

Рассеяние света шероховатой поверхностью кожи человека.

1. Коэффициенты яркости отраженного света

В.В.Барун, А.П.Иванов

*На основе аналитического решения уравнений Максвелла исследована угловая структура коэффициентов яркости света, отраженного шероховатой поверхностью кожи с крупномасштабными элементами рельефа при освещении направленным пучком излучения, падающим под произвольным углом, снаружи или изнутри среды. Параметры неоднородностей поверхности типичны для кожи человека. Траектория рассчитанных угловых зависимостей дана с точки зрения функции распределения микроплощадок по направлениям. Полученные результаты можно использовать для решения прямых и обратных задач биомедицинской оптики, в частности для определения глубины проникновения света в биоткань, исследования спектров действия излучения на хромофоры ткани в условиях *in vivo*, для развития методов диагностики структурных и биофизических параметров среды, а также для оптимизации механизмов взаимодействия света с биотканями при их неинвазивном облучении через кожу.*

Ключевые слова: шероховатая поверхность, кожа, отражение света, коэффициент яркости, плотность вероятности.

1. Введение

Исследование полей излучения внутри и вне биоткани является ключевым моментом решения широкого круга задач биомедицинской оптики, например задач оптимизации методик светотерапии, лазерной гипертермии, оптической диагностики. При неинвазивном облучении ткани свет проходит через шероховатую границу раздела кожи с окружающей средой и в той или иной степени изменяет свои угловые и энергетические характеристики. Это оказывает влияние на глубину проникновения света, пространственное распределение поглощенной и рассеянной мощности излучения, спектры действия на хромофоры ткани, в связи с чем представляет интерес оценка влияния степени шероховатости поверхности кожи на световые поля в биоткани. Первым этапом такой оценки могло бы стать изучение закономерностей отражения и пропускания излучения самой поверхностью. Кроме того, излучение, рассеянное на границе среды, несет информацию о параметрах шероховатости, что позволяет разрабатывать новые подходы к решению обратной задачи – восстановлению характеристик поверхности оптическими методами. Это важно для косметологии и дерматологии, в частности для оценки эффективности различных средств ухода за кожей.

В подавляющем большинстве работ при теоретическом рассмотрении переноса света в биоткани ее поверхность полагают гладкой. Это допущение обусловлено рядом факторов. Во-первых, решение задачи переноса из-

лучения в среде существенно упрощается. Между тем, из общих физических соображений понятно, что такое допущение может приводить к ошибкам в характеристиках световых полей в среде. Например, в [1] оценено влияние степени шероховатости поверхности раздела двух сред на характеристики рассеянного излучения при различных условиях освещения. Показано, что коэффициенты отражения и пропускания света гладкой и шероховатой поверхностями могут различаться в 1.5–2 и более раз. Понятно, что для многих оптических задач эти различия очень существенны. Во-вторых, явно ощущается недостаток экспериментального материала по характеристикам шероховатости поверхности кожи, который мог бы стать основой для статистического описания ее структуры. Иными словами, соответствующие исходные физические данные к настоящему времени практически отсутствуют. Это обусловлено сильной вариацией свойств поверхности с изменением типа кожи, внешних условий, возраста человека, его физического и физиологического состояния и многих других факторов. В-третьих, для изучения закономерностей рассеяния (отражения и пропускания) света статистически шероховатой поверхностью среды необходимы специальные методы и алгоритмы.

Световые поля в биоткани с учетом шероховатости кожи исследовались в [2–5] методом Монте-Карло. Задавались конкретные статистические характеристики поверхности, которая рассматривалась как френелевская граница с коэффициентами пропускания и отражения, определяемыми хорошо известными формулами. Свойства границы учитывались численно путем «разыгрывания» преломления или отражения на ней при моделировании траектории фотонов. Из общей теории рассеяния излучения на статистически неровной поверхности [6, 7] следует, что такое описание светового поля справедливо для поверхностей с крупномасштабными неоднородностями, размеры которых много больше длины волны (приближение геометрической оптики). В [6, 7], исходя из уравнений Максвелла, получено аналитическое решение

В.В.Барун. Институт физики им. Б.И.Степанова НАНБ, Белоруссия, 220072 Минск, просп. Независимости, 68; Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 220013 Минск, ул. Бровки, 6; e-mail: barun@dragon.bas-net.by
А.П.Иванов. Институт физики НАНБ, Белоруссия, 220072 Минск, просп. Независимости, 68; e-mail: ivanovap@dragon.bas-net.by

для силы отраженного света. Путем усреднения по ансамблю шероховатостей и асимптотического вычисления интеграла методом стационарной фазы [8] показано, что электромагнитные волны, дифрагировавшие на крупномасштабных элементах рельефа в направлениях, отличных от зеркального, испытывают деструктивную интерференцию и гасят друг друга. Рассеянное световое поле отлично от нуля только в направлениях зеркального отражения, определяемых локальным углом падения излучения на неровности поверхности. Только после такого строгого обоснования на основе самых общих физических принципов можно применять формулы Френеля (см., напр., [2–5]).

Среди публикаций по рассеянию электромагнитных волн на случайно-неоднородных поверхностях биотканей отметим также работу [9]. Исходя из уравнений Максвелла с использованием граничных условий Леонтовича [10] в ней получено аналитическое решение задачи об угловом распределении интенсивности света, отраженного шероховатой поверхностью кожи. Однако условия [10] применимы в общем случае лишь для металлических поверхностей, а для биотканей они позволяют оценить угловую структуру, но не абсолютные значения интенсивности отраженного света, только при нормальном падении излучения на макроповерхность [9, 11]. Кроме того, формулы в [9] прямо следуют из общего решения [6, 7] для крупномасштабных шероховатостей без использования дополнительных предположений.

Целью настоящей работы является исследование полярной и азимутальной структур коэффициентов яркости (т.е. характеристик светового поля в абсолютных единицах) случайно-неоднородной поверхности кожи, освещенной направленным пучком излучения под произвольным углом.

2. Статистические характеристики поверхности кожи

В теоретических работах обычно полагают, что профили высот поверхности можно задать с помощью случайной стационарной дифференцируемой функции $z = \zeta(x, y)$ со средним значением $\langle \zeta \rangle = 0$ относительно плоскости макроповерхности $z = 0$. Будем считать, что характеристики поверхности не зависят от азимута, так что $z = \zeta(r)$, где $r = |r|$, $r = \{x, y\}$. При рассмотрении прохождения света через поверхность кожи в качестве $\zeta(r)$ иногда используют функцию с гауссовым распределением высот [2, 6, 7, 9]

$$w(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\zeta}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2D_\zeta}\right) \quad (1)$$

и корреляционной функцией вида

$$K(\tau) = D_\zeta \exp\left(-\frac{\tau^2}{T^2}\right), \quad (2)$$

где T – длина корреляции. Из (1) и (2) следует, что двумерный вектор случайных наклонов поверхности $\gamma = \{\gamma_x, \gamma_y\} = \{\tan \alpha_x, \tan \alpha_y\} = \nabla \zeta(\tau)$ также распределен по нормальному закону

$$W(\gamma) = \frac{1}{2\pi D_\gamma} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2D_\gamma}\right), \quad (3)$$

где $\gamma = |\gamma| = dz/dr$ – тангенс угла наклона касательной к плоскости $z = 0$; $D_\gamma = 2D_\zeta/T^2$. Ниже поверхности, характеризующиеся функциями (1)–(3), будем называть гауссовыми.

