ТЕРАГЕРЦЕВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

PACS 73.20.Mf; 52.35.Mw; 42.65.Re

Возбуждение поверхностных волн в проводнике коротким лазерным импульсом

С.А.Урюпин, А.А.Фролов

Изучена возможность возбуждения поверхностных волн в проводнике, на который воздействует падающее вдоль нормали к поверхности сфокусированное фемтосекундное лазерное излучение. Показано, что зависящая от времени пондеромоторная сила приводит к возбуждению поверхностных волн в терагерцевом диапазоне частот. Показано также, что полная энергия и амплитуда импульса поверхностных волн возрастает с увеличением эффективной частоты столкновений электронов.

Ключевые слова: *поверхностная волна, фемтосекундный лазерный импульс, терагерцевый диапазон частот, частота столкновений.*

1. Введение

Интерес к изучению поверхностных волн обусловлен не только их необычными физическими свойствами, но и возможностью использования этих волн для решения важных прикладных задач, таких как диагностика поверхности [1], генерация электронных пучков [2], генерация терагерцевого излучения [3]. Линейной теории поверхностных волн в проводниках посвящена обширная литература (см., напр., книги [1, 4] и цитируемые в них работы). В рамках линейной теории весьма детально описаны законы дисперсии волн и методы их возбуждения. Нелинейные методы возбуждения изучены в существенно меньшей степени. Вместе с тем в экспериментах по взаимодействию фемтосекундных импульсов лазерного излучения с проводниками, когда наряду с генерацией гармоник [5] и терагерцевого излучения [6] происходит возбуждение поверхностных волн, возникает необходимость в выходе за рамки линейной теории. Указания на необходимость разработки нелинейной теории возбуждения поверхностных волн есть, в частности, в экспериментах [7, 8]. Ранее обсуждались такие нелинейные механизмы возбуждения поверхностных волн, как вынужденное комптоновское рассеяние [9], мгновенная пространственная модуляция показателя преломления в области воздействия лазерного УКИ [10, 11], параметрический распад волны накачки на две поверхностные волны [12]. В [13] развита теория нелинейного возбуждения поверхностных волн при прохождении лазерного импульса через границу плазма–вакуум.

В настоящей работе, в отличие от [9]–[13], рассмотрен еще один способ возбуждения поверхностных волн в проводнике, который реализуется при пондеромоторном воздействии сфокусированного импульсного лазерного излучения. Порождаемая лазерным импульсом пондеромоторная сила приводит к направленному движению электронов. При этом в скин-слое проводника возникает изменяющийся за время действия импульса вихревой ток. Этот медленно изменяющийся ток является источником низкочастотного электромагнитного поля, которое высвечивается из металла в окружающее пространство. В разд.2 приведена необходимая информация о форме воздействующего импульса и виде пондеромоторного потенциала в проводнике. Возникающее благодаря неоднородности и нестационарности пондеромоторного потенциала низкочастотное поле в проводнике изучено в разд.3. Отвечающее поверхностной волне низкочастотное поле в вакууме описано в разд.4. Там же найдены компоненты фурье-образов низкочастотного поля в вакууме и проводнике. Распределение энергии по частотам, полная энергия и структура магнитного поля поверхностной волны в волновой зоне описаны в разд.5 применительно к воздействию на проводник гауссова импульса. Показано, что распределение энергии по частотам имеет колоколообразный вид с максимумом вблизи частоты $\sim 1/\tau_*$, где $\tau_* = \tau\sqrt{1 + R^2/L^2}$, время τ определяет длительность гауссова импульса $t_p = 2\tau\sqrt{\ln 2}$, R характеризует размер фокального пятна, а $L = c\tau$ – длину импульса, c – скорость света. Положение данного максимума почти не зависит от частоты столкновений электронов в низкочастотном поле ν_s. Если $\nu_s\tau_* \ll 1$, то величина максимума не зависит от ν_s, а в пределе частых столкновений электронов, когда $\nu_s\tau_* \gg 1$, она возрастает пропорционально $\sqrt{\nu_s\tau_*}$. Вследствие этого и полная энергия поверхностной волны возрастает пропорционально $\sqrt{\nu_s\tau_*}$. Установлено, что поверхностная волна распространяется в виде импульса электромагнитного поля, длительность которого порядка τ_*.

2. Высокочастотное поле и пондеромоторный потенциал

Рассмотрим воздействие на проводник, занимающий полупространство $z > 0$, импульса лазерного излучения,

С.А.Урюпин. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; e-mail: uryupin@sci.lebedev.ru
А.А.Фролов. Объединенный институт высоких температур РАН, Россия, 125412 Москва, ул. Ижорская, 13, стр. 2

Поступила в редакцию 18 июня 2013 г., после доработки – 5 сентября 2013 г.

распространяющегося вдоль оси z. Предположим, что несущая частота импульса ω_0 много больше $1/\tau$ и излучение слабо сфокусировано в область, характерный размер которой R много больше c/ω_0. Без значительного ограничения общности будем считать, что импульс имеет гауссово распределение интенсивности в плоскости xy. В этих предположениях электрическое поле падающего импульса представим в виде

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}\Big(t-\frac{z}{c}\Big)\exp\Big[-\mathrm{i}\omega_0\Big(t-\frac{z}{c}\Big)-\frac{\rho^2}{2R^2}\Big]$$
$$+\,\text{компл. сопр.}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(t)$ – слабо изменяющаяся за время $\sim\tau$ напряженность электрического поля на оси z; $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$; $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{\rho}, z)$. Ограничимся рассмотрением воздействия поля (1) в условиях, когда несущая частота излучения ω_0 и частота столкновений электронов в высокочастотном поле ν_{h} удовлетворяют неравенству

$$|\omega_0 + \mathrm{i}\nu_{\mathrm{h}}| \gg |\kappa_{\mathrm{L}}(\omega_0)|v, \tag{2}$$

