ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ

PACS 42.65.-k, 42.65.Wi, 42.65.Tg, 05.45.-a

Пучок Эйри как автомодельное решение задачи распространения щелевого пучка лазерного излучения в линейной среде и в фоторефрактивном кристалле с диффузионной нелинейностью

В.А.Макаров, В.М.Петникова, В.В.Шувалов

Проанализированы автомодельные решения задачи распространения щелевого пучка с плоским волновым фронтом в линейной среде и в фоторефрактивном кристалле с диффузионной нелинейностью. Показано, что в последнем случае, несмотря на наличие нелинейного члена в волновом уравнении, для решений указанного класса за счет насыщения выполняется принцип линейной суперпозиции. В то же время нарушение зеркальной симметрии волнового уравнения по поперечной координате в нелинейном случае и требование пространственной локализации модифицируют одно из локализованных частных решений (пучок Эйри) соответствующей линейной задачи и запрещают существование других решений этого класса.

Ключевые слова: *волновое уравнение, пучок Эйри, фоторефрактивный кристалл, диффузионная нелинейность, задача распространения, автомодельное решение.*

1. Введение

Распространение так называемого щелевого пучка излучения в фоторефрактивном кристалле (ФРК) с диффузионной нелинейностью в приближении размерности «1+1» описывается укороченным волновым уравнением [1]

$$\mathrm{i}\frac{\partial\phi(s,\xi)}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi(s,\xi)}{\partial s^2}+\gamma\frac{\partial|\phi(s,\xi)|^2}{\partial s}\frac{\phi(s,\xi)}{|\phi(s,\xi)|^2}=0. \qquad (1)$$

При выводе (1) подстановкой $\boldsymbol{E}(x,z)=\boldsymbol{e}\phi(x,z)\exp(\mathrm{i}kz)$ выделена медленная огибающая $\phi(x,z)$ поля световой волны $\boldsymbol{E}(x,z)$ с вектором поляризации $\boldsymbol{e}$, направленным вдоль оси x. Заменами переменных $s=x/x_0$ и $\xi=z/(kx_0^2)$, где x_0 – произвольный масштабный коэффициент, введены безразмерные координаты. Здесь $k=k_0n_{\mathrm{e}}$ – волновое число; $k_0=2\pi/\lambda_0$; λ_0 – длина волны излучения в вакууме; n_{e} – показатель преломления необыкновенной волны в ФРК; $\gamma=(k_0^2x_0n_{\mathrm{e}}^4r_{33})(K_{\mathrm{B}}T/2e_0)$; r_{33} – работающая в выбранной геометрии (оптическая ось $\boldsymbol{c}$ ФРК SBN направлена вдоль вектора $\boldsymbol{e}$ и оси x) компонента матрицы линейного электрооптического эффекта; K_{B} – постоянная Больцмана; T – температура; e_0 – заряд электрона. Анализируется случай диффузионной нелинейности [2], в котором темновая освещенность ФРК полагается пренебрежимо малой. Последнее приближение не совсем корректно и нарушается в тех точках оси x, где диффузионное поле обнуляется.

В.А.Макаров, В.М.Петникова, В.В.Шувалов. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы, 1; e-mail: enter@ilc.edu.ru, v_petnikova@yahoo.com, vsh@vsh.phys.msu.su

Поступила в редакцию 30 мая 2013 г., после доработки – 6 июля 2013 г.

Авторами [1] было показано, что уравнение (1) имеет точное частное решение:

$$\phi(s,\xi)=\phi_0\mathrm{Ai}(\varepsilon\eta+4\gamma^2)\exp(-2\gamma\eta)\exp[\mathrm{i}(\varepsilon\eta+\xi^2/12)\xi/2], \qquad (2)$$

где $\eta=s-(\varepsilon\xi^2/4)$; ϕ_0 – произвольная константа; Ai(x) – функция Эйри [3]; $\varepsilon=\pm1$ при положительном и отрицательном γ соответственно. Появление ε в выражении для γ связано с требованием затухания экспоненциального множителя в (2) на осциллирующем хвосте функции Эйри.