В ряде работ [3–5, 7] профиль поверхности задают в виде квазипериодической случайной функции

$$z = \zeta(r) = \zeta_m \sin(\omega\tau + \theta), \quad (4)$$

где ζ_m и ω принимают фиксированные значения; θ – случайная фаза, равномерно распределенная на отрезке $[0, 2\pi]$. Несложно показать, что для этой функции плотности вероятности высот и наклонов, а также корреляционная функция имеют соответственно следующий вид:

$$w_s(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{\zeta_m^2 - \zeta^2}} & \text{при } |\zeta| \leq \zeta_m, \\ 0 & \text{при } |\zeta| > \zeta_m, \end{cases} \quad (5)$$

$$W_s(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{\gamma_m^2 - \gamma^2}} & \text{при } |\gamma| \leq \gamma_m, \\ 0 & \text{при } |\gamma| > \gamma_m, \end{cases} \quad (6)$$

$$K_s(\tau) = 0.5\zeta_m^2 \cos(\omega\tau), \quad (7)$$

где $\gamma_m = \omega\zeta_m$ – максимальный тангенс угла наклона (4) к плоскости $z = 0$. Для распределений (5) и (6) легко найти значения дисперсии для высот $D_{\zeta_s} = \zeta_m^2/2$ и наклонов $D_{\gamma_s} = \gamma_m^2/2$ синусоидального профиля, которые можно использовать для количественного сопоставления соответствующих распределений (1), (3) и (5), (6) по их интегральным параметрам. Например, известно [7], что при отражении света от шероховатой поверхности с крупномасштабными неоднородностями ее характеристики входят в выражение для интенсивности через плотность вероятности наклонов. Тогда для выполнения равенства $D_\gamma = D_{\gamma_s}$ необходимо, чтобы $\sqrt{D_\zeta}/T = \omega\zeta_m/2$. Кроме того, чтобы между дисперсиями D_{ζ_s} и D_{γ_s} выполнялось соотношение, аналогичное соотношению для гауссовой поверхности, требуется под длиной корреляции T_s для поверхности (4) понимать величину $\sqrt{2}l\omega$.

Обзор параметров статистических характеристик (1)–(7) по теоретическим и экспериментальным работам дан в [12]. Ниже будем рассматривать только гауссовы поверхности (1)–(3) с интервалом $0 < D_\gamma < 0.45$, охватывающим интервал изменений дисперсии D_γ кожи человека [12].

3. Расчетные формулы

Геометрическая схема задачи представлена на рис.1. Пусть на макроповерхность, расположенную в плоскости xu , падает под углом ψ пучок излучения, создающего на ней освещенность E_0 . Азимутальный угол φ_0 падающего пучка, отсчитываемый от оси y в направлении оси x , полагаем равным нулю. В [7] показано, что для статистически неровной поверхности с крупномасштабными неоднородностями угловая структура силы отраженного света без учета затенения элементов рельефа имеет следующий вид:

$$I(\chi, \psi, \varphi) = \frac{E_0 S_0}{4 \cos \varphi} r_F(\eta) \frac{q^4}{q_z^4} W\left(\gamma = -\frac{q_\perp}{q_z}\right), \quad (8)$$

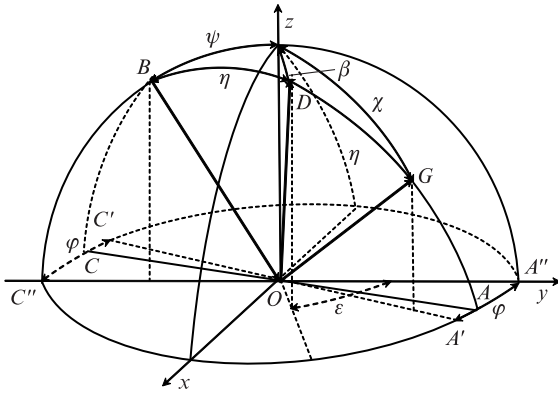


Рис.1. Геометрическая схема задачи.

где $I(\chi, \psi, \varphi)$ – сила света с освещенной макроповерхности площадью S_0 как функция полярного (χ) и азимутального (φ) углов наблюдения (см. рис.1); $r_F(\eta)$ – френелевский коэффициент отражения, зависящий от локального угла η падения света на микроплощадки; $q = |q| = |\kappa - \kappa_0|$; κ и κ_0 – единичные векторы вдоль направления распространения отраженной и падающей волн соответственно; q_z и q_{\perp} – проекции вектора q на ось z и плоскость xy . Несложно убедиться в том, что вектор q всегда направлен вдоль локальной нормали к шероховатой поверхности. Формула (8) получена методом касательной плоскости [13, 14], который справедлив [2, 7] при

$$(kR_c)^{1/3} \cos \psi \gg 1, \tag{9}$$

где $k = 2\pi/\lambda$; λ – длина волны излучения; R_c – локальный радиус кривизны поверхности. Условие (9) свидетельствует о том, что шероховатая поверхность является достаточно гладкой, так что волновое поле в каждой ее точке можно представить в виде суммы падающего поля и поля, отраженного по законам геометрической оптики от плоскости, касательной к поверхности в точке падения. Этот подход во многом подобен методу Кирхгофа при рассмотрении дифракции света на препятствии [7]. Кроме того, при выводе (8) был отброшен ряд слагаемых, которые являются малыми при выполнении следующих условий [7]:

$$(k\sigma_z q_z)^2 \gg 1 \text{ при } q_{\perp} \gamma / q_z \leq 1, \tag{10}$$

$$(k\sigma_z q_z)^2 \gg (q_{\perp} \gamma / q_z)^4 \text{ при } q_{\perp} \gamma / q_z > 1, \tag{11}$$

где $\sigma_z = (D_z)^{0.5}$ – среднеквадратичное отклонение высот неровностей; точка – скалярное произведение. В случае гауссовой поверхности (1)–(3) отброшенные слагаемые можно достаточно просто [7, 15] ввести в соотношение (8), но, чтобы не усложнять расчетные формулы, ниже полагаем, что условия (10) и (11) выполнены.