где v – характерная скорость электронов, а волновое число $\kappa_{\mathrm{L}}(\omega_0)$ определяет масштаб изменения поля вдоль оси z в проводнике $\delta \sim 1/|\kappa_{\mathrm{L}}(\omega_0)|$:

$$\kappa_{\mathrm{L}}(\omega_0) = \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega_0(\omega_0+\mathrm{i}\nu_{\mathrm{h}})} - \varepsilon_0(\omega_0)}\,. \tag{3}$$

В формуле (3) ω_{p} – плазменная частота, а $\varepsilon_0(\omega_0) = \varepsilon_0'(\omega_0) + \mathrm{i}\varepsilon_0''(\omega_0)$ – вклад в диэлектрическую проницаемость проводника связанных электронов и решетки. В этих условиях поле (1) создает в проводнике неоднородное поле

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(t)\frac{\omega_0}{\omega_0+\mathrm{i}c\kappa_{\mathrm{L}}(\omega_0)}\exp\Big[-\mathrm{i}\omega_0 t-\kappa_{\mathrm{L}}(\omega_0)z-\frac{\rho^2}{2R^2}\Big]$$
$$+\,\text{компл. сопр.},\ z>0. \tag{4}$$

Это поле оказывает пондеромоторное воздействие на электроны. В том случае, когда несущая частота ω_0 значительно превышает частоту столкновений электронов ν_{h}, отвечающий полю (4) пондеромоторный потенциал имеет вид

$$\Phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{e^2\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}^2(t)}{m|\omega_0+\mathrm{i}c\kappa_{\mathrm{L}}(\omega_0)|^2}\exp\Big[-2\,\mathrm{Re}\,\kappa_{\mathrm{L}}(\omega_0)z-\frac{\rho^2}{R^2}\Big], \tag{5}$$

где e – заряд, а m – эффективная масса электрона.

3. Низкочастотное поле в проводнике

Пондеромоторное воздействие импульса с медленно изменяющейся во времени амплитудой поля приводит к возникновению низкочастотного тока и низкочастотного поля в проводнике. Для определения плотности низкочастотного тока воспользуемся уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) + \nu_{\mathrm{s}}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{4\pi}\Big[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{e}\nabla\Phi(\boldsymbol{r},t)\Big], \tag{6}$$

где $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ – низкочастотное электрическое поле в проводнике; ν_{s} – частота столкновений электронов в низкочастотном поле, которая отличается от частоты ν_{h} вследствие зависимости частоты электрон-электронных столкновений от частоты поля [14]. Для описания низкочастотного электромагнитного поля уравнение (6) следует дополнить уравнениями Максвелла для электрического поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ и магнитного поля $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t), \tag{7}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t), \tag{8}$$

где $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$ – электрическая индукция. При построении решения уравнений (6)–(8) воспользуемся преобразованием Фурье по времени t и координате $\boldsymbol{\rho} = (x,y)$:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega) = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}\exp(\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t),$$
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\boldsymbol{k}_\perp}{(2\pi)^3}\exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\boldsymbol{k}_\perp\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega), \tag{9}$$

где $\boldsymbol{k}_\perp = (k_x,k_y)$ – волновой вектор в плоскости xy, а $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$ – одна из функций $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ или $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$. В силу аксиальной симметрии пондеромоторного потенциала (5) плотность тока, поля и вектор индукции имеют вид

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = (j_\rho(\boldsymbol{r},t),0,j_z(\boldsymbol{r},t)),\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = (E_\rho(\boldsymbol{r},t),0,E_z(\boldsymbol{r},t)),$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = (0,B_\varphi(\boldsymbol{r},t),0),\ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = (D_\rho(\boldsymbol{r},t),0,D_z(\boldsymbol{r},t)).$$

После преобразования Фурье из уравнений (7) и (8) получаем систему уравнений для фурье-образов компонент электрического и магнитного полей:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_\rho(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega) - \mathrm{i}k_\perp E_z(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega) = \frac{\mathrm{i}\omega}{c}B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega),$$
$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega) = -\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\varepsilon_0(\omega)E_\rho(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega) + \frac{4\pi}{c}j_\rho(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega), \tag{10}$$
$$\mathrm{i}k_\perp B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega) = -\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\varepsilon_0(\omega)E_z(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega) + \frac{4\pi}{c}j_z(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega),\ z>0.$$

При преобразовании уравнения (8) использовалась связь фурье-образа вектора индукции и электрического поля $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\omega) = \varepsilon_0(\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)$. Уравнения (6) и (10) справедливы в области $z > 0$. Принимая во внимание явный вид пондеромоторного потенциала (5), продолжим эти уравнения и искомые функции в область $z < 0$:

$$B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp,-z,\omega) = -B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega),\ E_\rho(\boldsymbol{k}_\perp,-z,\omega) = E_\rho(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega),$$
$$E_z(\boldsymbol{k}_\perp,-z,\omega) = -E_z(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega),\ \Phi(\boldsymbol{k}_\perp,-z,\omega) = \Phi(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega), \tag{11}$$
$$j_z(\boldsymbol{k}_\perp,-z,\omega) = -j_z(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega),\ j_\rho(\boldsymbol{k}_\perp,-z,\omega) = j_\rho(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega).$$

Учитывая соотношения (11), из уравнения (6) после преобразования Фурье по времени и координатам находим фурье-образ плотности тока

$$j(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{(\omega+\mathrm{i}\nu_{\mathrm{s}})}\Big[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega) - \mathrm{i}\frac{\boldsymbol{k}}{e}\Phi(\boldsymbol{k},\omega)\Big]. \tag{12}$$