Легко убедиться, что

1) в отличие от самосогласованных решений для случаев керровской и большинства других типов нелинейности амплитуда решения (2) произвольна;

2) как и для других солитоноподобных решений, в распределении интенсивности отсутствуют проявления дифракции и $|\phi(s,\xi)|^2=|\phi(\eta)|^2=|\phi_0|^2\mathrm{Ai}^2(\varepsilon\eta+4\gamma^2)\exp(-4\gamma\eta)$;

3) профиль не испытывающего дифракционного расплывания распределения $|\phi(s,\xi)|^2$ движется в ФРК по параболической траектории $s=(\varepsilon\xi^2/4)+\mathrm{const}$;

4) волновой фронт при этом движении меняет наклон (перекрестный член в фазе) и всегда (при фиксированных значениях ξ) является плоским (фаза линейно зависит от s и η);

5) принудительное устранение нелинейности (переход к пределу $\gamma\to0$) не уничтожает решение (2), а преобразует его к известному по работам М.Бэрри [4] виду

$$\phi(s,\xi)=\phi_0\mathrm{Ai}(\varepsilon\eta)\exp[\mathrm{i}(\varepsilon\eta+\xi^2/12)\xi/2]. \qquad (3)$$

Правда, в отличие от [4], ε в (3) может принимать любое из двух значений $\varepsilon=\pm1$, что отражает симметрию (1) относительно преобразования $s\leftrightarrow -s$ при $\gamma=0$ и вытекающее из этого существование двух зеркально-симметричных решений в форме пучков Эйри. Само же волновое уравнение в этом пределе приобретает стандартный вид:

$$\mathrm{i}\frac{\partial\phi(s,\xi)}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi(s,\xi)}{\partial s^2}=0. \qquad (4)$$

Отметим, что изучение особенностей автомодельных решений в форме пучков Эйри, включая некоторые менее идеализированные и более реалистичные с точки зрения практики ситуации, привлекает в последние годы все большее внимание исследователей [5–11].

С учетом изложенного возникают три основных вопроса. Во-первых, чем же так замечательна диффузионная нелинейность, что ее появление, по сути дела, лишь слегка модифицирует некий класс частных решений соответствующей линейной задачи (4)? Во-вторых, почему происходит эта модификация? И наконец, в-третьих, какие именно общие свойства характеризуют этот класс частных решений? Ниже будет показано, что, несмотря на наличие нелинейного члена в (1), для частных решений определенного класса выполнен принцип линейной суперпозиции и что именно к этому классу относятся не только решения (2) и (3), но и некоторые другие известные частные решения, например (1) и (4) [12].

2. Линейная среда

Начнем анализ с линейной задачи (4) и перепишем искомое решение в форме

$$\phi(s,\xi) = \phi(\eta,\xi) = F(\eta,\xi)\exp[\mathrm{i}\varphi(\eta,\xi)], \tag{5}$$

где $\eta = \eta(s,\xi)$ и ξ играют роль поперечной и продольной координат соответственно, а $F(\eta,\xi)$, $\eta(s,\xi)$ и $\varphi(\eta,\xi)$ – некие пока неизвестные функции. Тогда на траектории $s = s(\xi)$, описываемой уравнением $\eta(s,\xi) = \eta_0 = \mathrm{const}$, $F^2(\eta,\xi) = F^2(\eta_0,\xi)$ и $\varphi(\eta,\xi) = \varphi(\eta_0,\xi)$ для (5) будут зависеть только от ξ, что позволит описывать «солитоноподобные» (нет зависимости от ξ), а также расходящиеся/сходящиеся (есть зависимость от ξ) пучки, не обязательно распространяющиеся по прямой.