Аргумент плотности вероятности W в (8) показывает, что отражение света от крупномасштабных неровностей происходит в зеркальном направлении относительно плоскости, касательной к поверхности в точке падения, т.е. по законам геометрической оптики. Путем простых геометрических построений несложно убедиться в том, что

$$\eta = \arccos \frac{|\kappa \cdot \kappa_0 - 1|}{q}. \tag{12}$$

При освещении шероховатой поверхности на ней образуются области тени, которые не принимают участия в отражении падающего потока излучения. Кроме того, даже если элемент рельефа освещен, отраженный от него свет на пути к наблюдателю может быть «перекрыт» другим элементом. Ниже будет рассмотрена задача о влиянии затенения в приближении однократного рассеяния, т.е. без учета многократных переотражений между элементами рельефа поверхности. В [7] показано, что для квадратичных по электромагнитному полю величин (яркость, сила света, поток), используемых обычно в оптике, эффект затенения определяется параметрами $a = \cot \psi / \langle \gamma \rangle$ и $b = \cot \chi / \langle \gamma \rangle$, где $\langle \gamma \rangle = (D_{\gamma})^{0.5}$. Аналитически описаны [7] асимптотики в области слабых и сильных затенений. В первой из них $a, b \gg 1$, так что указанная поправка близка к единице и практически не влияет на характеристики отражения. В противоположном случае, когда $a, b \ll 1$, эффект затенения наиболее существен. Обзор работ по учету затенения шероховатой поверхности дан в [12].

Математически влияние затенения описывается с помощью поправочного коэффициента, на который надо умножить характеристики отражения (8), полученные без учета областей тени:

$$Q(a, b) = [1 + \Lambda(a) + \Lambda(b)]^{-1}, \tag{13}$$

где для гауссовой поверхности [16]

$$\Lambda(a) = \frac{1}{2a} \left[\frac{\sqrt{2}}{\pi} \exp(-0.5a^2) - \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \right]. \tag{14}$$

При слабых затенениях ($a, b \gg 1$) из (14) находим

$$\Lambda(a) = \frac{1}{a^3 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \rightarrow 0, \tag{15}$$

так что $Q(a, b) \cong 1$.

Угловую структуру интенсивности отраженного света будем характеризовать коэффициентом яркости. Эта безразмерная характеристика широко используется в фотометрии [17]. По определению коэффициент яркости $\rho(\chi, \varphi, \psi)$ есть отношение яркости (интенсивности) излучения в данном направлении (χ, φ) к яркости, формируемой идеально белой ламбертовской площадкой, помещенной в те же условия освещения. Несложно показать, что с учетом этого определения и эффекта затенения выражение для $\rho(\chi, \varphi, \psi)$ имеет вид

$$\rho(\chi, \varphi, \psi) = \frac{\pi I(\chi, \varphi, \psi) Q(a, b)}{E_0 S_0 \cos \chi}. \tag{16}$$

В предельном случае гладкой поверхности, когда $D_{\gamma} \rightarrow 0$ и $Q(a, b) \rightarrow 1$, на основе аппроксимации для δ -функции Дирака [18] имеем

$$W(\gamma = -q_{\perp} / q_z) \rightarrow \delta(q_x / q_z) \delta(q_y / q_z) \rightarrow$$

$$(q_z)^2 \delta(\chi - \psi) \delta(\varphi - \varphi_0) / (\sin \chi \cos \chi),$$

так что из (16) получаем

$$\rho(\chi, \varphi, \psi) \rightarrow \pi r_F(\psi) \delta(\chi - \psi) \delta(\varphi - \varphi_0) / (\sin \chi \cos \chi),$$

т.е. коэффициент яркости гладкой френелевской границы раздела. Несложно убедиться в том, что коэффициент отражения R поверхности с таким коэффициентом яркости

есть $r_F(\psi)$. Действительно, для гладкой поверхности, используя определение R [17] при направленном освещении, имеем

$$R(\psi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \rho(\chi, \varphi, \psi) \sin \chi \cos \chi d\chi \equiv r_F(\psi).$$

4. Функция распределения микроплощадок по углам

Как следует из (8) и (16), структура поверхности определяет конечную формулу для коэффициента яркости через плотность вероятности наклонов $W(\gamma)$ или $W_s(\gamma)$. Функция $W_s(\gamma)$ имеет особенность при $\gamma = \gamma_m$. Причины этого обсуждены в [7]. Данная особенность создает неудобства при расчете характеристик отражения света квазипериодической поверхностью. Таких сложностей можно избежать, если для границы (4) вычислять коэффициенты яркости на основе функции распределения f микроплощадок по углам [17, 19, 20]. Кроме того, в этом случае и для гауссовой поверхности интерпретация приведенных ниже результатов физически более наглядна. Именно такой подход будем использовать в дальнейшем. Связь между моделью [17, 19, 20] и статистическими характеристиками (1)–(3) обсуждена в [12]. По определению указанная функция есть

$$f(\beta, \varepsilon) = \frac{d\sigma(\beta, \varepsilon)}{S_0 d\omega}, \quad (17)$$

где S_0 , как и ранее, – площадь макроповерхности; $d\sigma(\beta, \varepsilon)$ – площадь микроплощадок, нормали к которым лежат в телесном угле $d\omega$ около направления, определяемого полярным (β) и азимутальным (ε) углами (см. рис.1). При азимутальной симметрии распределения микроплощадок функция распределения зависит только от полярного угла β . Найдем выражение для коэффициента яркости. Рассмотрим отраженный в направлении OG поток света от микроплощадок $d\sigma(\beta)$: $dF = E_0 \cos \eta d\sigma(\beta) r_F(\eta) / \cos \psi$. Нормаль OD к микроплощадкам находится в плоскости отражения OBG . Отраженный поток распространяется в телесном угле $d\omega_s$. Естественно, что угол η падения излучения на микроплощадки равен углу отражения от них. При постоянных χ и φ и угле падения, равном нулю, плоскость отражения света CBA от микроплощадок пересекает макроповерхность по линии CA' , при угле 90° – по линии $C''A''$. Очевидно, что яркость света, отраженного от шероховатой поверхности в направлении (χ, φ) , есть

$$B(\chi, \varphi, \psi) = \frac{E_0 \cos \eta d\sigma(\beta) r_F(\eta)}{S_0 \cos \chi \cos \psi d\omega_s} = \frac{E_0 \cos \eta f(\beta) r_F(\eta) d\omega}{\cos \chi \cos \psi d\omega_s}, \quad (18)$$

а яркость идеального ламбертовского отражателя – E_0/π . Отсюда следует, что

$$\rho(\chi, \varphi, \psi) = \frac{\pi \cos \eta f(\beta) r_F(\eta) d\omega}{\cos \chi \cos \psi d\omega_s}. \quad (19)$$

