

## Эволюция волнового пакета, рассеивающегося на одномерном потенциале

А.Ж.Хачатрян, Ал.Г.Алексян, В.А.Хоецян, Н.А.Алексян

*Рассмотрена эволюция волнового пакета, составленного из группы описывающих процесс стационарного рассеяния волновых функций и туннелирующего сквозь одномерный потенциал произвольного вида. В качестве основной характеристики временного хода процесса туннелирования выбрана скорость распространения максимума волнового пакета. Показано, что известная формула Хартмана для времени туннелирования соответствует волновому пакету с однородным по волновому числу спектральным составом в том случае, когда дисперсии фазы и модуля коэффициента прохождения учитываются только в линейном приближении. Доказано, что амплитуда главного максимума интенсивности прошедшей волны не зависит от времени туннелирования, а определяется коэффициентом прохождения спектральной компоненты на несущей частоте и шириной спектра волнового пакета. Показано, что в пределе бесконечно широкого потенциального барьера амплитуда максимума волнового пакета стремится к нулю медленнее, чем время туннелирования к своему асимптотическому значению, т. е. действительно имеет место парадокс о бесконечно большой скорости распространения волнового возмущения сквозь барьер.*

**Ключевые слова:** волновой пакет, туннелирование, эффект Хартмана.

### 1. Введение

В последнее время сильно возрос интерес к вопросу об изменениях в динамике процесса передачи волнового возмущения в среде, вносимых неоднородными участками среды. Данная проблема, более известная как проблема описания временного хода процесса туннелирования, уже не один десяток лет интенсивно исследуется [1–10]. Оказалось, что несмотря на прозрачность и простоту постановки, эта проблема довольно трудно поддается изучению. Спорным является вопрос об определении количественных характеристик, необходимых для удовлетворительного описания процесса туннелирования, а также об интерпретации их физического смысла. Как известно, проводимые в данном направлении исследования до сих пор еще не дали окончательного ответа на вопрос о влиянии неоднородности среды на скорость передачи в ней возмущения. Открытым, в частности, остается вопрос о том, как следует однозначно и по возможности более полно определять скорость сильно изменяющегося как по форме, так и по размерам объекта, коим является распространяющееся в неоднородной среде локальное волновое возмущение.

В связи с проблемой описания временного хода процесса туннелирования особого внимания заслуживает так называемый эффект Хартмана [11–14]. Согласно данному эффекту в некоторых случаях неоднородность среды

может привести не к уменьшению, а к увеличению скорости передачи волнового возмущения и в принципе сделать возможным реализацию волновых процессов со сколь угодно большими скоростями распространения волнового возмущения, превышающими даже скорость света в вакууме. Несмотря на многочисленные усилия и большое количество работ, направленных на преодоление противоречия между основным постулатом специальной теории относительности и возможностью переноса волнового возмущения со сверхсветовой скоростью, эффект Хартмана все еще остается парадоксом. Можно сказать, что вся сложность и нетривиальность проблемы обусловлена правомочностью применения понятий фазовой и групповой скоростей, а также вкладываемого в них физического смысла для волн, распространяющихся в неоднородных средах.

Первым экспериментально зафиксированным объектом, движущимся со «сверхсветовой скоростью», был короткий импульс микроволнового излучения, прошедший сквозь активную усиливающую среду [15–17]. Как показало детальное рассмотрение условий эксперимента, наблюдаемый эффект никоим образом не противоречит специальной теории относительности, а является прямым следствием того, что в активной среде кроме увеличения энергии проходящего сквозь нее электромагнитного импульса может также происходить поглощение этой энергии. Так, при вхождении импульса в среду его передний фронт провоцирует релаксацию поддерживаемого извне дипольного момента. В результате этого высвечивание энергии областью активной среды приводит к тому, что она становится поглощающей: задний фронт волны, пересекая уже высветивший энергию объем, отдает ему свою энергию, возвращая, тем самым, среду в активное состояние.

Вопрос не вызывал бы столь активного обсуждения, если бы схожее явление не наблюдалось экспериментально при прохождении волны сквозь неактивную среду [17–21]. Несмотря на то что случай взаимодействия с ак-

А.Ж.Хачатрян, В.А.Хоецян, Н.А.Алексян. Государственный инженерный университет Армении, Армения, 0009 Ереван, ул. В.Теряна, 105; e-mail: ashot.khachatryan@gmail.com

Ал.Г.Алексян. Институт прикладных проблем физики НАН Армении, Армения, 0014 Ереван, ул. Гр.Нерсисяна; e-mail: alalbert@inbox.ru

Поступила в редакцию 22 сентября 2012 г., после доработки – 7 декабря 2012 г.

тивной средой нашел свое более или менее удовлетворительное физическое толкование, попытки объяснения случая взаимодействия с неактивной средой послужили поводом для выдвижения различного рода гипотез и предположений, включая предположение о том, что ход процесса туннелирования следует рассматривать в контексте комплексного времени [22, 23]. Многие сходятся в том, что время туннелирования частицы сквозь барьерную область характеризуется так называемым фазовым временем прохождения, определяемым по фазе комплексного коэффициента прохождения [11]. По своей сути понятие фазового времени базируется на рассмотрении динамики распространения группы волн. Различными авторами время туннелирования связывается с движением центра масс волнового пакета или же со скоростью движения максимума прошедшего волнового пакета [22–26]. Второй из известных подходов к определению характерного времени прохождения или длительности квантово-механического процесса туннелирования основывается на идее введения так называемых внешних часов. Первым примером внешних часов являются так называемые ларморовские часы [27–29], для которых расчет времени туннелирования проводится на основе величины, характеризующей изменение направления спина частицы при ее прохождении сквозь потенциальный барьер, в котором существует малое магнитное поле. Второй пример – это внешние часы, определяющие время туннелирования с помощью так называемых барьерных часов, ход которых связывается с изменением энергии частицы, взаимодействующей с прямоугольным потенциальным барьером с высотой, очень медленно пульсирующей во времени [30]. Третий, заслуживающий внимания подход основывается на концепции, рассматривающей процесс туннелирования как стохастическое движение частицы, возникающее вследствие многократного отражения от границ барьера. В данном подходе длительность туннелирования определяется как усредненное время, затрачиваемое частицей при подбарьерном движении по всевозможным «квазиклассическим» траекториям [31, 32].