Подставив (5) в (4) и разделив действительные и мнимые части, найдем

$$F(\eta,\xi)\left\{2\frac{\partial\varphi(\eta,\xi)}{\partial\eta}\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial\xi}+2\frac{\partial\varphi(\eta,\xi)}{\partial\xi}+\left[\frac{\partial\varphi(\eta,\xi)}{\partial\eta}\right]^2\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial s}\right]^2\right\}-\frac{\partial F(\eta,\xi)}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta(s,\xi)}{\partial s^2}$$
$$-\frac{\partial^2 F(\eta,\xi)}{\partial\eta^2}\left[\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial s}\right]^2 = 0, \tag{6а}$$

$$F(\eta,\xi)\left\{\frac{\partial\varphi(\eta,\xi)}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta(s,\xi)}{\partial s^2}+\frac{\partial^2\varphi(\eta,\xi)}{\partial\eta^2}\left[\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial s}\right]^2\right\}$$
$$+2\frac{\partial F(\eta,\xi)}{\partial\eta}\left\{\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial\xi}+\frac{\partial\varphi(\eta,\xi)}{\partial\eta}\left[\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial s}\right]^2\right\}$$
$$+2\frac{\partial F(\eta,\xi)}{\partial\xi}= 0. \tag{6б}$$

Заметим, что система (6) является точной и полностью эквивалентной (4). Далее нужно сделать некие предположения, которые и выделят определенный класс решений (6).

Ограничимся автомодельными решениями, которые, распространяясь (изменение ξ), не меняют функциональный характер распределения интенсивности $F^2(\eta,\xi)$ по поперечной координате. Отметим, что это требование не ограничивает анализ только солитоноподобными решениями [13, 14], т.к. замена $s \to \eta(s,\xi)$ допускает зависящие от ξ изменения масштабов по s. Отсюда $F(\eta,\xi) \to F(\eta)$ и $\partial F(\eta,\xi)/\partial\xi \to \partial F(\eta)/\partial\xi \equiv 0$, с учетом чего (6) можно переписать в виде

$$F(\eta)\left\{2\frac{\partial\varphi(\eta,\xi)}{\partial\eta}\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial\xi}+2\frac{\partial\varphi(\eta,\xi)}{\partial\xi}+\left[\frac{\partial\varphi(\eta,\xi)}{\partial\eta}\right]^2\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial s}\right]^2\right\}-\frac{\mathrm{d}F(\eta)}{\mathrm{d}\eta}\frac{\partial^2\eta(s,\xi)}{\partial s^2}-\frac{\mathrm{d}^2F(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2}\left[\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial s}\right]^2 = 0, \tag{7а}$$

$$F(\eta)\left\{\frac{\partial\varphi(\eta,\xi)}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta(s,\xi)}{\partial s^2}+\frac{\partial^2\varphi(\eta,\xi)}{\partial\eta^2}\left[\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial s}\right]^2\right\}$$
$$+2\frac{\mathrm{d}F(\eta)}{\mathrm{d}\eta}\left\{\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial\xi}+\frac{\partial\varphi(\eta,\xi)}{\partial\eta}\left[\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial s}\right]^2\right\} = 0. \tag{7б}$$

Заметим теперь, что солитоноподобные решения обязаны иметь плоский волновой фронт, который, правда, может быть наклонен относительно нормали к поперечной координате η. Этот наклон может зависеть от ξ, меняясь по мере распространения. Следовательно,

$$\varphi(\eta,\xi) = \alpha(\xi) + \beta(\xi)\eta(s,\xi) \tag{8}$$

и

$$\frac{\partial\varphi(\eta,\xi)}{\partial\eta} = \beta(\xi),\ \frac{\partial\varphi(\eta,\xi)}{\partial\xi} = \frac{\mathrm{d}\alpha(\xi)}{\mathrm{d}\xi}+\frac{\mathrm{d}\beta(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\eta(s,\xi),$$

