения (что, разумеется, не исключает применения плоской волны как хорошего приближения во многих задачах).

Важным следствием логической неизбежности пространственной локализации поля является неперенное присутствие в любом волновом поле неподвижной стоячей компоненты («остановленного» света), которая вносит «покоящийся» вклад в полную энергию поля [3]. Это служит предпосылкой к введению понятия конечной инертной и гравитационной массы покоя фотона [2, 3].

Необходимо, тем не менее, подчеркнуть, что физическое содержание подобной массы покоя фотона, зависящей от структуры стороннего пространственного ограничения, не может претендовать на абсолютную имманентность, присущую массам покоя обычных частиц (электрон, нейтрон и т. п.), являющихся фундаментальными константами. Поэтому для фотона используется название *наблюдаемая масса покоя* фотона.

В обсуждаемом мысленном эксперименте в развитие концепции пространственно ограниченного волнового поля проведена детальная аналогия между рождением пар в «настошной» волноводной модели испаряющейся черной дыры (радиацией Хокинга) и классическим нелинейно-оптическим процессом генерирования субгармоник [4, 5].

2. Волноводная модель пространственно локализованного волнового поля

Волноводная модель [2, 3], являющаяся одной из возможных реализацией концепции пространственной локализации поля, представляет собой бесконечно глубокую потенциальную яму для фотонов со свободным распространением волны вдоль оси z и с полным ограничением

Л.А.Ривлин. Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (МГТУ МИРЭА), Лаборатория прикладной физики, Россия, 119454 Москва, просп. Вернадского, 78; e-mail: lev.rivlin@gmail.com

поля по поперечным координатам. Эта модель, при простом математическом аппарате [6] не теряющая достаточной общности, адекватно отражает основные свойства пространственно ограниченных волновых полей, в частности демонстрирует полное совпадение математических выражений, управляющих фотонами волноводной моды, с соответствующими формулами релятивистской кинематики и динамики обычной частицы с инертной и гравитационной массой покоя $M = M_{\mu\nu}$, равной приписываемой фотону наблюдаемой массе покоя – массоподобной величине

$$M_{\mu\nu} = \hbar\omega_{\mu\nu}/c^2, \quad (3)$$

где $\omega_{\mu\nu}$ – критическая частота волноводной моды с целочисленными индексами μ и ν ; c – скорость света [2, 3]. Из (3) видно, что именно *поперечная стоячая* компонента поля моды, определяющая ее критическую частоту, ответственна за наблюдаемую массу покоя, внося *неподвижный* вклад в полную энергию.

Важно подчеркнуть неформальный характер упомянутых совпадений и физическую содержательность (3): прямое вычисление [7] показало, что энергия $\hbar\omega_{\mu\nu}$ в точности равна работе, произведенной внешней силой против силы светового давления при компрессии поля из окружающего свободного пространства в ограниченный объем волноводной моды.

В подтверждение сказанного уместно подчеркнуть, что во всем цикле мысленных кинетических и динамических экспериментов с фотонами в волноводе [2, 3], в том числе и в воспроизводящих «черную дыру на лабораторном столе» [2, 8, 9], не удалось обнаружить каких-либо различий между поведением фотона, характеризуемого величиной $M_{\mu\nu}$ (3), и обычной частицы с инертной и гравитационной массой $M = M_{\mu\nu}$.

3. «Настольная черная дыра»

Мысленный эксперимент по воспроизведению «настольной черной дыры» [2, 8, 9] состоит в наблюдении за поведением константы распространения волны

$$k_{\mu\nu}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\omega_{\mu\nu}}{c}\right)^2 \approx k_{\infty}^2 \left[1 - 2\frac{\Psi}{c^2} \left(1 + \frac{2}{1 - \omega_{\mu\nu\infty}^2/\omega^2}\right)\right] \quad (4)$$

при перемещении волны вверх по вертикальному волноводу в гравитационном поле с потенциалом $\Psi < 0$, нормированным на бесконечности на ноль, $\Psi_{\infty} = 0$, причем $|\Psi| \ll c^2$.