Далее, используя выражения (11), (12) и преобразование Фурье по координате z (см. (9)), из уравнений (10) получаем соотношения

$$k_z E_\rho(\boldsymbol{k},\omega) - k_\perp E_z(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{\omega}{c} B_\varphi(\boldsymbol{k},\omega),$$

$$-\mathrm{i}k_z B_\varphi(\boldsymbol{k},\omega) + \Delta B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp,\omega)$$

$$= -\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\varepsilon(\omega) E_\rho(\boldsymbol{k},\omega) + \frac{1}{c}\frac{\omega_p^2}{(\omega+\mathrm{i}\nu_\mathrm{s})}\frac{k_\perp}{e}\Phi(\boldsymbol{k},\omega), \tag{13}$$

$$\mathrm{i}k_\perp B_\varphi(\boldsymbol{k},\omega) = -\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\varepsilon(\omega) E_z(\boldsymbol{k},\omega) + \frac{1}{c}\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{(\omega+\mathrm{i}\nu_\mathrm{s})}\frac{k_z}{e}\Phi(\boldsymbol{k},\omega),$$

где

$$\Delta B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp,\omega) = B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=+0,\omega) - B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=-0,\omega)$$

$$= 2B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=+0,\omega)$$

– скачок функции $B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega)$ на плоскости $z = 0$ из-за нечетного продолжения в область $z < 0$;

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(\omega) - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega(\omega+\mathrm{i}\nu_\mathrm{s})} \tag{14}$$

– диэлектрическая проницаемость проводника при условии $|\omega + \mathrm{i}\nu_\mathrm{s}| \gg kv$. Решение системы уравнений (13) для компонент фурье-образов электромагнитного поля имеет вид

$$B_\varphi(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{2\mathrm{i}k_z c^2}{\omega^2\varepsilon(\omega) - k^2c^2} B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=+0,\omega), \tag{15}$$

$$E_\rho(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{2\mathrm{i}\omega c}{k^2} B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=+0,\omega)$$

$$\times\left[\frac{k_z^2}{\omega^2\varepsilon(\omega) - k^2c^2} + \frac{k_\perp^2}{\omega^2\varepsilon(\omega)}\right] - \frac{\mathrm{i}k_\perp\omega_\mathrm{p}^2}{\omega(\omega+\mathrm{i}\nu_\mathrm{s})}\frac{\Phi(\omega,\boldsymbol{k})}{e\varepsilon(\omega)}, \tag{16}$$

$$E_z(\boldsymbol{k},\omega) = -B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=+0,\omega)$$

$$\times\frac{2\mathrm{i}}{\omega\varepsilon(\omega)}\frac{k_z k_\perp c^3}{\omega^2\varepsilon(\omega) - k^2c^2} - \frac{\mathrm{i}k_z\omega_\mathrm{p}^2}{\omega(\omega+\mathrm{i}\nu_\mathrm{s})}\frac{\Phi(\omega,\boldsymbol{k})}{e\varepsilon(\omega)}. \tag{17}$$

Используя обратное преобразование Фурье по координате z (см. (9)), из соотношений (15)–(17) находим выражение для функций $B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega)$, $E_\rho(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega)$ и $E_z(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega)$ в проводнике:

$$B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega) = B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=+0,\omega)\exp(-\kappa z), \tag{18}$$

$$E_\rho(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega) = \frac{\mathrm{i}c\kappa}{\omega\varepsilon(\omega)} B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=+0,\omega)\exp(-\kappa z)$$

$$-\frac{\mathrm{i}k_\perp\omega_\mathrm{p}^2}{\omega(\omega+\mathrm{i}\nu_\mathrm{s})}\frac{\Phi(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega)}{e\varepsilon(\omega)}, \tag{19}$$

$$E_z(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega) = -\frac{ck_\perp}{\omega\varepsilon(\omega)} B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=+0,\omega)\exp(-\kappa z)$$

$$-\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega(\omega+\mathrm{i}\nu_\mathrm{s})}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Phi(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega)}{e\varepsilon(\omega)}, \tag{20}$$

где

$$\kappa = \sqrt{k_\perp^2 - \omega^2\varepsilon(\omega)/c^2} = \kappa_1 - \mathrm{i}\kappa_2;\ \ \varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + \mathrm{i}\varepsilon''(\omega);$$

$$\kappa_s = \frac{1}{c\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\left[k_\perp^2c^2 - \omega^2\varepsilon'(\omega)\right]^2 + \left[\omega^2\varepsilon''(\omega)\right]^2}\right.$$

$$\left.-(-1)^s\left[k_\perp^2c^2 - \omega^2\varepsilon'(\omega)\right]\right\}^{1/2},\ \ s = 1, 2. \tag{21}$$

Величина $1/\kappa_1$ определяет размер области локализации низкочастотного поля в проводнике вблизи его поверхности.

4. Низкочастотное поле в вакууме. Поверхностная волна

Низкочастотное электромагнитное поле в вакууме, когда $z < 0$, описывается системой уравнений (10), если в них положить $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega) = 0$, $\varepsilon_0(\omega) = 1$. В дальнейшем будем рассматривать только ту часть электромагнитного поля в вакууме, которая отвечает поверхностной волне, поле которой локализовано вблизи границы проводника. Таким образом, ищем решение видоизмененной системы уравнений (10) при условии

$$k_\perp c > |\omega|. \tag{22}$$

Для таких $k_\perp$ и ω имеем следующее решение:

$$B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega) = B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=-0,\omega)\exp(\kappa_0 z), \tag{23}$$

$$E_\rho(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega) = -\mathrm{i}\frac{c\kappa_0}{\omega} B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=-0,\omega)\exp(\kappa_0 z), \tag{24}$$

$$E_z(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega) = -\frac{ck_\perp}{\omega} B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=-0,\omega)\exp(\kappa_0 z), \tag{25}$$