где $\alpha(\xi)$ и $\beta(\xi)$ – некие неизвестные функции. Подставив соответствующие выражения в (7), найдем

$$F(\eta)\left\{2\beta(\xi)\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial\xi}+2\left[\frac{\mathrm{d}\alpha(\xi)}{\mathrm{d}\xi}+\frac{\mathrm{d}\beta(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\eta(s,\xi)\right]+\beta^2(\xi)\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial s}\right]^2\right\}-\frac{\mathrm{d}F(\eta)}{\mathrm{d}\eta}\frac{\partial^2\eta(s,\xi)}{\partial s^2}-\frac{\mathrm{d}^2F(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2}\left[\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial s}\right]^2 = 0, \tag{9а}$$

$$F(\eta)\beta(\xi)\frac{\partial^2\eta(s,\xi)}{\partial s^2}+2\frac{\mathrm{d}F(\eta)}{d\eta}$$
$$\times\left\{\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial\xi}+\beta(\xi)\left[\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial s}\right]^2\right\}= 0. \tag{9б}$$

Потребуем теперь, чтобы для искомого класса решений $\partial^2\eta(s,\xi)/\partial s^2 = 0$, откуда

$$\eta(s,\xi) = \mu(\xi) + \nu(\xi)s, \tag{10}$$

где $\mu(\xi)$ и $\nu(\xi)$ – некие неизвестные функции. Условие (10) отражает автомодельный характер искомых решений, допуская для них зависящий от ξ поперечный сдвиг и однородный (при заданном значении ξ) по s коэффициент масштабирования. Заметим, что ограничение (10) очень эффективно, т.к. устраняет член с первой производной $\mathrm{d}F(\eta)/\mathrm{d}\eta$ в (9а), а также член, пропорциональный $F(\eta)$, в (9б). Семейство траекторий перемещения точек равной интенсивности $F^2(\eta_0)$ при этом оказывается заданным выражением $s = [\eta_0 - \mu(\xi)]/\nu(\xi)$, где η_0 – константа.

Подставив (10) в (9б), найдем, что

$$\frac{\mathrm{d}F(\eta)}{\mathrm{d}\eta}\left[\frac{\mathrm{d}\mu(\xi)}{\mathrm{d}\xi}+\frac{\mathrm{d}\nu(\xi)}{\mathrm{d}\xi}s+\beta(\xi)\nu^2(\xi)\right]= 0, \tag{11}$$

откуда

$$v(\xi) = v_0 = \mathrm{const}, \tag{12а}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mu(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + v_0^2\beta(\xi) = 0. \tag{12б}$$

Легко убедиться, что траектории перемещения точек равной интенсивности для этого класса решений подобны и просто смещены по s относительно друг друга.

Из (9а) следует, что

$$\frac{\mathrm{d}^2F(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2} - F(\eta)\left\{-\beta^2(\xi) + \frac{2}{v_0^2}\right. \\ \left.\times\left[\frac{\mathrm{d}\alpha(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \mu(\xi)\frac{\mathrm{d}\beta(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right] + \frac{2}{v_0}\frac{\mathrm{d}\beta(\xi)}{\mathrm{d}\xi}s\right\} = 0, \tag{13}$$

и можно сделать весьма важный вывод. Поскольку согласно исходному предположению функция $F(\eta)$ не может в явном виде зависеть от продольной координаты ξ (искомое решение является автомодельным), коэффициент в фигурных скобках при $F(\eta)$ в этом уравнении обязан сводиться к некой функции поперечной координаты η, т. е. должно быть выполнено условие

$$-\beta^2(\xi) + \frac{2}{v_0^2}\left[\frac{\mathrm{d}\alpha(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \mu(\xi)\frac{\mathrm{d}\beta(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right] + \frac{2}{v_0}\frac{\mathrm{d}\beta(\xi)}{\mathrm{d}\xi}s = H(\eta),$$

где $H(\eta)$ – некая неизвестная функция. С учетом условия (10) и линейности левой части выписанного нами соотношения относительно s удовлетворить этому требованию можно только в двух случаях: либо $H(\eta) \propto (\eta + \mathrm{const})$ и (13) сводится к уравнению для функции Эйри [3], либо $H(\eta) = \mathrm{const}$ и (13) переходит в уравнение незатухающих гармонических колебаний. Подчеркнем еще раз, что эти две возможности исчерпывают рассматриваемый нами класс автомодельных решений.