Следует также отметить важность рассматриваемой задачи с прикладной точки зрения. Так, в последнее время интерес к туннелированию обусловлен, в частности, прогрессом в области наноэлектроники и разработкой новых устройств с рекордными параметрами, основанных на туннельном эффекте [33].

В настоящей работе нами рассматривается динамика распространения волнового пакета, состоящего из материальных волн и рассеивающегося на одномерном статическом потенциальном барьере. В частности, нами исследуется вопрос о зависимости амплитуды прошедшего пакета от ширины барьера  $L$ . Данный вопрос представляется особенно важным в связи с проблемой введения в рассмотрение временных характеристик процесса туннелирования. Дело в том, что, согласно известному парадоксу Хартмана, в подбарьерной области энергий увеличение ширины барьера ведет к неограниченному росту скорости передачи возмущения волновым пакетом. Вместе с тем увеличение ширины барьера приводит также к неограниченному уменьшению максимума волнового возмущения. Возникает естественный вопрос: насколько мы правомочны судить о скорости движения объекта в асимптотическом случае, когда этот объект фактически перестает существовать? Для выяснения данного вопроса, на наш взгляд, необходимо исследовать, какая из величин –

скорость передачи или максимум волнового возмущения – будет быстрее стремиться к своему асимптотическому значению.

## 2. Базис для описания эволюционной задачи

Рассмотрение волнового процесса проведем на основе представления поля в виде суммы собственных мод – гармонических во времени волн – пространственной зависимостью, отвечающей условиям непрерывности волнового поля и его производной во всем пространстве. Как известно, всякое волновое движение материальных волн в поле одномерного потенциала описывается следующим нестационарным уравнением Шредингера:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x) \Psi(x, t), \quad (1)$$

где  $U(x)$  – потенциальная энергия частицы, которую мы далее считаем зависящей только от одной пространственной координаты  $x$ .

В силу линейности уравнения всякое волновое движение может быть представлено в виде суперпозиции стационарных волновых движений, для которых временная зависимость волновой функции имеет экспоненциальный характер:  $\Psi(x, t) \propto \exp(-iEt/\hbar)$ , где  $E$  – энергия движения. Очень часто в случае одномерного стационарного движения для конкретизации вида искомого решения (постановки задачи) вместо зависящей от энергии волновой функции  $\varphi_E(x)$  рассматривают зависящую от импульса  $p(\varphi_p(x))$  или же от квазиволнового числа  $k(\varphi_k(x))$  волновую функцию  $\Psi_E(x, t)$ :

$$\Psi_E(x, t) = \varphi_E(x) \exp[-iEt/\hbar], \quad (2)$$

$$\Psi_E(x, t) = \varphi_p(x) \exp[-iE(p)t/\hbar], \quad (3)$$

$$\Psi_E(x, t) = \varphi_k(x) \exp[-iE(k)t/\hbar], \quad (4)$$

где вне зависимости от вида накладываемого на волновую функцию асимптотического условия все три представления волновой функции –  $\varphi_E(x)$ ,  $\varphi_p(x)$  и  $\varphi_k(x)$  – удовлетворяют одному и тому же волновому уравнению

$$\frac{d^2 \varphi_{E,p,k}(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \varphi_{E,p,k}(x) = 0, \quad (5)$$

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (6)$$

Как известно, использование представления  $\varphi_p(x)$  или  $\varphi_k(x)$  вместо функции  $\varphi_E(x)$  обусловлено тем, что хотя в общем случае одномерного стационарного движения направление движения остается неопределенным, однако в процессе рассеяния модуль импульса  $p$  и модуль квазиволнового числа  $k$  остаются неизменными. В силу (5) волновое уравнение определяет только пространственную зависимость волновой функции, оставляя ее размерность неопределенной. Размерность волновой функции задается исключительно условием нормировки. Так, для волновой функции  $\varphi_k(x)$  наиболее общее решение уравнения (5) имеет асимптотический вид:

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} a \exp(ikx) + b \exp(-ikx), & x \rightarrow -\infty, \\ c \exp(ikx) + d \exp(-ikx), & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (7)$$

где  $a, d$  – амплитуды сходящихся к области барьера волн,  $b, c$  – амплитуды расходящихся от него волн. Данные амплитуды являются безразмерными величинами, и согласно работе [34] при выполнении условия

$$aa^* + dd^* = \frac{1}{2\pi} \quad (8)$$

волновая функция  $\varphi_k(x)$  (7) вне зависимости от значения  $k$  будет нормирована на функцию  $\delta(k - k')$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) \varphi_{k'}^*(x) dx = \delta(k - k'). \quad (9)$$

Согласно (7) для нормированной волновой функции задачи рассеяния слева  $\varphi_k^{\text{left}}(x)$  значения амплитуд сходящихся к барьеру волн должны быть выбраны следующими:  $a = 1/\sqrt{2\pi}, d = 0$  (см. (8)). Соответственно асимптотическое поведение  $\varphi_k^{\text{left}}(x)$  можно описать выражением

$$\varphi_k^{\text{left}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \exp(ikx) + r(k) \exp(-ikx), & x < 0, \\ t(k) \exp(ikx), & x > L, \end{cases} \quad (10)$$

где  $r(k)$  и  $t(k)$  – амплитуды расходящихся от барьера волн, имеющие смысл коэффициентов отражения и прохождения соответственно.