где $\kappa_0 = \sqrt{k_\perp^2 - \omega^2/c^2}$; $B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=-0,\omega)$ – неизвестная функция. Для определения функций $B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=+0,\omega)$ и $B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=-0,\omega)$ воспользуемся условиями непрерывности тангенциальных компонент электромагнитного поля на границе проводника. Приравнивая компоненты $B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega)$ и $E_\rho(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega)$ на плоскости $z = 0$, из формул (18), (19), (23), (24), находим

$$B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=-0,\omega) = B_\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, z=+0,\omega)$$

$$= \frac{k_\perp\omega_\mathrm{p}^2}{(\omega+\mathrm{i}\nu_\mathrm{s})c[\kappa+\kappa_0\varepsilon(\omega)]}\frac{\Phi(\boldsymbol{k}_\perp, z=0,\omega)}{e}. \tag{26}$$

Соотношения (23)–(26) полностью определяют фурье-образы компонент локализованного у поверхности проводника низкочастотного поля в вакууме. Эти фурье-образы, а также описываемые формулами (18)–(20), пропорциональны фурье-образу пондеромоторного потенциала на поверхности проводника $\Phi(\boldsymbol{k}_\perp, z=0,\omega)$. Для пондеромоторного потенциала (5) фурье-образ

$$\Phi(\boldsymbol{k}_\perp,z,\omega) = \frac{e^2}{m}\frac{\pi R^2}{|\omega_0 + \mathrm{i}c\kappa_\mathrm{L}(\omega_0)|^2}$$

$$\times\exp\left[-2\mathrm{Re}\,\kappa_\mathrm{L}(\omega_0)z - \frac{k_\perp^2R^2}{4}\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\,\boldsymbol{E}_\mathrm{L}^2(t)\exp(\mathrm{i}\omega t). \tag{27}$$

Выражения (18)–(27) позволяют найти отвечающее поверхностной волне электромагнитное поле в вакууме и в проводнике. Выражения (23)–(25) пригодны для описания только части поля, локализованной у поверхности проводника. Эта часть поля определяется фурье-образами полей, имеющих достаточно большие волновые векторы в плоскости, компланарной поверхности проводника: $k_\perp c > |\omega|$ (22). Поэтому, восстанавливая зависимость поля от координаты $\boldsymbol{\rho}$ с помощью обратного преобразования Фурье по $\boldsymbol{\rho}$ (9), ограничим снизу область интегрирования по $k_\perp$ величиной $|\omega|/c$. Тогда из формул (18), (22), (26), (27) для зависящей от частоты и локализованной у поверхности проводника азимутальной компоненты фурье-образа магнитного поля получаем

$$B_\varphi(\boldsymbol{r},\omega) = \frac{\omega_{\rm p}^2}{|\omega_0 + {\rm i}c\kappa_{\rm L}(\omega_0)|^2}\frac{e}{mc}\frac{\pi R^2}{\omega + {\rm i}\nu_{\rm s}}\int_{\omega/c}^{\infty}\frac{k_\perp^2{\rm d}k_\perp}{2\pi}\frac{J_0(k_\perp\rho)}{\kappa + \kappa_0\varepsilon(\omega)}$$

$$\times\exp\Big(-\frac{k_\perp^2R^2}{4}\Big)[\eta(-z)\exp(\kappa_0 z) + \eta(z)\exp(-\kappa z)]$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}{\rm d}t\boldsymbol{E}_{\rm L}^2(t)\exp({\rm i}\omega t),\ \ \omega > 0, \tag{28}$$

где $\eta(z)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда; $J_0(k_\perp\rho)$ – функция Бесселя нулевого порядка. В знаменателе формулы (28) стоит функция $\kappa + \kappa_0\varepsilon(\omega)$, которую, учитывая явные выражения для κ_0 и κ, можно представить в виде

$$\kappa + \kappa_0\varepsilon(\omega) = \frac{1-\varepsilon^2(\omega)}{\kappa - \kappa_0\varepsilon(\omega)}\Big[k_\perp^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega)+1}\Big]. \tag{29}$$

Выражение (29) равно нулю, если

$$k_\perp^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\Big[1 + \frac{1}{|\varepsilon'(\omega)| - 1 - {\rm i}\varepsilon''(\omega)}\Big], \tag{30}$$

где $\varepsilon''(\omega) = \omega_{\rm p}^2\nu_{\rm s}/[\omega(\omega^2+\nu_{\rm s}^2)] + \varepsilon_0''(\omega) > 0$ и учтено, что для часто реализующихся условий $\omega_{\rm p}^2 \gg (\omega^2+\nu_{\rm s}^2)|\varepsilon_0'(\omega)|$ и $|\varepsilon'(\omega)| = -\varepsilon'(\omega) = \omega_{\rm p}^2/(\omega^2+\nu_{\rm s}^2) - \varepsilon_0'(\omega) > 0$. Отметим, что в области низких частот абсолютное значение действительной части диэлектрической проницаемости обычно много больше единицы, $|\varepsilon'(\omega)| \gg 1$, и в знаменателе формулы (30) можно пренебречь единицей:

$$k_\perp \simeq \frac{\omega}{c}\Big[1 + \frac{1}{2}\frac{1}{|\varepsilon'(\omega)| - {\rm i}\varepsilon''(\omega)}\Big]. \tag{31}$$

Соотношения (30) и (31) дают закон дисперсии волн, распространяющихся вдоль поверхности проводника (см., напр., [4]). Тем самым выражение под интегралом в формуле (28) имеет полюс первого порядка в плоскости комплексной переменной $k_\perp$. Рассмотрим низкочастотное поле на больших расстояниях от области фокального пятна, когда выполняются неравенства $\rho \gg R$, c/ω. В этом случае при вычислении интеграла по переменной $k_\perp$ можно воспользоваться асимптотическим представлением функции Бесселя:

$$J_0(k_\perp\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_\perp\rho}}\cos\Big(k_\perp\rho - \frac{\pi}{4}\Big),\ \ k_\perp\rho \gg 1. \tag{32}$$