Потребуем теперь, например, чтобы уравнение (13) перешло в уравнение для функции Эйри [3]. Для этого должно быть выполнено условие

$$-\beta^2(\xi) + \frac{2}{v_0^2}\left[\frac{\mathrm{d}\alpha(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \mu(\xi)\frac{\mathrm{d}\beta(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right] \\ + \frac{2}{v_0}\frac{\mathrm{d}\beta(\xi)}{\mathrm{d}\xi}s = \eta = \mu(\xi) + v_0 s,$$

откуда

$$\alpha(\xi) = \alpha_0 + \frac{1}{3}\left(\beta_0 + \frac{1}{2}v_0^2\xi\right)^3, \tag{14а}$$

$$\beta(\xi) = \beta_0 + \frac{1}{2}v_0^2\xi, \tag{14б}$$

$$\mu(\xi) = \mu_0 - \left(\beta_0 + \frac{1}{2}v_0^2\xi\right)^2, \tag{14в}$$

где α_0, β_0 и μ_0 – константы интегрирования. В итоге найденное автомодельное решение описывается выражениями

$$\eta(s,\xi) = \mu_0 + v_0 s - \left(\beta_0 + \frac{1}{2}v_0^2\xi\right)^2, \tag{15а}$$

$$\varphi(\eta,\xi) = \alpha_0 + \left(\beta_0 + \frac{1}{2}v_0^2\xi\right)\eta(s,\xi) + \frac{1}{3}\left(\beta_0 + \frac{1}{2}v_0^2\xi\right)^3, \tag{15б}$$

$$\phi(s,\xi) = \phi_0\mathrm{Ai}(\eta)\exp[\mathrm{i}\varphi(\eta,\xi)]. \tag{15в}$$

Выражения (15а) и (15б) можно существенно упростить. Так, требование того, чтобы в плоскости $\xi = 0$ волновой фронт совпал с осью s, определяет значение $\beta_0 = 0$. Выбор положения точки $s = 0$ позволяет считать, что $\mu_0 = 0$. И, наконец, значение константы α_0, перенормировывающей скорость набега фазы по ξ, также можно обнулить при соответствующем выборе проекции волнового вектора на эту ось. Поэтому окончательно

$$\eta(s,\xi) = v_0 s - \left(\frac{1}{2}v_0^2\xi\right)^2, \tag{16а}$$

$$\varphi(\eta,\xi) = \frac{1}{2}v_0^2\xi\left[\eta(s,\xi) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}v_0^2\xi\right)^2\right], \tag{16б}$$

что, в принципе, совпадает с решением М.Бэрри [4]. Однако из (16а) следует, что, как и в (3), возможность изменения знака $v_0 \to -v_0$ определяет существование двух зеркально-симметричных относительно оси ξ семейств траекторий перемещения точек равной интенсивности, заданных выражением $s = v_0^{-1}[\eta_0 + (v_0^2\xi/2)^2]$.

Оставшиеся нерассмотренными автомодельные решения должны соответствовать ситуации, когда (13) сводится к уравнению незатухающих колебаний. Для этого надо, чтобы было выполнено условие

$$-\beta^2(\xi) + \frac{2}{v_0^2}\left[\frac{\mathrm{d}\alpha(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \mu(\xi)\frac{\mathrm{d}\beta(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right] \\ + \frac{2}{v_0}\frac{\mathrm{d}\beta(\xi)}{\mathrm{d}\xi}s = -\omega_0^2 = \mathrm{const},$$

откуда

$$\alpha(\xi) = \alpha_0 + \frac{v_0^2}{2}(\beta_0^2 - \omega_0^2)\xi, \tag{17а}$$

$$\beta(\xi) = \beta_0, \tag{17б}$$

$$\mu(\xi) = \mu_0 - \beta_0 v_0^2\xi. \tag{17в}$$

В итоге еще одно найденное решение описывается выражениями

$$\eta(s,\xi) = \mu_0 + v_0 s - \beta_0 v_0^2\xi, \tag{18а}$$

$$\varphi(\eta,\xi) = \alpha_0 + \beta_0\eta(s,\xi) + \frac{v_0^2}{2}(\beta_0^2 - \omega_0^2)\xi \\ = \alpha_0 + \beta_0\mu_0 + \beta_0 v_0 s - \frac{v_0^2}{2}(\beta_0^2 + \omega_0^2)\xi, \tag{18б}$$

$$\phi(s,\xi) = \phi_0\cos(\omega_0\eta)\exp[\mathrm{i}\varphi(\eta,\xi)]. \tag{18в}$$