Далее рассмотрим динамику волновой функции, изначально представляющей собой локализованную в пространстве волну, падающую на барьер слева. Так, при условии  $t \rightarrow \infty$  будем предполагать, что волновая функция  $\Psi(x, t)$  отлична от нуля только при  $x \rightarrow -\infty$ . Поскольку для данного волнового процесса в любой момент времени падающие на барьер справа волны отсутствуют, то для его описания достаточен лишь базис волновых функций, соответствующих задаче рассеяния слева:

$$\Psi(x, t) = \int_0^{\infty} a(k) \varphi_k^{\text{left}}(x) \exp[-iE(k)t/\hbar] dk. \quad (11)$$

Из (11) видно, что при разложении волновой функции по базису  $\varphi_k^{\text{left}}(x)$  вес каждой гармоники определяется исключительно функцией  $a(k)$ , т.е. спектральной зависимостью амплитуд колебаний в  $k$ -пространстве.

Рассмотрим волновой пакет (11), составленный из группы волн  $\varphi_k^{\text{left}}(x)$  (10) с амплитудами  $a(k)$ , принимающими постоянное значение внутри некоторого интервала  $[k_0 - \Delta k_0, k_0 + \Delta k_0]$  и равными нулю вне его. Нормировка функций  $\varphi_k^{\text{left}}(x)$  на функцию  $\delta(k - k')$  позволяет интерпретировать величину  $|a(k)|^2 dk$  как вероятность обнаружения значения физической величины в интервале  $[k, k + dk]$ . Требуя, чтобы

$$\int_0^{\infty} |a(k)|^2 dk = 1,$$

в соответствие с изложенным выше функцию  $a(k)$  можно представить в виде

$$a(k) = \begin{cases} 0, & k < k_0 - \Delta k_0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\Delta k_0}}, & k_0 - \Delta k_0 < k < k_0 + \Delta k_0, \\ 0, & k > k_0 + \Delta k_0. \end{cases} \quad (12)$$

Заметим, что выбор  $a(k)$  в виде (12) автоматически обеспечивает равенство

$$\int_0^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (13)$$

для любого момента времени.

Далее мы будем исследовать пакеты с однородным спектром волновых функций, описывающих процесс стационарного рассеяния, когда  $a(k)$  не зависит от  $k$ . Это не является существенным фактором, ограничивающим общность проводимого нами рассмотрения, поскольку спектральный интервал, из которого выбираются формирующие волновой пакет состояния, считается малым. Вследствие этого, по мере уменьшения спектрального интервала, пренебрежение зависимостью амплитуд  $a(k)$ , которые являются весовыми множителями отдельных состояний из спектра волнового пакета, от параметра состояния  $k$  представляется оправданным.

### 3. Причинность в процессе рассеяния

Приведенные в данном разделе результаты являются достаточно известными [30, 35], и их воспроизведение обусловлено только лишь необходимостью более полного и ясного изложения представленных в последующих разделах материала.

Воспользовавшись соотношениями (10)–(12), для произвольного момента времени рассматриваемый волновой процесс вне области потенциала можно представить в виде

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\Delta k_0}} \times \quad (14)$$

$$\begin{cases} \int_{k_0 - \Delta k_0}^{k_0 + \Delta k_0} [\exp(ikx) + r(k) \exp(-ikx)] \exp\left[-\frac{iE(k)t}{\hbar}\right] dk, & x < 0, \\ \int_{k_0 - \Delta k_0}^{k_0 + \Delta k_0} t(k) \exp(ikx) \exp\left[-\frac{iE(k)t}{\hbar}\right] dk, & x > L. \end{cases}$$

Важно отметить, что вся эволюционная картина и, в частности, выбор в начальный момент времени формы и направления движения волнового пакета содержатся в функциональной зависимости  $a(k)$  (см. (11)), которая для случая (14) имеет вид (12). Вопрос заключается в зависимости  $a(k)$  от конкретной физической постановки задачи. Ниже будет показано, что выбор  $a(k)$  в виде (12) соответствует рассматриваемому нами волновому процессу, который, как было отмечено выше, изначально представляет собой локализованную в пространстве волну, падающую на барьер слева. Так, в выражении (14) можно выделить члены, описывающие «начальное» состояние поля в виде падающего на барьер волнового пакета и «конечное» состояние поля в виде расходящихся от барьера волн как прошедшего, так и отраженного волновых пакетов.

В соответствии с вкладываемым в процесс рассеяния волны смыслом введем функции  $\Psi_{\text{inc}}(x, t)$ ,  $\Psi_{\text{ref}}(x, t)$  и  $\Psi_{\text{tr}}(x, t)$ , выделяя и тем самым отличая друг от друга в волновом процессе падающую, отраженную и прошедшую волны (рис.1). Согласно естественной причинно-следственной связи, процесс должен удовлетворять следующим условиям:

$$\Psi_{\text{inc}}(x, t) \neq 0, \Psi_{\text{ref}}(x, t) = 0, \Psi_{\text{tr}}(x, t) = 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty, \quad (15)$$

$$\Psi_{\text{inc}}(x, t) = 0, \Psi_{\text{ref}}(x, t) \neq 0, \Psi_{\text{tr}}(x, t) \neq 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty, \quad (16)$$

хотя для любого момента времени, в принципе, имеются волны по обе стороны от барьера.

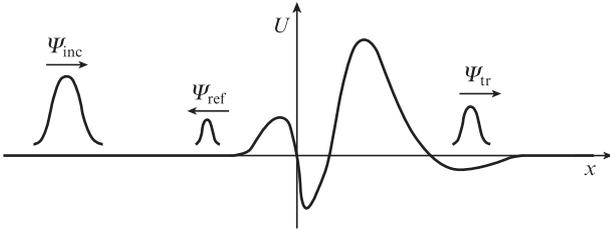


Рис.1. Схематическое изображение эволюции волнового пакета, рассеивающегося на одномерном потенциале.