Для вычисления интеграла по $k_\perp$ в (28) выберем контур интегрирования в плоскости $k_\perp$, как показано на рис.1. Точкой на рис.1 обозначен полюс, отвечающий поверхностной волне (30), (31). Интеграл по дуге бесконечно большого радиуса равен нулю. Интеграл вдоль луча, идущего из точки ω/c под углом $\pi/4$ к вещественной оси, при $\rho \gg R$ экспоненциально мал. Поэтому основной вклад в искомый интеграл (28) возникает от вычета в полюсе. Учитывая вклад от полюса (31) и формулу (32), из (28) находим следующее выражение для фурье-образа азимутальной компоненты магнитного поля на поверхности проводника:

$$B_\varphi(\rho, z=0,\omega) \simeq -\frac{e}{mc(\omega+{\rm i}\nu_{\rm s})}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_{\rm p}^2}{|\omega_0 + {\rm i}c\kappa_{\rm L}(\omega_0)|^2}\Big(\frac{\omega R}{c}\Big)^2$$

$$\times[|\varepsilon'(\omega)| - {\rm i}\varepsilon''(\omega)]^{-3/2}\sqrt{\frac{c}{\omega\rho}}\exp\Big\{{\rm i}\frac{\pi}{4} + {\rm i}\frac{\omega}{2c}\rho$$

$$\times\Big[2 + \frac{1}{|\varepsilon'(\omega)| - {\rm i}\varepsilon''(\omega)}\Big] - \frac{\omega^2R^2}{4c^2}\Big[1 + \frac{1}{|\varepsilon'(\omega)| - {\rm i}\varepsilon''(\omega)}\Big]\Big\}$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}{\rm d}t\boldsymbol{E}_{\rm L}^2(t)\exp({\rm i}\omega t),\ \ \omega > 0. \tag{33}$$

Совершенно аналогично из (23)–(25) находим фурье-образы компонент электромагнитного поля в вакууме:

$$E_z(\boldsymbol{r},\omega) = -B_\varphi(\boldsymbol{r},\omega),$$

$$E_\rho(\boldsymbol{r},\omega) = -\frac{\rm i}{\sqrt{|\varepsilon'(\omega)| - {\rm i}\varepsilon''(\omega)}}B_\varphi(\boldsymbol{r},\omega), \tag{34}$$

$$B_\varphi(\boldsymbol{r},\omega) \simeq B_\varphi(\rho, z=0,\omega)\exp\Big[\frac{\omega z}{c\sqrt{|\varepsilon'(\omega)| - {\rm i}\varepsilon''(\omega)}}\Big],\ z<0, \omega>0,$$

а из (18)–(20), с учетом (26) и (27), – те же величины в проводнике:

$$E_z(\boldsymbol{r},\omega) = \frac{1}{|\varepsilon'(\omega)| - {\rm i}\varepsilon''(\omega)}B_\varphi(\boldsymbol{r},\omega),$$

$$E_\rho(\boldsymbol{r},\omega) = -\frac{\rm i}{\sqrt{|\varepsilon'(\omega)| - {\rm i}\varepsilon''(\omega)}}B_\varphi(\boldsymbol{r},\omega), \tag{35}$$

$$B_\varphi(\boldsymbol{r},\omega) \simeq B_\varphi(\rho, z=0,\omega)\exp\Big[-\frac{\omega z}{c}\sqrt{|\varepsilon'(\omega)| - {\rm i}\varepsilon''(\omega)}\Big],$$

$$z > 0,\ \omega > 0.$$

Рис.1. Контур интегрирования в формуле (28).

Выражения (33)–(35) описывают расходящуюся из области фокального пятна поверхностную волну, амплитуда которой убывает с расстоянием пропорционально $1/\sqrt{\rho}$. Согласно (33) наличие диссипации, обусловленной столкновениями электронов, а также поглощением поля решеткой и связанными электронами, приводит к затуханию поверхностной волны на больших расстояниях, когда

$$\rho \geqslant \rho_{\rm m} \simeq 2\frac{c}{\omega}\frac{|\varepsilon'(\omega)|^2 + \varepsilon''^2(\omega)}{\varepsilon''(\omega)}. \quad (36)$$

Поэтому будем рассматривать характеристики поверхностной волны в области $\rho < \rho_{\rm m}$, когда изменением амплитуды волны из-за диссипации можно пренебречь. Такая область существует, если $\rho_{\rm m} \gg R,\ c/\omega$. Отметим, что область локализации поля поверхностной волны со стороны вакуума

$$\delta_{\rm v} \simeq \frac{c}{\omega\sqrt{2}}\{[\varepsilon'^2(\omega) + \varepsilon''^2(\omega)]^{1/2} + |\varepsilon'(\omega)|\}^{1/2} \quad (37)$$

значительно больше глубины проникновения поля в проводник:

$$\delta_{\rm m} \simeq \delta_{\rm v}[\varepsilon'^2(\omega) + \varepsilon''^2(\omega)]^{-1/2} \ll \delta_{\rm v}. \quad (38)$$

5. Физические характеристики поверхностной волны

Для вычисления энергии W, переносимой поверхностной волной, рассмотрим цилиндрическую поверхность радиусом ρ и длиной $\mathrm{d}z$, ось симметрии которой совпадает с направлением движения лазерного импульса и проходит через начало координат. За все время через эту поверхность по нормали к ней проходит энергия, равная произведению проинтегрированной по времени плотности потока энергии

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)] \quad (39)$$

и элемента площадки $2\pi\rho\mathrm{d}z$:

$$\mathrm{d}W = 2\pi\rho\mathrm{d}z\int_0^{\infty}\mathrm{d}\omega\frac{c}{8\pi^2}\{[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},\omega)] + \text{компл. сопр.}\}. \quad (40)$$