Можно показать (см. Приложение 1), что при заданных углах χ , φ и ψ азимутальный (ε) и полярный (β) углы нормали микроплощадок определяются из следующих соотношений:

$$\tan \varepsilon = \sin \varphi \sin \chi (\cos \psi \cos \chi - \sin \psi \sin \chi \cos \varphi - 1) / A, \quad (20)$$

где

$$A = \sin^2 \varphi \sin^2 \chi \sin^2 \psi + [\sin \chi \cos \psi \cos \varphi + \cos \chi \sin \psi] [\cos \chi - \cos \psi], \quad (21)$$

$$\tan \beta = \sin \varphi \sin \psi \sin \chi [\sin \varepsilon \sin \chi \cos \varphi \cos \psi + \sin \varepsilon \sin \psi \cos \chi - \sin \varphi \sin \chi \cos \varepsilon \cos \psi]^{-1}. \quad (22)$$

Угол η падения (отражения) излучения на микроплощадку находится из (12) или эквивалентного ему выражения

$$\cos 2\eta = \cos \psi \cos \chi - \sin \chi \sin \psi \cos \varphi, \quad (23)$$

а отношение телесных углов (см. Приложение 2)

$$\frac{d\omega}{d\omega_s} = \frac{1}{4 \cos \eta}. \quad (24)$$

Как видно из (24), это отношение находится в диапазоне $0.25 - \infty$. Например, при больших углах ψ падения света на макроповерхность и больших углах наблюдения χ , когда в отражении принимают участие микроплощадки, нормали к которым близки к оси z (угол β мал), угол η также велик. Если η изменяется примерно от 75° до 90° , то отношение телесных углов варьируется от единицы до бесконечности. Большие отношения (24) соответствуют случаям, когда при конечном изменении телесного угла $d\omega$ микроплощадок угол $d\omega_s$ остается практически постоянным, что как раз имеет место при η , близком к 90° . Однако из (19) видно, что эта особенность отношения (24) не влияет на интегрируемость коэффициента яркости. Действительно, подставив (24) в (19), получим

$$\rho(\chi, \varphi, \psi) = \frac{\pi f(\beta) r_F(\eta)}{4 \cos \chi \cos \psi}. \quad (25)$$

Эта формула, подобно соотношению (8), с учетом (21)–(23) дает угловую структуру света, отраженного шероховатой поверхностью в направлении (χ, φ) , исходя из понятия функции распределения микроплощадок по углам. Очевидно, что в предельном случае гладкой поверхности, когда $f(\beta) \sim \delta(\beta)$, обе формулы, (8) и (25), должны давать одинаковый результат, приведенный в конце разд.3. Это можно показать с использованием определения (17) и соотношений (20)–(23). Запишем соотношение для $\rho(\chi, \varphi, \psi)$ гладкой поверхности другим, более наглядным образом. Из определения коэффициента яркости прямо следует, что

$$\rho(\chi \approx \psi, \varphi_0) = \frac{\pi r_F(\psi)}{\Delta \omega_0 \cos \psi}. \quad (26)$$

Здесь $\Delta \omega_0$ – телесный угол, в котором сосредоточен падающий поток. Подставив (26) в определение коэффициента отражения поверхности с заданным коэффициентом яркости, приведенное в разд.3, получим $R(\psi) \equiv r_F(\psi)$, т. к. в этом случае телесный угол, в котором заключено отраженное излучение,

$$\Delta \omega_s = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \chi d\chi \equiv \Delta \omega_0.$$

Из (26), в частности, следует, что при $\chi \approx \psi$ и $\varphi \approx 0$, вне зависимости от степени шероховатости поверхности, ко-

эффицент яркости пропорционален $r_F(\psi)/\cos\psi$, т. к. в отражении принимают участие только горизонтальные микроплощадки, параллельные макроповерхности.

Эффект затенения элементов рельефа можно ввести в (25) аналогично (16). Ответ на вопрос о том, какой формулой, (8) или (25), пользоваться при расчетах, зависит от наличия экспериментальных либо иных исходных данных по плотностям вероятности (1), (3) или функции (17). Отметим, что измерение $f(\beta)$ по стандартной оптической методике [17, 20] затруднено тем, что на излучение, отраженное поверхностью кожи, накладывается свет, рассеянный толщей ткани. Поэтому ниже для расчетов использованы соотношения (8) и (16), для которых имеются, хотя и в ограниченном объеме, экспериментальные данные [12], полученные с помощью профилометра, а формула (25) удобна для интерпретации результатов.

Сделаем еще одно замечание относительно соотношений (8) и (25). Приравняв их правые части, мы можем видеть, что формально связь $f(\beta)$ с характеристикой шероховатой поверхности – плотностью вероятности наклонов $W(\gamma)$ – включает в себя углы наблюдения и освещения χ , φ и ψ . Иными словами, вероятностное описание свойств поверхности (1)–(3) и задание функции $f(\beta)$ распределения микроплощадок по углам – это два различных представления статистических свойств поверхности. В общем случае они не следуют друг из друга. Этот факт подробнее обсужден в [12].

5. Полученные результаты и их обсуждение

При внешнем облучении кожи ее наружная поверхность освещается излучением источника, а внутренняя – светом, рассеянным в толще ткани. Поэтому ниже коэффициенты яркости рассмотрены для двух случаев освещения направленным пучком – при падении излучения снаружи и изнутри биоткани. Показатель преломления биоткани выбран равным 1.55, что соответствует самому верхнему роговому слою кожи в видимой области спектра [21]. Прежде всего выясним, как частичное затенение (экранирование) поверхности элементами ее рельефа влияет на регистрируемый сигнал. Расчеты показали, что для углов падения и отражения менее 70° этот эффект не наблюдается. Однако если один из углов больше 70° , то при любом другом угле данный эффект в той или иной степени проявляется всегда. Отметим также, что при переходе к более гладкой поверхности кожи влияние экранирования света на коэффициент яркости, естественно, ослабевает. Все последующие результаты будут приведены с учетом затенения, т. к. это не вызывает никаких сложностей.

Ранее уже отмечалось, что анализировать результаты нагляднее с помощью формулы (25), которая содержит три множителя, зависящих от соответствующих углов, – $f(\beta)$, $r_F(\eta)$ и $1/(\cos\chi\cos\psi)$. Последний из множителей будем называть тригонометрическим. Обычно функция $f(\beta)$ максимальна при $\beta = 0$ и спадает с увеличением β . Для неполяризованного света коэффициент отражения $r_F(\eta)$ плавно растет с увеличением η . При условии полного внутреннего отражения (ПВО) он принимает максимальное значение, равное единице, и далее с ростом η не меняется. Эту очевидную особенность углового поведения множителей (25) достаточно для качественного объяснения приведенных ниже результатов.