В соответствии с (4) причиной поведения фотона являются зависимости от потенциала Ψ двух параметров: скорости света $c \approx c_{\infty}(1 + 2\Psi/c^2)$ и поперечного размера волновода $r \approx r_{\infty}(1 + 2\Psi/c^2)$, который определяет критическую частоту моды $\omega_{\mu\nu}$, а следовательно (3) – наблюдаемую массу покоя фотона

$$M_{\mu\nu} = \frac{\hbar\omega_{\mu\nu}}{c^2} \approx M_{\mu\nu\infty} \left(1 - \frac{3\Psi}{c^2}\right). \quad (5)$$

Формула (5) совпадает с фундаментальным выражением для гравитационной массы $M = M_{\infty}(1 - 3\Psi/c^2)$ обычных частиц (индексом ∞ здесь и далее обозначены параметры при $\Psi = \Psi_{\infty} = 0$).

Из (4) следует, что при перемещении вверх ($\Delta\Psi > 0$) из точки с потенциалом Ψ в точку с потенциалом $\Psi + \Delta\Psi$ при условии $1 - (\omega_{\mu\nu}/\omega)^2 \ll 1$, отражающем достаточное превышение энергетического эквивалента наблюдаемой

массы покоя фотона $M_{\mu\nu}$ (3) над его кинетической энергией, происходит уменьшение постоянной распространения от $k_{\mu\nu}$ до $k_{\mu\nu}(\Delta\Psi)$:

$$\frac{k_{\mu\nu}^2(\Delta\Psi)}{k_{\mu\nu}^2} \approx 1 - 2\frac{\Delta\Psi}{c^2} \left(1 + \frac{2}{1 - \omega_{\mu\nu}^2/\omega^2}\right). \quad (6)$$

Это уменьшение продолжается вплоть до полной остановки движения вверх при $k_{\mu\nu}(\Delta\Psi) = 0$, когда гравитационный потенциал возрастает на величину

$$\Delta\Psi \approx \frac{c^2}{4} [1 - (\omega_{\mu\nu}/\omega)^2]. \quad (7)$$

Таким образом, вертикальная координата, на которой выполняется равенство (7), есть по определению горизонт (предельная высота) $H(\Delta\Psi)$.

4. Нелинейно-оптический эквивалент радиации Хокинга

В космической черной дыре квантовые флуктуации вакуума порождают на горизонте H фотонные пары (равно как и другие пары частиц–античастиц), причем один из фотонов каждой пары покидает черную дыру (радиация Хокинга) [1].

Поведение фотонов в принятой волноводной модели дает основание для проведения наглядной детальной аналогии между этим квантово-механическим явлением и классическим нелинейно-оптическим процессом генерирования субгармоник [4, 5]. Последний в частном случае деления частоты пополам отвечает распаду достигшего горизонта первичного фотона с энергией ${}_p\hbar\omega = \hbar\omega_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}c^2$ и нулевой константой распространения ${}_p k_{\mu\nu} = 0$ на пару вторичных фотонов с равными энергиями,

$${}_s\hbar\omega = \frac{{}_p\hbar\omega}{2} = \frac{{}_p\hbar\omega_{\mu\nu}}{2}, \quad (8)$$

и константами распространения ${}_s k_{\uparrow}$ и ${}_s k_{\downarrow}$, одинаковыми по модулю,

$$({}_s k_{\uparrow})^2 = ({}_s k_{\downarrow})^2 = ({}_p\omega/2c)^2 - ({}_s M c/\hbar)^2, \quad (9)$$

но обратными по знаку, ${}_s k_{\uparrow} = -{}_s k_{\downarrow}$ (здесь параметры первичных и вторичных фотонов обозначены индексами p и s , а направления движения вниз и вверх – стрелками \downarrow и \uparrow).

Выполнение законов сохранения энергии и импульса в волноводе неизменяемого сечения требует, чтобы первичный фотон и фотоны вторичной пары принадлежали к разным модам с индексами $\mu\nu$ и $\sigma\tau$, поскольку в соответствии с (8), (9)

$$({}_p M_{\mu\nu})^2 = (2{}_s M_{\sigma\tau})^2 + (2\hbar{}_s k/c)^2. \quad (10)$$

Отсюда следует, что критические частоты и наблюдаемые массы каждого из фотонов пары с необходимостью уступают этим же величинам первичной волны:

$${}_s\omega_{\sigma\tau} < {}_p\omega_{\mu\nu}, \quad {}_s M_{\sigma\tau} < {}_p M_{\mu\nu}. \quad (11)$$

Существенное замечание относится к структурам полей первичной и вторичных мод: их топологическая однородность или неоднородность может способствовать или препятствовать генерированию субгармоник (рождению фотонных пар).