Выражения (18а) и (18б) также можно упростить за счет выбора значений констант интегрирования. Легко убедиться (18б), что теперь волновой фронт сохраняет свою ориентацию в пространстве, и случай, когда он совпадает с осью s, соответствует двум возможностям. В первой (наиболее интересной из них) $\beta_0 = 0$, и при подходящем выборе положения точки $s = 0$ и начальной фазы ($\alpha_0 = 0$ и $\mu_0 = 0$)

$$\eta(s,\xi) = v_0 s, \tag{19а}$$

$$\varphi(\eta,\xi) = -\frac{v_0^2}{2}\omega_0^2\xi, \tag{19б}$$

что соответствует интерференционной картине от двух плоских волн, симметрично распространяющихся под неким углом к оси ξ.

Во втором случае нам придется предположить, что $v_0 = 0$, и решение

$$\eta(s,\xi) = \mu_0, \tag{20а}$$

$$\varphi(\eta,\xi) = \alpha_0 + \beta_0\mu_0 \tag{20б}$$

соответствует случаю распространения одной плоской волны с комплексной амплитудой $\tilde{\phi}_0 = \phi_0 \sin(\mu_0\omega_0) \times \exp[\mathrm{i}(\alpha_0 + \beta_0\mu_0)] = \mathrm{const}$ строго вдоль оси ξ.

3. ФРК с диффузионной нелинейностью

Перейдем к случаю распространения щелевого пучка в ФРК. После подстановки той же формы автомодельного решения $\phi(s,\xi) = F(\eta)\exp[\mathrm{i}\varphi(\eta,\xi)]$ член, ответственный за диффузионную нелинейность в волновом уравнении (1), принимает вид

$$\gamma\frac{\partial|\phi(s,\xi)|^2}{\partial s}\frac{\phi(s,\xi)}{|\phi(s,\xi)|^2} = 2\gamma\frac{\mathrm{d}F(\eta)}{\mathrm{d}\eta}\frac{\partial\eta(s,\xi)}{\partial s}\exp[\mathrm{i}\varphi(\eta,\xi)]. \tag{21}$$

Поэтому весь ход предыдущих рассуждений сохраняется вплоть до уравнения (13), и лишь в последнем появляется дополнительное слагаемое, пропорциональное $\mathrm{d}F(\eta)/\mathrm{d}\eta$ и ответственное за экспоненциальное затухание/нарастание (в зависимости от знака γ) по поперечной координате

$$\frac{\mathrm{d}^2F(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2} + 4\frac{\gamma}{v_0}\frac{\mathrm{d}F(\eta)}{\mathrm{d}\eta} - F(\eta)\Big\{-\beta^2(\xi) + \frac{2}{v_0^2}\Big[\frac{\mathrm{d}\alpha(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \mu(\xi)\frac{\mathrm{d}\beta(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\Big] + \frac{2}{v_0}\frac{\mathrm{d}\beta(\xi)}{\mathrm{d}\xi}s\Big\} = 0. \tag{22}$$

Поскольку найденное ранее решение (15) в форме пучка Эйри локализовано по η и в зависимости от знака v_0 экспоненциально спадает либо при $\eta \to +\infty$, либо при $\eta \to -\infty$, можно ожидать, что появляющийся за счет этого дополнительного члена экспоненциально растущий/спадающий хвост (при разумной скорости нарастания/спада) не будет препятствовать существованию одного из соответствующих локализованных решений.