Рассмотрим влияние степени шероховатости поверхности кожи (дисперсии D_γ) на угловое распределение от-

ражаемого ею света. Эту картину при азимутальном угле $\varphi = 0$ и разных углах падения света снаружи кожи и из толщи биоткани иллюстрирует рис. 2. Для краткости коэффициенты яркости в этих двух случаях освещения обозначены соответственно $\rho\downarrow$ (штриховые кривые) и $\rho\uparrow$ (сплошные кривые). Отметим здесь, что для рассмотренных углов падения $0, 30^\circ, 60^\circ$ и 80° ПВО имеет место при $\chi \approx 80^\circ, 50^\circ, 20^\circ$ и 0.4° соответственно. Эти углы ПВО проявятся, естественно, в угловой структуре коэффициентов яркости $\rho\uparrow$, что будет рассмотрено ниже.

Начнем с анализа отражения от поверхности с $D_\gamma = 0.2$ (рис. 2, а). Видно, что в большинстве случаев $\rho\uparrow$ больше, чем $\rho\downarrow$. Это связано с величиной френелевского коэффициента отражения от микроплощадок поверхности. При $\psi = 0$ и малых χ сплошные и штриховые кривые I совпадают, т. к. отражение происходит от почти горизонтальных микроплощадок и коэффициенты r_F для них одинаковы. С увеличением χ в коэффициенты яркости вносят вклад все более наклоненные площадки, так что начинает проявляться влияние роста r_F и уменьшения относительного числа таких площадок. Первый фактор способствует увеличению наблюдаемого сигнала, а второй – уменьшению. Влияние второго фактора оказывается сильнее, и в результате ρ уменьшается. Лишь в начале зоны полного внутреннего отражения ($\chi \approx 80^\circ$) наблюдается рост сигнала. Как видно из рис. 2, а, по мере увеличения ψ область углов резкого нарастания коэффициента яркости смещается в сторону меньших значений χ , при которых имеет место ПВО. При этом с ростом угла наблюдения происходит не уменьшение ρ , как в случае, которому соответствует кривая 1, а увеличение коэффициента яркости (кривые 3 и 4). Это объясняется тем, что на начальном участке χ микроплощадки, отражающие свет в данном направлении, имеют азимут $\varepsilon = \pi$, т. е. они обращены в сторону падающего потока излучения. В результате с ростом χ доля таких микроплощадок увеличивается, т. к. их ориентация приближается к горизонтальной. Кроме того, растет френелевский коэффициент отражения. При дальнейшем росте χ , когда азимут ε скачком изменяется от π до 0, три множителя в (25) вносят разнонаправленный вклад в коэффициент яркости. Так, спадание функции $f(\beta)$ приводит к его уменьшению, но оно более чем компенсируется увеличением $r_F(\eta)$ и тригонометрического множителя. В результате коэффициент яркости увеличивается.

Приведенное подробное рассмотрение рис. 2, а и детальное качественное объяснение соответствующих угловых зависимостей коэффициентов яркости применимы, естественно, и к случаям, проиллюстрированным на рис. 2, б–г. Поэтому ниже основное внимание обратим на количественные соотношения и отличия зависимостей от приведенных на рис. 2, а.

Перейдем к более гладкой поверхности. Обратимся к рис. 2, б, соответствующему $D_\gamma = 0.05$. В этом случае при $\psi = 0$ значения ρ при малых углах χ наблюдения стали, естественно, больше, чем на рис. 2, а. Очевидно, это связано с большей долей микроплощадок, ориентированных почти горизонтально. По той же причине уменьшение коэффициентов яркости (кривые 1) с ростом χ более заметно. В использованном на рис. 2, б диапазоне величин по оси ординат значения $\rho\uparrow$ и $\rho\downarrow$ одинаковы, а ПВО проявляется вне этого диапазона. Для $\psi = 30^\circ$ (кривые 2) имеет место быстрое уменьшение коэффициентов яркости при $\chi > 50^\circ$. Это обусловлено сильным уменьшением доли на-