Полезная иллюстрация полученных результатов: пусть в волноводе круглого сечения с радиусом R первичные фотоны, принадлежащие моде TM_{02} с критической частотой ${}_{p}\omega_{02} = 2\pi c/1.14R$ и массой ${}_{p}M_{02} = 2\pi\hbar/1.14cR$, распадаются на вторичные фотонные пары в моды TM_{01} с критической частотой ${}_{s}\omega_{01} = 2\pi c/2.61R$ и массой ${}_{s}M_{01} = 2\pi\hbar/2.61cR$. Граничные условия, определяющие критические частоты первичной и вторичной мод, состоят в совпадении радиальной координаты R со вторым и первым корнями функции Бесселя первого рода нулевого порядка [6]. Топологическая однородность структур полей выражается в отсутствии во всех модах периодических вариаций по окружности (альтернативная неблагоприятная структурная ситуация состояла бы, например, в попытке сочетании первичной моды TM_{01} со вторичной модой TM_{11}).

Информативность волноводной модели черной дыры, оперирующей фотонами с единственной частотой ω , может быть существенно увеличена отказом от монохроматичности и рассмотрением фотонного ансамбля широкого спектра частот. При этом все фотоны ансамбля должны достигать горизонта при одних и тех же высоте и приращении гравитационного потенциала $\Delta\Psi$, т. е. по (7) все фотоны ансамбля должны иметь единое отношение $\omega_{\mu\nu}/\omega = M_{\mu\nu}c^2/\hbar\omega$, что требует очевидного индивидуального выбора моды для каждого фотонного волновода. В итоге такой модернизации радиация Хокинга приобрела бы более близкий к реальности широкополосный характер, что открыло бы путь к оценке эффективной температуры [1] модели испаряющейся черной дыры (возможно, ее уместнее называть волноводной моделью черной дыры с белым светом).

5. Заключение

Итогом мысленных экспериментов над волноводной моделью фотона является установление аналогии между

квантово-механическим рождением фотонных пар (радиацией Хокинга) на горизонте испаряющейся черной дыры и классическим нелинейно-оптическим процессом генерирования субгармоник; некоторые из закономерностей этой аналогии почти полностью эквивалентны.

Дальнейшему исследованию подлежат оставшийся нераскрытым нелинейно-оптический механизм генерирования субгармоник при достижении волной вертикальной координаты, совпадающей с горизонтом H , а также физическая природа нелинейности. Очевидно, что в рамках примененного феноменологического подхода едва ли было возможно проделать это столь же детально, как в классической нелинейной оптике [7, 8]. Тем не менее можно предсказать существование в пространстве, непосредственно прилегающем к горизонту H , гигантской электромагнитной нелинейности, которая обусловлена неустойчивостью вакуума и разрывными изменениями кинематики волны на вертикальном отрезке нулевой протяженности, выражающимися в перемене знака скорости при ее конечном модуле по обе стороны от H . Эти разрывные изменения константы распространения имеют характер интегральной дельта-функции с конечным перепадом $\Delta k = 2{}_sk = 2[({}_p\omega/2c)^2 - ({}_sMc/\hbar)^2]^{1/2}$ на стремящемся к нулю интервале аргумента.

1. Фролов В.П. *УФН*, **118**, 347 (1976).
2. Ривлин Л.А. *УФН*, **167**, 309 (1997).
3. Ривлин Л.А. *Квантовая электроника*, **33**, 777 (2003).
4. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. *Проблемы нелинейной оптики* (М.: изд-е ИНИ АН СССР, 1964).
5. Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В. *Прикладная нелинейная оптика* (М.: Радио и связь, 1982).
6. Де-Бройль Л. *Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах* (М.: ГИИЛ, 1948).
7. Ривлин Л.А. *УФН*, **161**, 143 (1991).
8. Ривлин Л.А. *Квантовая электроника*, **19**, 830 (1992).
9. Ривлин Л.А. *Квантовая электроника*, **22**, 625 (1995).