Вводя обозначение  $k = k_0 + q$ , будем в соответствии с (15), (16) определять функции  $\Psi_{\text{inc}}(x, t)$ ,  $\Psi_{\text{ref}}(x, t)$  и  $\Psi_{\text{tr}}(x, t)$  согласно формулам (см. (14))

$$\Psi_{\text{inc}}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\Delta k_0}} \times \int_{-\Delta k_0}^{\Delta k_0} \exp\left[i(k_0 + q)x - i\frac{\hbar t}{2m}(k_0 + q)^2\right] dq, \quad (17)$$

$$\Psi_{\text{ref}}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\Delta k_0}} \times \int_{-\Delta k_0}^{\Delta k_0} r(k_0 + q) \exp\left[-i(k_0 + q)x - i\frac{\hbar t}{2m}(k_0 + q)^2\right] dq, \quad (18)$$

$$\Psi_{\text{tr}}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\Delta k_0}} \times \int_{-\Delta k_0}^{\Delta k_0} t(k_0 + q) \exp\left[i(k_0 + q)x - i\frac{\hbar t}{2m}(k_0 + q)^2\right] dq. \quad (19)$$

Важно отметить, что области определения  $\Psi_{\text{inc}}(x, t)$ ,  $\Psi_{\text{ref}}(x, t)$  и область определения функции  $\Psi_{\text{tr}}(x, t)$  по пространственной переменной  $x$  различны. Первые две функции задают характер волнового процесса при  $x \rightarrow -\infty$ , а последняя функция – при  $x \rightarrow +\infty$ .

Легко убедиться в том, что функции  $\Psi_{\text{inc}}(x, t)$ ,  $\Psi_{\text{ref}}(x, t)$  и  $\Psi_{\text{tr}}(x, t)$  будут находиться в причинно-следственной связи, т. е. отраженная от барьера и прошедшая через него волны возникают позже, чем падающая волна достигает области барьера. Учитывая, что  $\Delta k_0 \ll k_0$ , и пренебрегая для интервала  $[k_0 - \Delta k_0, k_0 + \Delta k_0]$  зависимостями  $r(k)$ ,  $t(k)$  от  $k$  ( $r(k) \approx r(k_0)$ ,  $t(k) \approx t(k_0)$ ), из (17)–(19) получаем

$$\Psi_{\text{inc}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\Delta k_0}} \times \exp[ik_0(x - u_{\text{ph}}t)] \frac{\sin[(x/u_g - t)u_g\Delta k_0]}{(x/u_g - t)u_g}, \quad (20)$$

$$\Psi_{\text{ref}}(x, t) = \frac{r(k_0)}{\sqrt{\pi\Delta k_0}} \times \exp[-ik_0(x + u_{\text{ph}}t)] \frac{\sin[(x/u_g + t)u_g\Delta k_0]}{(x/u_g + t)u_g}, \quad (21)$$

$$\Psi_{\text{tr}}(x, t) = \frac{t(k_0)}{\sqrt{\pi\Delta k_0}} \times \exp[ik_0(x - u_{\text{ph}}t)] \frac{\sin[(x/u_g - t)u_g\Delta k_0]}{(x/u_g - t)u_g}, \quad (22)$$

где

$$u_{\text{ph}} = \frac{\hbar k_0}{2m} = \sqrt{\frac{E_0}{2m}} = \frac{1}{\hbar} \frac{E(k_0)}{k_0}, \quad (23)$$

$$u_g = \frac{\hbar k_0}{m} = \sqrt{\frac{2E_0}{m}} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE(k_0)}{dk}, \quad (24)$$

а также введены обозначения  $E_0 = E(k_0)$  и  $dE(k_0)/dk = dE(k)/dk$  в точке  $k = k_0$ . Заметим, что различие между скоростями  $u_{\text{ph}}$  и  $u_g$  есть результат дисперсионного закона  $E(k) = \hbar^2 k^2 / (2m)$ , вследствие которого  $E/k \neq dE/dk$ .

Из (20)–(22) видно, что все функции  $\Psi_{\text{inc}}(x, t)$ ,  $\Psi_{\text{ref}}(x, t)$  и  $\Psi_{\text{tr}}(x, t)$  – содержат быстро осциллирующие множители вида  $\exp[ik_0(x - u_{\text{ph}}t)]$  и  $\exp[-ik_0(x + u_{\text{ph}}t)]$ , причем  $\Psi_{\text{inc}}(x, t)$  и  $\Psi_{\text{tr}}(x, t)$  заметно отличаются от нуля при выполнении условия  $x/u_g - t \approx 0$ , а  $\Psi_{\text{ref}}(x, t)$  – при выполнении условия  $x/u_g + t \approx 0$ . Отметим также, что вследствие неравенства  $u_{\text{ph}} \neq u_g$  все три волновых пакета расплываются во времени. Действительно, для распространяющегося слева направо и нерасплывающегося волнового пакета должно выполняться равенство

$$\Psi(x, t) = \Psi(x + \Delta x, t + \Delta t), \quad (25)$$

из которого, в частности, следует, что волновое возмущение в точке  $x$  в момент времени  $t$  должно достичь точки  $x + \Delta x$  в момент времени  $t + \Delta t$  и что отношение  $\Delta x/\Delta t = u$  определяет скорость распространения волны. Для распространяющегося в обратном направлении пакета условие сохранения во времени его формы задается равенством

$$\Psi(x, t) = \Psi(x - \Delta x, t + \Delta t). \quad (26)$$

Тот факт, что соотношения (25) и (26) действительно являются условиями сохранения вида волнового процесса, распространяющегося соответственно в положительном и отрицательном направлениях, следует из получаемого из них волнового уравнения. Так, из (25) имеем

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{u} \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (27)$$

а из (26) получаем

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{u} \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (28)$$

Легко убедиться в том, что из каждого из уравнений (27), (28) вытекает волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (29)$$

которое, как известно, описывает волновые процессы в средах без дисперсии.

Из выражений (27)–(29) следует, что распространяющиеся в положительном и отрицательном направлениях волны удовлетворяют различным дифференциальным уравнениям первого порядка, но одному и тому же дифференциальному уравнению второго порядка.