Интегрируя выражение (40) по координате z от $-\infty$ до $+\infty$ и используя соотношения (34), (35), находим энергию поверхностных волн, приходящуюся на единичный интервал частот $\mathrm{d}\omega$:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega} = \frac{c\rho}{2\pi}\Big[\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}z|B_\varphi(\boldsymbol{r},\omega)|^2 - \frac{|\varepsilon'(\omega)|}{\varepsilon'^2(\omega) + \varepsilon''^2(\omega)}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}z\,|B_\varphi(\boldsymbol{r},\omega)|^2\Big]. \quad (41)$$

Из формулы (41) и соотношений (34), (35) следует, что энергия поверхностной волны в вакууме значительно превышает ее энергию в проводнике. Вычисляя в формуле (41) интеграл по области вакуума, получаем спектральное распределение энергии поверхностных волн

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\omega_{\rm p}^4}{|\omega_0 + \mathrm{i}c\kappa_{\rm L}(\omega_0)|^4}\frac{\sqrt{2}\,e^2R^4}{8m^2c^3} \times\frac{\omega^2}{\omega^2+\nu_{\rm s}^2}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\boldsymbol{E}_{\rm L}^2(t)\exp(\mathrm{i}\omega t)\Big]^2 \times\frac{1}{\varepsilon'^2(\omega) + \varepsilon''^2(\omega)}\Big[\sqrt{\varepsilon'^2(\omega) + \varepsilon''^2(\omega)} + |\varepsilon'(\omega)|\Big]^{-1/2} \times\exp\Big\{-\frac{\omega^2R^2}{2c^2}\Big[1 + \frac{|\varepsilon'(\omega)|}{\varepsilon'^2(\omega) + \varepsilon''^2(\omega)}\Big]\Big\},\ \omega > 0. \quad (42)$$

Согласно (42) распределение энергии по спектру зависит не только от физических характеристик проводника, но и от формы воздействующего импульса лазерного излучения. Исследуем подробнее спектральный состав генерируемого поля в часто обсуждаемом случае, когда форма импульса описывается распределением Гаусса:

$$\boldsymbol{E}_{\rm L}^2(t) = E_{\rm L}^2\exp(-t^2/\tau^2). \quad (43)$$

Рассмотрим распределение (42) в типичных для многих экспериментов условиях, когда выполнены неравенства

$$\frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2 + \nu_{\rm s}^2} \gg |\varepsilon_0'(\omega)|,\ \frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2 + \nu_{\rm s}^2}\frac{\nu_{\rm s}}{\omega} \gg |\varepsilon_0''(\omega)|,$$
$$\omega_0 \gg \nu_{\rm h},\ \frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega_0^2} \gg |\varepsilon_0'(\omega_0)|. \quad (44)$$

Для импульса (43) при условиях (44) выражение (42) принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{8\sqrt{2}\,e^2}{\sqrt{L^2 + R^2}}\frac{W_{\rm L}^2}{m^2c^4}\frac{1}{\omega_{\rm p}^5\tau_*^5}I(\Omega), \quad (45)$$

где $\Omega = \omega\tau_*$ – безразмерная частота; $W_{\rm L} = \sqrt{\pi}E_{\rm L}^2R^2L/8$ – энергия лазерного импульса; безразмерная функция

$$I(\Omega) = \frac{\Omega^{9/2}\sqrt{\Omega^2 + \gamma_{\rm s}^2}}{\sqrt{\Omega + \sqrt{\Omega^2 + \gamma_{\rm s}^2}}}\exp\Big(-\frac{\Omega^2}{2}\Big),\ \gamma_{\rm s} = \nu_{\rm s}\tau_*. \quad (46)$$

Здесь параметр $\gamma_{\rm s}$ учитывает влияние столкновений электронов на распределение энергии по частотам. Описывающая спектральное распределение энергии поверх-

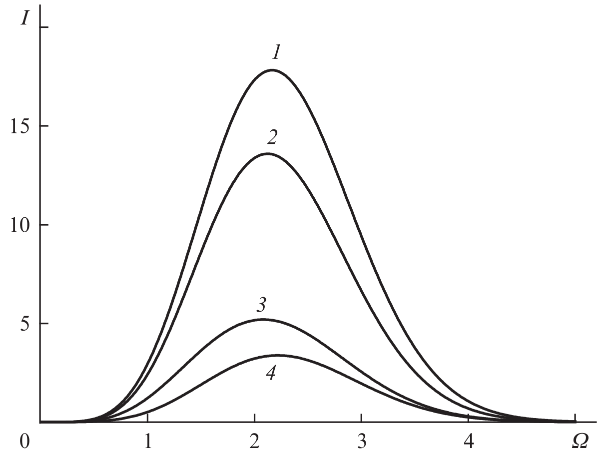

Рис.2. Зависимости нормированной спектральной плотности энергии $I(\Omega)$ (46) поверхностных волн от безразмерной частоты Ω при параметре $\gamma_{\rm s} = 8$ (*1*), 4 (*2*), 1 (*3*) и 0.25 (*4*).