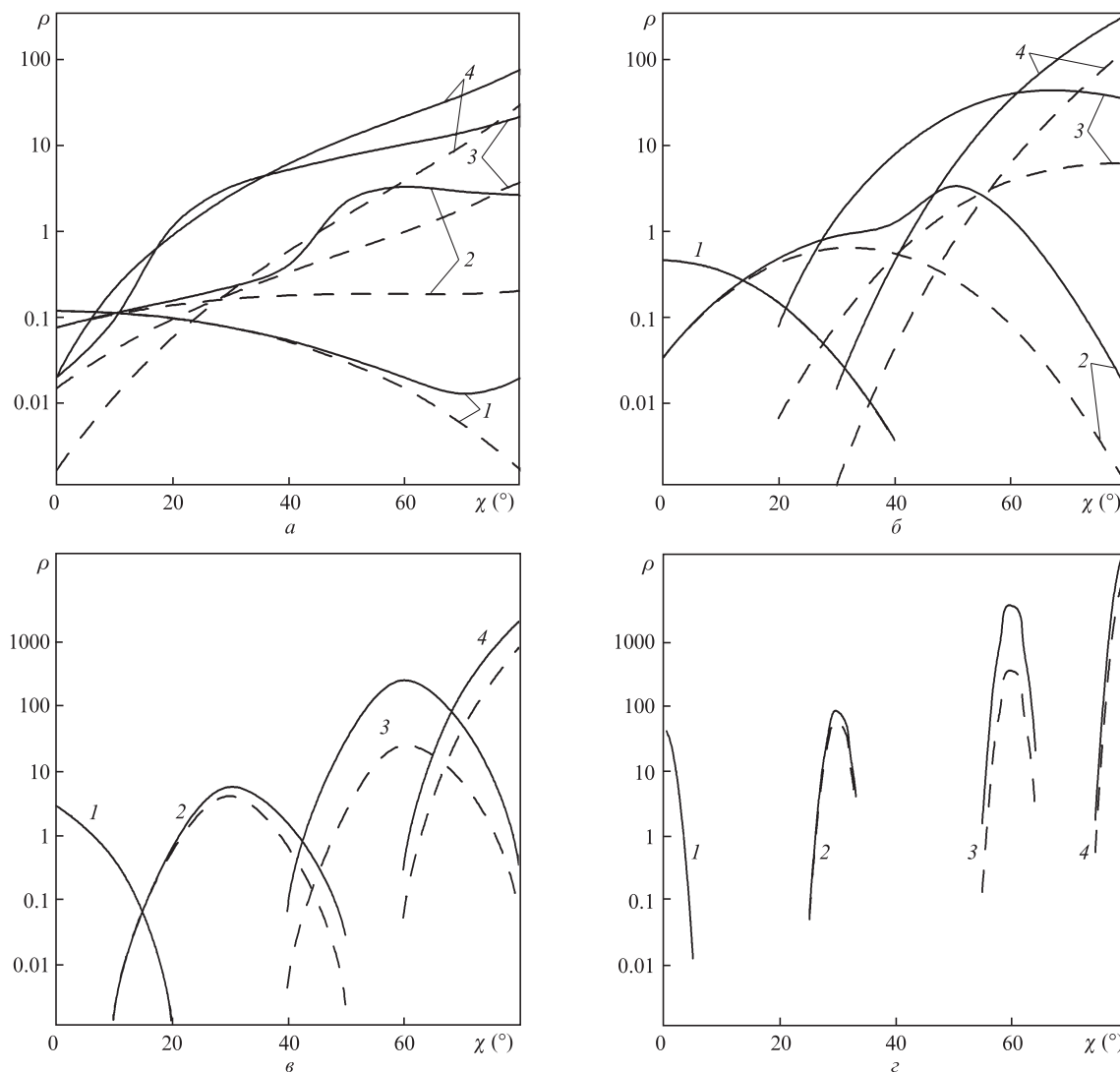


Рис.2. Влияние степени шероховатости на полярную структуру коэффициентов яркости отраженного света при освещении среды снаружи (штриховые кривые) и изнутри (сплошные кривые); $D_\gamma = 0.2$ (а), 0.05 (б), 0.013 (в) и 0.0013 (г), $\psi = 0$ (1), 30° (2), 60° (3) и 80° (4), $\varphi = 0$.

клонных микроплощадок, ответственных за отражаемый свет в данном случае. Для косых углов падения излучения (кривые 3 и 4) имеет место резкое возрастание света с приближением к углу зеркального отражения, а при малых χ коэффициенты яркости пренебрежимо малы.

При дальнейшем уменьшении дисперсии D_γ (рис.2, в и г) проявляются четкие пики зеркального отражения, соответствующие разным углам падения света. Очевидно, что угловая ширина этих пиков зависит от степени шероховатости поверхности. Чем меньше значение D_γ , тем уже максимум коэффициента яркости. Отметим, что с уменьшением D_γ световая мощность, сосредоточенная в пике отражения, остается постоянной, но приходится на меньший интервал углов. Поэтому максимальные значения коэффициента яркости для самой гладкой из рассмотренных поверхностей ($D_\gamma = 0.0013$) самые большие.

Рассмотрим влияние углов падения и наблюдения при разных азимутах на коэффициент яркости. Соответствующие данные представлены на рис.3 для дисперсии $D_\gamma = 0.44$. При меньших значениях D_γ аналогичные результаты не столь наглядны, т.к. в широком интервале углов φ коэффициент яркости очень мал, однако общие закономерности формирования отраженного светового поля,

естественно, сохраняются при любых D_γ . Вначале сопоставим данные рис.3, а ($\varphi = 0$) и б ($\varphi = 30^\circ$). Видно, что при фиксированном угле падения света ψ соответствующие кривые подобны друг другу. Это связано с тем, что степень шероховатости поверхности достаточно велика, так что азимут наблюдения до 30° слабо сказывается на угловом распределении отраженного света. По мере увеличения φ коэффициенты яркости трансформируются (рис.3, в, $\varphi = 90^\circ$). Трактовка результатов особо наглядна при $\varphi = 180^\circ$, представленном на рис.3, г, т.к. здесь имеет место простая связь между углами, входящими в (8) и (25). Действительно, в этом случае, как следует из рис. 1, $\eta = 0.5|\psi - \chi|$ и $\beta = 0.5|\psi + \chi|$. Из рис.3, г видно, что при малых углах падения ψ (кривые 1 и 2) коэффициенты яркости $\rho \uparrow$ и $\rho \downarrow$ одинаковы в области малых углов наблюдения χ , а при увеличении ψ (кривые 3 и 4) – в области больших χ . Указанные совпадения кривых связаны с тем, что в обоих случаях свет отражается от микроплощадок, ориентированных почти нормально к падающему пучку, когда френелевские коэффициенты отражения для света, падающего на поверхность снаружи и изнутри среды, одинаковы. При малых углах ψ угловые зависимости $\rho \uparrow$ и $\rho \downarrow$ расходятся; сами значения $\rho \uparrow$ и $\rho \downarrow$ растут в области больших χ , а