Падающая, отраженная и прошедшая волны (20)–(22) не удовлетворяют условиям (25), (26):

$$\Psi_{\text{inc}}(x, t) \neq \Psi_{\text{inc}}(x + \Delta x, t + \Delta t), \quad (30)$$

$$\Psi_{\text{ref}}(x, t) \neq \Psi_{\text{ref}}(x - \Delta x, t + \Delta t), \quad (31)$$

$$\Psi_{tr}(x, t) \neq \Psi_{tr}(x + \Delta x, t + \Delta t). \quad (32)$$

Как известно, для волн с линейным законом дисперсии неравенства (30)–(32) нужно заменить соответствующими равенствами, т. к. в этом случае справедливо условие  $u_{ph} = u_g = u$ .

В начальный момент времени волновая функция в основном сосредоточена в области отрицательных значений  $x$  и определяется только падающей волной. В более поздние моменты времени она отлична от нуля как слева, так и справа от барьера. Соответственно при условии  $t \rightarrow +\infty$  она определяется лишь прошедшей и отраженной волнами. Из вышеизложенного следует, что между волнами  $\Psi_{inc}(x, t)$ ,  $\Psi_{ref}(x, t)$  и  $\Psi_{tr}(x, t)$  действует причинно-следственная связь, т. е. отраженная и прошедшая волны возникают позже, чем падающая волна начинает рассеиваться на барьере.

#### 4. Временные характеристики процесса туннелирования

Выше, для описания эволюционной задачи, мы обсудили вопрос о выборе удобного базиса, позволяющего естественным образом проследить причинно-следственную связь между падающей первичной волной и прошедшей, а также отраженной волнами. Далее нами будет рассматриваться задача определения временных характеристик процесса туннелирования. Заметим, что формулы (21) и (22) для отраженной и прошедшей волн, были получены в предположении, что коэффициенты  $r(k)$ ,  $t(k)$ , не зависят от квазиволнового числа  $k$  в выбранном интервале  $[k_0 - \Delta k_0, k_0 + \Delta k_0]$ . Из (20), (22) видно, что прошедшая волна отличается от падающей множителем  $t(k_0)$ . Это означает, что прошедшая волна повторяет временной ход падающей волны, но с меньшей амплитудой. Из формул (21), (22) в частности, следует, что в предположениях  $r(k) \approx r(k_0)$  и  $t(k) \approx t(k_0)$  эффект задержки отсутствует.

Далее мы снова вернемся к исследованию эволюции волнового пакета, составленного из группы синхронизованных плоских волн с одинаковыми амплитудами  $a(k)$ , равномерно распределенными в некотором малом интервале  $[k_0 - \Delta k_0, k_0 + \Delta k_0]$  (12). Рассматривая только прошедшую волну, представим коэффициент прохождения в следующем виде:

$$t(k) = \exp\{\ln[T(k)] + i\Phi(k)\}, \quad (33)$$

где  $T(k)$  и  $\Phi(k)$  – соответственно модуль и фаза  $t(k)$ . Для прошедшей волны можно записать выражение (см. (19))

$$\Psi_{tr}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\Delta k_0}} \quad (34)$$

$$\times \int_{k_0 - \Delta k_0}^{k_0 + \Delta k_0} \exp\{\ln[T(k)] + i\Phi(k) + ikx\} \exp\left[-\frac{iE(k)t}{\hbar}\right] dk.$$

Разложим функции  $T(k)$  и  $\Phi(k)$  в окрестностях точки  $k_0$  в ряд Тейлора и в предположении малости  $\Delta k_0$  ограничимся линейным приближением:

$$\ln[T(k)] = \ln[T(k_0)] + \frac{\partial \ln[T(k_0)]}{\partial k} q, \quad (35)$$

$$\Phi(k) = \Phi(k_0) + \frac{\partial \Phi(k_0)}{\partial k} q, \quad (36)$$

где  $q = k - k_0$ . Здесь  $\partial \ln[T(k_0)]/\partial k$  и  $\partial \Phi(k_0)/\partial k$  означают производные функций  $\ln[T(k)]$  и  $\Phi(k)$  в точке  $k = k_0$ . Использование частной производной подразумевает, что величины  $T(k)$  и  $\Phi(k)$  зависят также от толщины слоя.

Особого внимания заслуживает вопрос о влиянии расплывания волнового пакета на временные характеристики туннелирования. Ясно, что рассматриваемое нами линейное приближение закона дисперсии может считаться оправданным, только если ширина одномерного потенциала много меньше пространственного размера волнового пакета:  $\Delta x \ll 2\pi/k$ . В общем случае учет влияния закона дисперсии на временную динамику процесса туннелирования представляет собой трудную задачу. Понятно одно, что при сопоставимости указанных величин влияние эффекта расплывания на временной ход процесса будет сильно зависеть от соотношения спектрального интервала ( $\hbar^2 \Delta k / (2m)$ ) и рассеивающего потенциала. В частности, от отношения величины спектрального интервала к высоте барьера, от того, расположен ли он целиком в подбарьерной или же в надбарьерной области, и т. д. Всесторонний анализ данного вопроса может быть проведен на основе точной компьютерной модели рассматриваемого процесса.