ностных волн функция (46) представлена на рис.2 для различных значений безразмерной частоты столкновений γ_s. Видно, что в спектре излучения имеется широкий максимум, положение которого слабо зависит от параметра γ_s. Вместе с тем при увеличении частоты столкновений амплитуда максимума возрастает. Для объяснения такого поведения рассмотрим функцию (46) подробнее. При $\gamma_s \ll 1$, что отвечает пределу редких столкновений, из формулы (46) получаем выражение

$$I(\Omega) \simeq \frac{\Omega^5}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{\Omega^2}{2}\right). \tag{47}$$

В этом случае максимум спектрального распределения находится при $\Omega_{\max} \simeq \sqrt{5}$, что соответствует частоте

$$\omega_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{\tau\sqrt{1+R^2L^2}}. \tag{48}$$

Если за время действия лазерного импульса происходит много столкновений электронов ($\gamma_s \gg 1$), из формулы (46) имеем соотношение

$$I_s(\Omega) \simeq \sqrt{\gamma_s}\,\Omega^{9/2}\exp\left(-\frac{\Omega^2}{2}\right). \tag{49}$$

Функция (49) имеет максимум при $\Omega_{\max} = 3/\sqrt{2}$, что соответствует частоте

$$\omega_{\max} = \frac{3}{\sqrt{2}\,\tau\sqrt{1+R^2/L^2}}. \tag{50}$$

Частоты (48) и (50) различаются незначительно, что соответствует данным, представленным на рис.2. При острой фокусировке лазерного излучения $R \ll L$, и положение максимума спектрального распределения определяется обратной длительностью лазерного импульса: $\omega_{\max} \sim 1/\tau$. С увеличением размера фокального пятна максимум смещается в область более низких частот $\omega_{\max} \sim c/R$. Также, в согласии с рис.2, из формулы (49) видно, что в пределе частых столкновений электронов максимум функции $I(\Omega)$ возрастает пропорционально $\sqrt{\gamma_s}$.

Интегрируя выражение (45) по частотам, находим полную энергию поверхностных волн

$$W = \frac{8\sqrt{2}\,e^2}{L}\frac{W_L^2}{m^2c^4}\frac{w}{\omega_p^5\tau^5(1+R^2L^2)^3}, \tag{51}$$

где

$$w = \int_0^\infty d\Omega I(\Omega) = \int_0^\infty d\Omega\frac{\Omega^{9/2}\sqrt{\Omega^2+\gamma_s^2}}{\sqrt{\Omega+\sqrt{\Omega^2+\gamma_s^2}}}\exp\left(-\frac{\Omega^2}{2}\right). \tag{52}$$

Из формулы (51) видно, что при фиксированных энергии и длительности лазерного импульса энергия поверхностных волн максимальна при острой фокусировке, когда выполнено условие $R \ll L$. Зависимость нормированной энергии поверхностных волн (52) от частоты столкновений электронов представлена на рис.3. При больших значениях γ_s энергия возрастает пропорционально $\sqrt{\gamma_s}$. Используя приближенные формулы (47) и (49), получаем явные выражения для величины w при малых и больших значениях γ_s. В пределе редких столкновений электронов, когда $\gamma_s \ll 1$, интегрируя (47) по Ω, находим соотношение

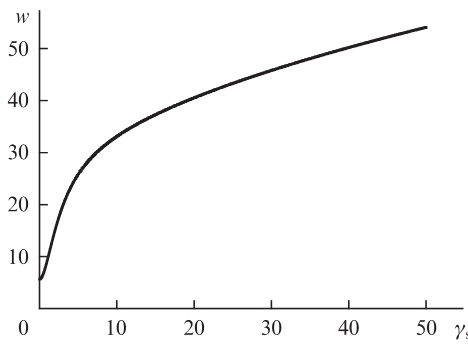

Рис.3. Зависимость нормированной энергии поверхностных волн w (52) от параметра γ_s.

$$w = \int_0^\infty d\Omega\frac{\Omega^5}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{\Omega^2}{2}\right) = \frac{8}{\sqrt{2}} \simeq 5.7. \tag{53}$$

В пределе частых столкновений $\gamma_s \gg 1$, и для нормированной энергии поверхностных волн из (52) имеем выражение

$$w = \sqrt{\gamma_s}\int_0^\infty d\Omega\Omega^{9/2}\exp\left(-\frac{\Omega^2}{2}\right)$$
$$= 2^{7/4}\frac{21}{16}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\gamma_s} \simeq 5.4\sqrt{\gamma_s}. \tag{54}$$

Проанализируем пространственно-временную структуру поверхностной волны на поверхности проводника, где $z = 0$. Применяя обратное преобразование Фурье по времени, из формул (33), (43) находим распределение магнитного поля поверхностной волны

$$B_\varphi(\rho, z=0, t) = -\frac{eE_L^2R^2\tau}{2\sqrt{2}\,mc(c\tau_*)^{3/2}(\omega_p\tau_*)^3}\frac{H(\xi)}{\sqrt{\rho}}, \tag{55}$$

$$H(\xi) = 2\mathrm{Re}\int_0^\infty dz z^3\sqrt{z+i\gamma_s}\exp\left(i\frac{\pi}{4}+iz\xi-\frac{z^2}{4}\right), \tag{56}$$

где $\xi = (\rho/c - t)/\tau_*$ и использовано тождество $B_\varphi(\rho, z=0, -\omega) = B_\varphi^*(\rho, z=0, \omega)$. Зависимость (56) представлена на рис.4 для двух значений безразмерной частоты столкновений электронов γ_s. Кривая *2* соответствует пределу, когда частота столкновений меньше $1/\tau_*$. Увеличение частоты столкнове-

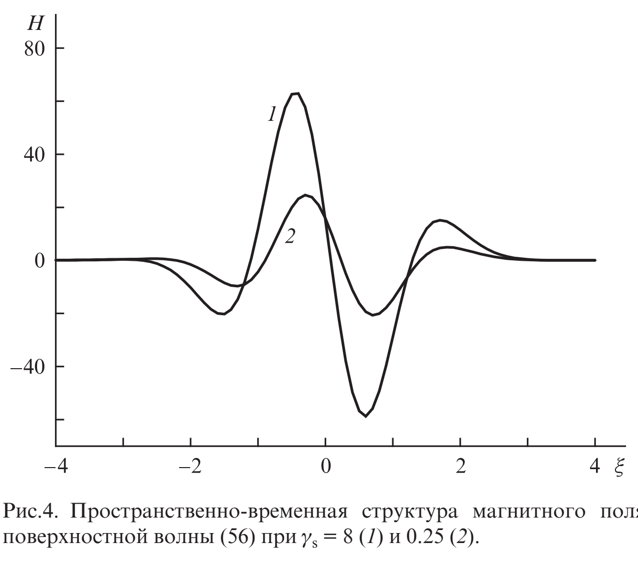

Рис.4. Пространственно-временная структура магнитного поля поверхностной волны (56) при $\gamma_s = 8$ (*1*) и 0.25 (*2*).