Видно, что учет чисто диффузионной нелинейности, обусловленной насыщением, сохраняет для рассмотренного класса автомодельных решений линейность задачи. Однако теперь вследствие появления в (22) члена, пропорционального $\mathrm{d}F(\eta)/\mathrm{d}\eta$, оказывается нарушенной зеркальная симметрия задачи распространения по поперечной координате, поскольку замена $s \leftrightarrow -s$ изменяет волновое уравнение.

Решение уравнения (22) легко находится с использованием стандартной замены переменных $F(\eta) \to G(\eta)\exp(\sigma\eta)$, где $\sigma = -2\gamma/v_0$, что и определяет финальную форму подлежащего решению уравнения

$$\frac{\mathrm{d}^2G(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2} - G(\eta)\Big\{-\beta^2(\xi) + \frac{2}{v_0^2}\Big[\frac{\mathrm{d}\alpha(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \mu(\xi)\frac{\mathrm{d}\beta(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\Big] + \frac{2}{v_0}\frac{\mathrm{d}\beta(\xi)}{\mathrm{d}\xi}s + \Big(\frac{2\gamma}{v_0}\Big)^2\Big\} = 0. \tag{23}$$

Как и прежде, после выполнения требования

$$-\beta^2(\xi) + \frac{2}{v_0^2}\Big[\frac{\mathrm{d}\alpha(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \mu(\xi)\frac{\mathrm{d}\beta(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\Big] + \frac{2}{v_0}\frac{\mathrm{d}\beta(\xi)}{\mathrm{d}\xi}s + \Big(\frac{2\gamma}{v_0}\Big)^2 = \eta = \mu(\xi) + v_0 s$$

(23) опять сводится к уравнению для функции Эйри, откуда следует, что

$$\alpha(\xi) = \alpha_0 - 2\gamma^2\xi + \frac{1}{3}\Big(\beta_0 + \frac{1}{2}v_0^2\xi\Big)^3, \tag{24а}$$

$$\beta(\xi) = \beta_0 + \frac{1}{2}v_0^2\xi, \tag{24б}$$

$$\mu(\xi) = \mu_0 - \Big(\beta_0 + \frac{1}{2}v_0^2\xi\Big)^2, \tag{24в}$$

а найденное автомодельное решение описывается выражениями

$$\eta(s,\xi) = \mu_0 + v_0 s - \Big(\beta_0 + \frac{1}{2}v_0^2\xi\Big)^2, \tag{25а}$$

$$\varphi(\eta,\xi) = \alpha_0 - 2\gamma^2\xi + \Big(\beta_0 + \frac{1}{2}v_0^2\xi\Big)\eta(s,\xi) + \frac{1}{3}\Big(\beta_0 + \frac{1}{2}v_0^2\xi\Big)^3, \tag{25б}$$

$$\phi(s,\xi) = \phi_0\mathrm{Ai}(\eta)\exp\Big(-\frac{2\gamma}{v_0}\eta\Big)\exp[\mathrm{i}\varphi(\eta,\xi)]. \tag{25в}$$

Соотношения (25а) и (25б) также можно упростить за счет выбора значений констант интегрирования. Случай, когда при $\xi = 0$ волновой фронт совпадает с осью $\boldsymbol{s}$, соответствует двум возможностям. В первой из них $\beta_0 = 0$, и при подходящем выборе положения точки $s = 0$ и начальной фазы ($\alpha_0 = 0$ и $\mu_0 = 0$)

$$\eta(s,\xi) = v_0 s - \Big(\frac{1}{2}v_0^2\xi\Big)^2, \tag{26а}$$

$$\varphi(\eta,\xi) = -2\gamma^2\xi + \frac{1}{2}v_0^2\xi\eta(s,\xi) + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}v_0^2\xi\Big)^3, \tag{26б}$$

что с учетом произвольности амплитуды (вследствие линейности задачи) соответствует решению в форме модифицированного пучка Эйри, приведенному в [1].