В соответствии с (35) и (36) коэффициент прохождения

$$t(k) \approx t(k_0) \exp\left\{\left(\frac{\partial \ln[T(k_0)]}{\partial k} + i \frac{\partial \Phi(k_0)}{\partial k}\right) q\right\}, \quad (37)$$

где

$$t(k_0) = \exp\{\ln[T(k_0)] + i\Phi(k_0)\}. \quad (38)$$

Подставляя (37) в (34) и снова, как и при выводе (20)–(22), полагая, что  $\Delta k_0 \ll k_0$  и

$$k^2 = [k_0 + (k - k_0)]^2 \approx k_0^2 + 2k_0 q, \quad (39)$$

пространно-временную зависимость прошедшей волны можно представить в виде

$$\Psi_{tr}(x, t) = \frac{t(k_0)}{\sqrt{\pi\Delta k_0}} \exp[ik_0(x - u_{ph}t)] \times \frac{\sin[(x/u_g + \tau_\Phi + i\tau_T - t)u_g \Delta k_0]}{(x/u_g + \tau_\Phi + i\tau_T - t)u_g}, \quad (40)$$

где

$$\tau_\Phi = \frac{1}{u_g} \frac{\partial \Phi(k_0)}{\partial k}; \quad \tau_T = -\frac{1}{u_g} \frac{\partial \ln[T(k_0)]}{\partial k}. \quad (41)$$

Выражения (41) можно переписать в следующем виде:

$$\tau_\Phi = \hbar \frac{\partial \Phi(E_0)}{\partial E}, \quad \tau_T = -\hbar \frac{\partial \ln[T(E_0)]}{\partial E}, \quad (42)$$

где  $\partial \Phi(E_0)/\partial E$  и  $\partial \ln[T(E_0)]/\partial E$  соответствуют производным функций  $\Phi(E_0)$  и  $\ln[T(E)]$  в точке  $E = E_0$ .

Как видно из формул (22) и (40), выражение для прошедшей волны, вычисленное при  $t(k) \approx t(k_0)$ , во многом схоже с выражением для той же волны, полученным с учетом дисперсии коэффициента прохождения:

$$\Psi_{tr}(x, t) \sim \frac{\sin \xi}{\xi} \exp[ik_0(x - u_{ph}t)]. \quad (43)$$

В обоих случаях огибающая имеет вид

$$\frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (44)$$

Известно, что наибольшее действительное значение данной функции равно единице ( $\sin \xi/\xi = 1$ ) и соответствует нулевому значению ее аргумента ( $\xi = 0$ ).

В случае свободного движения частиц аргумент огибающей ( $\xi = \xi_0$ ) является действительной величиной (см. (22) и (43), (44)):

$$\xi_0 = (x/u_g - t)u_g \Delta k_0. \quad (45)$$

Если для прошедшей волны учтена спектральная зависимость модуля коэффициента прохождения (см. (40), (43) и (44)), то аргумент огибающей является комплексным:

$$\xi = (x/u_g + \tau_\phi + i\tau_T - t)u_g \Delta k_0. \quad (46)$$

Из (46) видно, что при формальном допущении о возможности принятия временем комплексных значений, достижение главного максимума огибающей будет соответствовать моменту времени

$$\tau = x/u_g + \tau_\phi + i\tau_T. \quad (47)$$

Данный результат перекликается с известным результатом работ [29, 36], где временной ход процесса туннелирования интерпретируется в рамках комплексного времени, а само время туннелирования рассчитывается по формуле

$$\tau_{\text{Вн}} = \sqrt{(x/u_g + \tau_\phi)^2 + \tau_T^2}. \quad (48)$$

Как следует из (46) и (47), если пренебречь зависимостью от энергии модуля коэффициента прохождения  $T(E)$ , то задержку сигнала будет определять только время  $\tau_\phi$ .

## 5. Время задержки главного максимума волнового пакета

Далее, для определенности, будем рассматривать потенциальный барьер с четко выраженными границами, координаты которых  $x = 0$  и  $x = L$  ( $L > 0$ ). Определим время задержки волнового пакета, возникающего вследствие туннелирования сквозь барьер, как разность времен появления главного максимума  $|\Psi_{\text{тр}}(x, t)|^2$  в крайней точке барьера  $x = L$  в отсутствие и при наличии барьера. Из (44), (45) видно, что в отсутствие барьера нахождение времени появления главного максимума сводится к исследованию временной зависимости функции

$$\Omega_0(t) = \left[ \frac{\sin(L/u_g - t)u_g \Delta k_0}{(L/u_g - t)u_g \Delta k_0} \right]^2, \quad (49)$$

а при учете дисперсии коэффициента прохождения, как следует из (44), (46), должна исследоваться временная зависимость функции

$$\Omega(t) = \frac{\sin[(L/u_g + \tau_\phi + i\tau_T - t)u_g \Delta k_0]}{(L/u_g + \tau_\phi + i\tau_T - t)u_g \Delta k_0} \times \left\{ \frac{\sin[(L/u_g + \tau_\phi + i\tau_T - t)u_g \Delta k_0]}{(L/u_g + \tau_\phi + i\tau_T - t)u_g \Delta k_0} \right\}^*. \quad (50)$$

Обозначим через  $\tau_0$  и  $\tau$  моменты времени  $t$ , соответствующие главным максимумам функций  $\Omega_0(t)$  и  $\Omega(t)$  соответственно. Тогда время задержки

$$\Delta\tau = \tau - \tau_0. \quad (51)$$

Для определения  $\tau_0$  будем поступать стандартным образом, т. е. вычислять производную функции  $\Omega_0(t)$  (49) и приравнять ее нулю:

$$\frac{\sin(L/u_g - \tau_0)u_g \Delta k_0}{(L/u_g - \tau_0)u_g \Delta k_0} = \cos[(L/u_g - \tau_0)u_g \Delta k_0]. \quad (52)$$

Корни данного трансцендентного уравнения  $\tau_0$  будут соответствовать экстремумам функции  $\Omega_0(t)$  (49). Из (52) следует, что в точках, соответствующих экстремуму,

$$\Omega_0(t_n) = \{\cos[(L/u_g - \tau_0)u_g \Delta k_0]\}^2. \quad (53)$$

Наибольшее значение данного выражения достигается, когда аргумент косинуса

$$(L/u_g - \tau_0)u_g \Delta k_0 = \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (54)$$