ний электронов приводит к росту амплитуды генерируемого магнитного поля, при этом одновременно происходит модификация пространственно-временного профиля поверхностной волны (кривая *1* на рис.4). В пределе частых столкновений, когда $\gamma_s \gg 1$, из формулы (56) находим выражение

$$H(\xi) = -2\sqrt{\pi\gamma_s}\frac{d^3}{d\xi^3}\exp(-\xi^2)$$
$$= -8\sqrt{\pi\gamma_s}\,\xi(3-2\xi^2)\exp(-\xi^2). \qquad (57)$$

Из рис.4 и формул (56), (57) следует, что поверхностная волна распространяется вдоль поверхности металла в виде электромагнитного импульса с длительностью порядка τ_*. При острой фокусировке лазерного излучения $R \ll L$, и длительность импульса поверхностной волны сопоставима с длительностью лазерного импульса. При увеличении размера фокального пятна длительность импульса поверхностной волны увеличивается и при $R \gg L$ становится равной R/c.

6. Заключение

Рассмотрим энергию поверхностных волн для типичных параметров лазерного воздействия на проводник. Для этого перепишем формулу (51) с учетом выражения $W_L = I_L\pi^{3/2}R^2\tau$:

$$W = 8\sqrt{2}\,\pi^3\frac{e^2\omega_p}{c}\left(\frac{I_L}{m\omega_p^3}\right)^2\frac{R^4L^2}{(R^2+L^2)^3}w, \qquad (58)$$

где $I_L = cE_L^2/(8\pi)$ – плотность потока лазерного излучения. Энергия (58) при условии $R^2 = 2L^2$ имеет максимальную величину

$$W_{max} \approx 52\frac{e^2\omega_p}{c}\left(\frac{I_L}{m\omega_p^3}\right)^2 w. \qquad (59)$$

Приведем оценку энергии и частоты генерируемых поверхностных волн. В качестве мишени используем полупроводник с плазменной частотой $\omega_p \approx 2\times10^{14}$ с$^{-1}$ и частотой столкновений электронов $\nu_s \approx 10^{13}$ с$^{-1}$. Примем, что плотность потока $I_L \approx 10^{12}$ Вт/см^2, длительность импульса $\tau \approx 400$ фс, а несущая частота $\omega_0 \approx 2\times10^{14}$ с$^{-1}$. Строго говоря, при $\omega_0 \approx \omega_p$ формула (59) требует уточнения. Однако из сравнения выражения (59) с результатами, полученными в [13] при $\omega_0 > \omega_p$, можно заключить, что оптимальные условия генерации достигаются именно при $\omega_0 \approx \omega_p$, а формула (59) пригодна для оценок и при таких частотах. Для принятых параметров длина импульса $L \approx 120$ мкм, а $R \approx 170$ мкм. Характеризующий влияние столкновений параметр $\gamma_s \approx 7$, и в соответствии с рис.3 величина $w \approx 30$. В этих условиях, согласно формуле (50), максимум излучения имеет место на частоте 0.5 ТГц, а полная энергия излучения (59) составляет 0.5×10^{-12} Дж. Поскольку полная энергия в импульсе равна 6×10^{-4} Дж, то эффективность преобразования весьма мала – примерно 10^{-9}. Вместе с тем, как видно из соотношения (59), в проводниках с меньшей плазменной частотой и при большей интенсивности излучения эффективность генерации можно существенно повысить. Однако выбирать слишком большую интенсивность не следует из-за эффективного нагрева электронов, а затем и решетки. Отметим также, что в металлах, где плазменная частота велика, эффективность генерации поверхностных волн при пондеромоторном воздействии падающего вдоль нормали к поверхности образца сфокусированного лазерного импульсного излучения меньше, чем в полупроводниках.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-02-00744) и программы Президиума РАН № 24.

1. Raether H.R. *Surface Plasmons on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings* (New York: Springer-Verlag, 1988, vol. 111).
2. Irvine S.E., Elezzabi A.Y. *Appl. Phys. Lett.*, **86**, 264102 (2005).
3. Welsh G.H., Wynne K. *Opt. Express*, **17**, 2470 (2009).
4. Майер С.А. *Плазмоника: Теория и приложения* (М.: R&C dynamics, 2011, с. 22).
5. Kim S., Jin J., Kim Y.-I., Park Y.-J., Kim Y., Kim S.W. *Nature*, **453**, 757 (2008).
6. Kadlec F., Kuzel P., Coutaz J.-L. *Opt. Lett.*, **29**, 2674 (2004).
7. Kroo N., Farkas Gy., Dombi P., Varro S. *Opt. Express*, **16**, 21656 (2008).
8. Ионин А.А., Кудряшов С.И., Селезнев Л.В., Синицин Д.В., Емельянов В.И. *Письма в ЖЭТФ*, **97**, 139 (2013).
9. Parashar J., Pandey H.D., Tripathi V.K. *J. Plasma Phys.*, **59**, 97 (1998).
10. Wang X.Y., Downer M.C. *Opt. Lett.*, **17**, 1450 (1992).
11. Кудряшов С.И., Емельянов В.И. *Письма в ЖЭТФ*, **73**, 751 (2001).
12. Lindgren T., Larsson J., Stenflo L. *Plasma Phys.*, **24**, 1177 (1982).
13. Фролов А.А. *Физика плазмы*, **33**, 206 (2007).
14. Гуржи Р.Н. *ЖЭТФ*, **35**, 965 (1957).