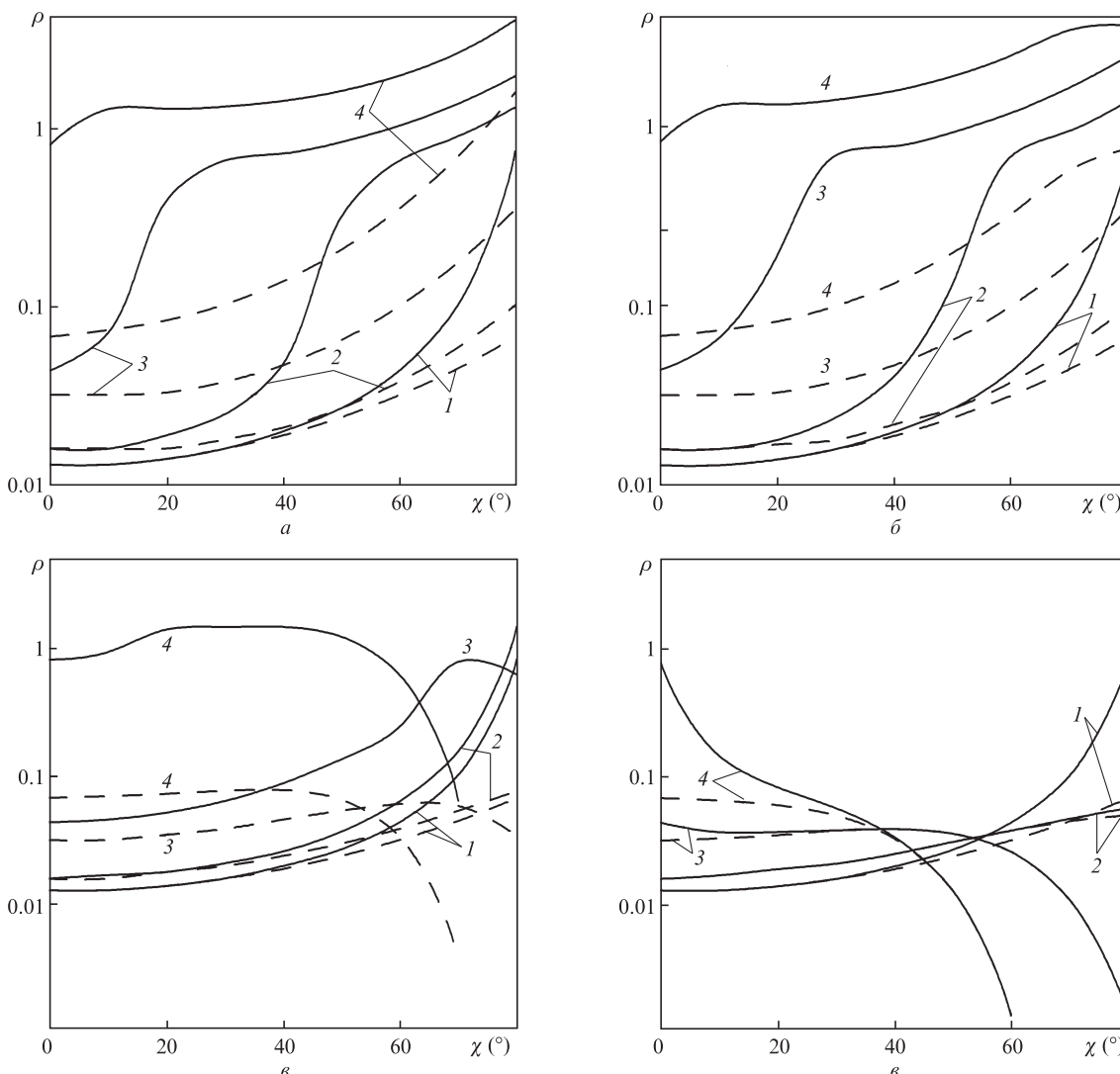


Рис.3. Полярная структура коэффициентов яркости отраженного света при освещении среды снаружи (штриховые кривые) и изнутри (сплошные кривые); $\varphi = 0$ (а), 30° (б), 90° (в) и 180° (г), $\chi = 0$ (1), 30° (2), 60° (3) и 80° (4), $D_\gamma = 0.44$.

при увеличении ψ – в области малых χ . В первом из этих случаев с увеличением χ коэффициент отражения $r_F(\eta)$ и тригонометрический множитель растут, а убывающая функция $f(\beta)$ не компенсирует этот рост. В результате коэффициенты яркости $\rho \uparrow$ и $\rho \downarrow$ увеличиваются. Во втором случае с уменьшением χ растут $r_F(\eta)$ и $f(\beta)$, вследствие чего $\rho \uparrow$ и $\rho \downarrow$ принимают большие значения. Отметим также, что кривые 1, соответствующие $\chi = 0$, одинаковы при любых азимутах φ , т.к. угловая структура отраженного света симметрична относительно луча, падающего по нормали к поверхности.

Для полноты картины на рис.4 представлены примеры азимутальной структуры коэффициентов яркости $\rho \uparrow$ и $\rho \downarrow$ для двух полярных углов наблюдения, $\chi = 60^\circ$ и 80° , и нескольких углах падения ψ . Очевидно, что вследствие симметрии задачи при $\chi = 0$ или $\psi = 0$ (кривые 1 на рис.4, а и б) величины $\rho \uparrow$ и $\rho \downarrow$ не зависят от φ . С ростом χ азимутальная структура отраженного света резко трансформируется. Это происходит тем сильнее, чем больше χ и ψ . Имеет место общая тенденция – коэффициенты яркости уменьшаются с ростом φ . Качественный анализ азимутальных зависимостей возможен с помощью формулы (25), однако он подобен приведенному выше, и поэтому давать его здесь мы не будем.

6. Заключение

Для анализа угловой структуры коэффициентов яркости света, отраженного шероховатой поверхностью кожи, использовано асимптотическое решение уравнений Максвелла в приближении геометрической оптики [6, 7]. Его применимость к оптике кожи обусловлена характеристиками ее микрорельефа. Аналогичное рассмотрение с помощью пересчета соответствующих углов по закону преломления Снеллиуса можно провести для интенсивности света, пропущенного шероховатой поверхностью кожи. Отметим здесь, что для прошедшего через границу пучка излучения в аргументе b множителя $Q(a, b)$ (13), учитывающего затенения, будет вместо угла χ содержаться угол преломления. Полученные формулы можно также использовать для расчета коэффициентов яркости отраженного и прошедшего поляризованного излучения при освещении естественным или поляризованным светом. Для этого в соответствующие выражения следует только подставить требуемый френелевский коэффициент отражения или пропускания микроплощадки. Состояние поляризации может быть произвольным. Знание коэффициентов яркости в абсолютных единицах для отраженного и прошедшего света позволяет путем простого интегриро-

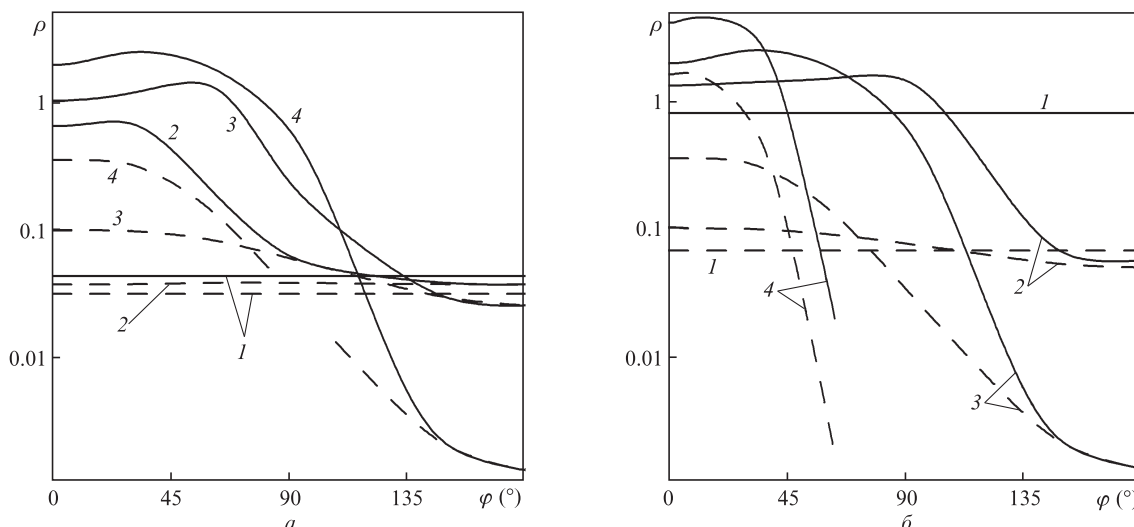


Рис.4. Азимутальная структура коэффициентов яркости отраженного света при освещении среды снаружи (штриховые кривые) и изнутри (сплошные кривые); $\psi = 60^\circ$ (а) и 80° (б), $\chi = 0$ (1), 30° (2), 60° (3) и 80° (4).