Из (52)–(54) видно, что  $\tau_0$  будет определять главный максимум  $\Omega_0(t)$  при  $n = 0$ . Согласно вышесказанному

$$\tau_0 = L/u_g. \quad (55)$$

Воспользовавшись выражением (55), для значений  $\tau$ , обеспечивающих условие экстремума функции  $\Omega(t)$  (50), из условия равенства нулю ее производной можем записать следующее трансцендентное уравнение:

$$\frac{\sin[(L/u_g + \tau_\phi + i\tau_T - \tau)u_g \Delta k_0] \sin[(L/u_g + \tau_\phi - i\tau_T - \tau)u_g \Delta k_0]}{(L/u_g + \tau_\phi + i\tau_T - \tau)u_g \Delta k_0 (L/u_g + \tau_\phi - i\tau_T - \tau)u_g \Delta k_0} = \frac{\sin[2(L/u_g + \tau_\phi - \tau)u_g \Delta k_0]}{2(L/u_g + \tau_\phi - \tau)u_g \Delta k_0}. \quad (56)$$

Левая часть данного уравнения совпадает с функцией  $\Omega(t)$  (50), так что в точках экстремума

$$\Omega(t_n) = \frac{\sin[2(L/u_g + \tau_\phi - \tau)u_g \Delta k_0]}{2(L/u_g + \tau_\phi - \tau)u_g \Delta k_0}. \quad (57)$$

Выражение (57) достигает наибольшего значения, когда аргумент синуса равен нулю:

$$2(L/u_g + \tau_\phi - \tau)u_g \Delta k_0 = 0. \quad (58)$$

Момент времени  $\tau$ , определенный в соответствии с выражением (58), следует рассматривать как момент времени появления главного максимума прошедшей волны, т. к. оно удовлетворяет условию экстремума

$$\tau = \tau_\phi + \tau_0. \quad (59)$$

Время прохождения волны сквозь барьер совпадает со временем появления главного максимума  $\tau$  в точке  $x = L$ , т. к. для свободного пакета в начальный момент времени  $t = 0$  максимум волнового пакета находится в точке  $x = 0$ . Используя (59), (42) и (55), для времени прохождения волнового пакета (времени туннелирования) можно получить выражение

$$\tau = \hbar \frac{\partial \Phi(E_0)}{\partial E} + \frac{L}{u_g}. \quad (60)$$

Данная формула является не чем иным, как известным результатом Хартмана для времени прохождения волны сквозь потенциальный барьер [11–13].

Обычно формула Хартмана записывается через фазу переопределенного коэффициента прохождения, т. е. вместо величины  $t(k)$  за коэффициент прохождения принимается величина

$$\tilde{t}(k) = t(k)\exp(ikL). \quad (61)$$

Фаза данной величины связана с  $\Phi(E)$  (33) простым соотношением:

$$\phi(E) = \Phi(E) + kL. \quad (62)$$

Воспользовавшись соотношениями (60), (61), для времени туннелирования получим выражение

$$\tau = \hbar \frac{\partial \phi(E_0)}{\partial E}. \quad (63)$$

Рассчитанное по этой формуле время очень часто называют также фазовым временем и обозначают  $\tau_{ph}$ . Как следует из приведенного выше рассмотрения, формула (63) остается верной, когда дисперсионные зависимости фазы и модуля коэффициента прохождения  $T(E)$  предполагаются слабыми.

## 6. Динамика волнового пакета, рассеивающегося на прямоугольном барьере

На примере прямоугольного потенциального барьера исследуем известный парадокс Хартмана о бесконечно большой скорости туннелирования волнового пакета сквозь барьер. В частности, нас будет интересовать следующий вопрос: какая из величин – время туннелирования (скорость распространения волнового возмущения) или значение главного максимума прошедшей волны – быстрее стремится к своему асимптотическому значению при неограниченном уширении барьера? Необходимо уяснить, насколько мы правомочны судить о времени прохождения волны при сильном ослаблении волнового возмущения или даже при его фактическом отсутствии в пределе бесконечно широкого барьера.

Воспользовавшись формулами (40) и (56), для значения главного максимума в крайней точке барьера можем записать выражение

$$|\Psi_{tr}(L, \tau)|^2 = \frac{\Delta k_0}{\pi} |t(k_0)|^2. \quad (64)$$

Согласно (64) это значение не зависит от времени туннелирования.

Пусть волновой пакет падает слева на прямоугольный потенциальный барьер высотой  $V$  с границами в точках  $x = 0$ ,  $x = L$ . Тогда модуль и фаза коэффициента прохождения определяются следующими известными выражениями:

$$T = \left[ \cosh^2(\chi L) + \left( \frac{k^2 - \chi^2}{2\chi k} \right)^2 \sinh^2(\chi L) \right]^{-1}, \quad (65)$$

$$\phi = \arctan \left[ \frac{k^2 - \chi^2}{2\chi k} \tanh(\chi L) \right], \quad (66)$$

где

$$\chi = \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}; \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}. \quad (67)$$

В случае надбарьерного прохождения ( $E > V$ ) в формулах (65), (66) должна быть проведена замена  $\chi \rightarrow -i\chi$ .

Для достаточно широкого барьера ( $\chi L \gg 1$ ) из (63), (66) получаем

$$\tau_{ph} \rightarrow \frac{\hbar}{\sqrt{E(V-E)}} \tanh(2\chi L) \rightarrow \frac{\hbar}{\sqrt{E(V-E)}}. \quad (68)$$

Из данной формулы, в частности, следует, что неограниченное увеличение высоты барьера ведет к неограниченному росту скорости распространения максимума волнового пакета [11]:

$$u_{max} = L/\tau_{ph} \rightarrow \infty \quad (69)$$

при  $L \rightarrow \infty$ .

Согласно (64), (65) неограниченное увеличение ширины барьера ( $\chi L \gg 1$ ) приводит к экспоненциальному уменьшению коэффициента прохождения:

$$T(L) \rightarrow 16 \frac{E(V-E)}{V^2} \exp(-2\chi L) \rightarrow 0. \quad (70)$$

Как было отмечено выше, мы исследуем вопрос о том, насколько правомочно рассчитывать скорость «объекта» при асимптотическом условии, когда данный «объект» фактически перестает существовать или присутствует асимптотически ослабленным. Для этого, на наш взгляд, важно выяснить, какая из величин –  $T(L)$  (амплитуда максимума) или время туннелирования  $\tau_{ph}$  – быстрее стремится к своему асимптотическому значению.