В отличие от рассмотренного нами в предыдущем разделе случая распространения в линейной среде, зеркальной симметрии в задаче теперь нет, т.к. требование пространственной локализации искомого автомодельного решения по поперечной координате однозначно определяет знак v_0 (через знак $\sigma = -2\gamma/v_0$). Это же требование пространственной локализации поля приводит к запрету и на все рассмотренные нами выше другие возможности, при которых либо $v_0 = 0$, либо уравнение (23) сводится к уравнению колебаний, поскольку все подобные решения будут иметь неограниченно нарастающую амплитуду поля либо при $s \to +\infty$, либо при $s \to -\infty$.

4. Заключение

В настоящей работе показано, что щелевой пучок Эйри является локализованным по поперечной координате автомодельным решением линейной задачи распространения пучка излучения с плоским волновым фронтом. К этому же классу решений можно отнести и известные нелокализованные решения: плоскую волну, распространяющуюся вдоль продольной координаты, а также интерференционные структуры, сформированные парой симметрично распространяющихся под углом к продольной оси плоских волн. Все другие интерференционные структуры, которые можно построить с учетом принципа линейной суперпозиции, не будут относиться к этому классу решений вследствие разных проекций волнового вектора на направление распространения. Отклонение траекторий перемещения точек равной интенсивности от продольной оси для пучка Эйри в этом случае определено с точностью до знака, что отражает зеркальную симметрию волнового уравнения по поперечной координате.

Появление диффузионной нелинейности сохраняет для рассмотренного класса автомодельных решений линейность задачи распространения. Однако наличие нелинейности такого типа нарушает зеркальную симметрию задачи распространения по поперечной координате (замена $s \leftrightarrow -s$ изменяет волновое уравнение). При этом с учетом требования пространственной локализации диффузионная нелинейность выделяет из двух возможных локализованных автомодельных решений с плоским волновым фронтом лишь одно и деформирует (модулирует дополнительным экспоненциальным множителем) профиль распределения интенсивности по поперечной координате, соответствующий пучку Эйри. Решения этого класса в форме плоских волн и интерференционных структур, сформированных симметрично распространяющимися под углом к продольной оси плоскими волнами, при этом оказываются запрещеными.

1. Christodoulides D.N., Coskun T.H. *Opt. Lett.*, **21** (18), 1460 (1996).
2. Christodoulides D.N., Carvalho M.I. *J. Opt. Soc. Am. B*, **12** (9), 1628 (1995).
3. *Справочник по специальным функциям*. Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган (М.: Наука, 1979).
4. Berry M.V., Balazs N.L. *Am. J. Phys.*, **47** (3), 264 (1979).
5. Chremmos I.D., Chen Zhigang, Christodoulides D.N., Efremidis N.K. *Phys. Rev. A*, **85**, 023828 (2012).
6. Zapata-Rodriguez C.J., Pastor D., Miret J.J. *Opt. Express*, **20** (21), 23553 (2012).
7. Jia Shu, Lee Joyce, Fleischer J.W. *Phys. Rev. Lett.*, **104** (25), 253904 (2010).
8. Hwang Chi-Young, Choi Dawoon, Kim Kyoung-Youm, Lee Byoungho. *Opt. Express*, **18** (22), 23504 (2010).
9. Vaveliuk P., Martinez-Matos O. *Opt. Express,* **20** (24), 26913 (2012).
10. Zhou Guoquan, Chen Ruipin, Chu Xiuxiang. *Opt. Express,* **20** (3), 2196 (2012).
11. Zhuang Fei, Du Xinyue, Ye Yuqian, Zhao Daomu. *Opt. Lett.*, **37** (11), 1871 (2012).
12. Фок В.А. *Теория пространства, времени и тяготения* (М.: Физматгиз, 1961); Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Теория поля. Т.2* (М.: Наука, 1988); Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред. Т.8* (М.: Наука, 1982).
13. Выслоух В.А., Кутузов В., Петникова В.М., Шувалов В.В. *ЖЭТФ*, **111** (2), 705 (1997).
14. Kutuzov V., Petnikova V.M., Shuvalov V.V., Vysloukh V.A. *J. Nonlinear Opt. Phys. & Mater.*, **6** (4), 421 (1997).