Как следует из (68),

$$\lim_{\chi L \rightarrow \infty} \left[ \frac{\tau_{ph}(L) \sqrt{E(V-E)}}{\hbar} - 1 \right] = \lim_{\chi L \rightarrow \infty} [\tanh(2\chi L) - 1] \rightarrow 0. \quad (71)$$

Используя (70), получаем

$$\lim_{\chi L \rightarrow \infty} \left[ \frac{T(L) V^2}{16E(V-E)} \right] = \lim_{\chi L \rightarrow \infty} [\exp(-2\chi L)] \rightarrow 0. \quad (72)$$

Заметим, что выражения под знаком предела в (71), (72) являются безразмерными. Рассмотрим отношение этих выражений:

$$\theta = \frac{\tanh(2\chi L) - 1}{\exp(-2\chi L)}. \quad (73)$$

Знаменатель и числитель данной дроби стремятся к нулю при  $\chi L \rightarrow \infty$ . При этом

$$\theta(\chi L \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (74)$$

Как следует из (74), при бесконечном уширении барьера время задержки быстрее стремится к своему предельному значению, чем максимум волнового пакета к своему. Иными словами, для любого наперед заданного значения времени задержки значение максимума конечно. Следовательно, при расчете времени задержки по формуле (63) эффект неограниченного возрастания скорости (69) действительно имеет место.

## 7. Заключение

Таким образом, мы показали, что известная формула Хартмана, применяемая для расчета времени туннелирования, соответствует волновому пакету с определенным,

однородным по волновому числу спектральным составом только в случае линейных дисперсии фазы и модуля коэффициента прохождения. Нами был исследован также вопрос о правомочности расчета скорости «объекта» при асимптотическом условии, когда данный «объект» фактически перестает существовать или присутствует асимптотически ослабленным. Как показал проведенный для прямоугольного барьера расчет, значение максимума волнового пакета медленнее стремится к нулю, чем время туннелирования к своему асимптотическому значению. Из этого результата непосредственно следует, что эффект Хартмана действительно имеет место.

1. Bernardini A., Leo S.D., Rotelli P. *Mod. Phys. Lett. A*, **19**, 2717 (2004).
2. Matveev K.A., Dongxiao Y., Glazman L.I. *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 3351 (1993).
3. Steinberg A.M. *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 2405 (1994).
4. Aharonov Y., Erez N., Reznik B. *Phys. Rev. A*, **65**, 052124 (2002).
5. Chuprikov N.L. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **33**, 4293 (2000).
6. Чуприков Н.Л. *Изв. вузов. Сер. Физика*, **49**, 72 (2006).
7. Leo S.D., Rotelli P. *Eur. Phys. J. C*, **46**, 551 (2006).
8. Игнатович В.К. *УФН*, **166**, 303 (1996).
9. Bell J.S. *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics* (Cambridge: Cambridge University Press, 2004).
10. Vokes P. *Phys. Rev. A*, **83**, 032104 (2011).
11. Hartman T.E. *J. Appl. Phys.*, **33**, 3427 (1962).
12. Hauge E.H., Stuvneng J.A. *Rev. Mod. Phys.*, **61**, 917 (1989).
13. Landauer R., Martin Th. *Rev. Mod. Phys.*, **66**, 217 (1994).
14. Шварцбург А.Б. *УФН*, **177**, 43 (2007).
15. Басов Н.Г., Амбарцумян Р.В., Зуев В.С., Крюков П.Г., Летохов В.С. *ЖЭТФ*, **50**, 23 (1966).
16. Амбарцумян Р.В., Басов Н.Г., Зуев В.С., Крюков П.Г., Летохов В.С. *Письма в ЖЭТФ*, **4**, 19 (1966).
17. Ораевский А.Н. *УФН*, **168**, 1311 (1998).
18. Chiao R.Y. *Phys. Rev. A*, **48**, R34 (1993).
19. Yang S., Page J.H., Liu Z., Cowan M.L., Chan C.T. *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 104301 (2002).
20. Nimtz G., Stahlhofen A.A. *Ann. Phys.*, **17**, 374 (2008).
21. Eckle P., Pfeiffer A.N., Cirelli C., Staudte A., Dorner R., Müller H.G., Büttiker M., Keller U. *Science*, **322**, 1525 (2008).
22. Büttiker M., Landauer R. *Phys. Rev. Lett.*, **49**, 1739 (1982).
23. Winful H.G. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 260401 (2003).
24. Pimpale A.V. *IEEE J. Quantum Electron.*, **28**, 345 (2004).
25. Büttiker M., Washburn S. *Nature*, **271**, 422 (2003).
26. Sokolovski D., Baskin L.M. *Phys. Rev. A*, **36**, 4604 (1987).
27. Базь А.И. *Ядерная физика*, **4**, 252 (1966).
28. Рыбаченко В.Ф. *Ядерная физика*, **5**, 895 (1967).
29. Büttiker M. *Phys. Rev. B*, **27**, 6178 (1983).
30. Bohm D. *Quantum Theory* (New York: Prentice-Hall, 1952).
31. Wigner E.P. *Phys. Rev.*, **98**, 145 (1954).
32. Smith F.T. *Phys. Rev.*, **118**, 349 (1960).
33. Jin-Woo Han, Jae Sub Oh, Meeyappan M. *Appl. Phys. Lett.*, **100**, 213505 (2012).
34. Khachatryan A.Zh. *Armenian J. Phys.* (to be published).
35. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М. *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистической квантовой механике* (М.: Наука, 1971).
36. Büttiker M., Landauer R. *Phys. Rev. Lett.*, **49**, 1739 (1982).