вания вычислить коэффициенты отражения и пропускания излучения поверхностью кожи при произвольной угловой структуре освещения. Именно эти интегральные характеристики часто используются для описания светового поля внутри и вне биотканей, для исследования воздействия излучения на ткань, для определения глубин проникновения света в среду и во многих других задачах биомедицинской оптики.

Приложение 1

Связь между углами β, ϵ и χ, φ, ψ

Как видно из рис.1, направляющие косинусы векторов κ_0, κ и единичного вектора n внешней нормали к микроплощадке относительно осей x, y и z соответственно равны $(0, \sin\psi, -\cos\psi), (\sin\varphi \sin\chi, \cos\varphi \sin\chi, \cos\chi)$ и $(\sin\epsilon \sin\beta, \cos\epsilon \sin\beta, \cos\beta)$. Тогда угол падения η как угол между векторами $-\kappa_0$ и n определяется из равенства

$$\cos\eta = \cos\chi \cos\psi - \sin\varphi \cos\epsilon \sin\beta. \tag{П1.1}$$

Аналогично угол отражения η' , т. е. угол между κ и n , есть

$$\cos\eta = \sin\varphi \sin\chi \sin\epsilon \sin\beta - \cos\varphi \sin\chi \cos\epsilon \sin\beta + \cos\chi \cos\beta. \tag{П1.2}$$

Из закона геометрической оптики (угол падения равен углу отражения), приравнивая правые части равенств (П1.1) и (П1.2), получаем первое уравнение для неизвестных β и ϵ .

Уравнение плоскости падения, проходящей через κ_0 и n , имеет вид

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & \sin\psi & -\cos\psi \\ \sin\epsilon \sin\beta & \cos\epsilon \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = 0. \tag{П1.3}$$

Уравнение плоскости отражения, проходящей через κ и n , таково:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \sin\varphi \sin\chi & \cos\varphi \sin\chi & \cos\chi \\ \sin\epsilon \sin\beta & \cos\epsilon \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = 0. \tag{П1.4}$$

Из другого закона геометрической оптики (падающий и отраженный лучи, а также нормаль к микроповерхности лежат в одной плоскости, задаваемой (П1.3) и (П1.4)) имеем второе уравнение для β и ϵ . Решая систему из двух уравнений с двумя неизвестными, получаем соотношения (20)–(22).

Приложение 2

Связь между телесными углами $\Delta\omega_s$ и $\Delta\omega$

Пусть отраженный световой поток регистрируется в малом телесном угле. Найдем телесный угол $\Delta\omega$, в пределах которого находятся нормали к микроплощадкам, отражающим свет в угле $\Delta\omega_s$. С этой целью повернем исходную систему координат xuz (см. рис.1) так, чтобы ось z' новой системы координат, $x'y'z'$, была ориентирована по оси телесного угла $\Delta\omega_s$, а луч падающего света имел, как и ранее, азимут $\varphi'_0 = 0$. Обозначим соответствующие углы в повернутой системе координат $\psi', \chi', \varphi', \beta'$ и ϵ' , причем вследствие малости $\Delta\omega_s$ будем иметь $\chi' \ll 1$. Очевидно, что величина телесного угла не зависит от выбора системы координат, поэтому

$$\Delta\omega = \iint_{\Sigma} \sin\beta d\beta d\epsilon = \iint_{\Sigma} \sin\beta' d\beta' d\epsilon', \tag{П2.1}$$

где интегрирование ведется по углам, соответствующим площади Σ сегмента, вырезаемого телесным углом $\Delta\omega$ на сфере, показанной на рис.1. Сделаем во втором интеграле (П2.1) замену переменных $\beta' = \beta'(\chi', \varphi'), \epsilon' = \epsilon'(\chi', \varphi')$. Иными словами, перейдем от интегрирования по β' и ϵ' к интегрированию по χ' и φ' . Тогда (чтобы не загромождать текст, опускаем штрихи у обозначений углов, имея в виду, что ниже все углы относятся к повернутой системе координат $x'y'z'$)

$$\Delta\omega = \iint_{\Sigma_s} \sin[\beta(\chi, \varphi)] \sqrt{EG - F^2} d\chi d\varphi, \tag{П2.2}$$

где интегрирование ведется по углам, соответствующим площади Σ_s сегмента, вырезаемого телесным углом $\Delta\omega_s$ на сфере, показанной на рис.1,

$$E = \left(\frac{\partial\beta}{\partial\chi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\chi}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi}\right)^2, \quad (\text{П2.3})$$

$$F = \frac{\partial\beta}{\partial\chi} \frac{\partial\beta}{\partial\varphi} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\chi} \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi}.$$

Воспользуемся теперь соотношениями (20)–(22) и учтем, что в них $\chi \ll 1$. Тогда после отбрасывания членов более высокого порядка малости, чем χ , эти формулы примут вид

$$\tan\beta = \frac{\cos\psi - 1}{\sin\varepsilon \sin\varphi \sin\chi + \cos\varepsilon(\cos\varphi \sin\chi + \sin\psi)}, \quad (\text{П2.4})$$

$$\tan\varepsilon = -\frac{\sin\varphi \sin\chi}{\sin\psi}. \quad (\text{П2.5})$$

С помощью формул (П2.4) и (П2.5) вычисляем частные производные

$$\frac{\partial\beta}{\partial\chi} = 0.5 \cos\varphi, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\chi} = -\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}, \quad (\text{П2.6})$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\varphi} = -0.5 \sin\chi \sin\varphi, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi} = -\frac{\sin\chi \cos\varphi}{\sin\psi},$$

подставляем их в (П2.3) и в результате получаем

$$EG - F^2 = \frac{\sin^2\chi}{4 \sin^2\psi}. \quad (\text{П2.7})$$

Кроме того, с точностью до членов порядка χ имеем $\sin\beta = \sin\psi/2$. Подставляем это равенство и (П2.7) в (П2.2) и окончательно находим

$$\Delta\omega = \iint_{\Sigma_s} \sin(\psi/2) \frac{\sin\chi}{2 \sin\psi} d\chi d\varphi = \frac{\Delta\omega_s}{4 \cos(\psi/2)}. \quad (\text{П2.8})$$

Из формулы (23) следует, что при $\chi \ll 1$ угол падения η , не зависящий от выбора системы координат, равен $\psi/2$. Окончательно получаем искомое соотношение между телесными углами $\Delta\omega$ и $\Delta\omega_s$ в виде (24).

1. Иванов А.П., Барун В.В. *Инж.-физ. журн.*, **84** (1), 22 (2011).
2. Lu J.O., Hu X.-H., Dong K. *Appl. Opt.*, **39** (31), 5890 (2000).
3. Меглинский И.В., Матчер С.Д. *Оптика и спектроскопия*, **91** (4), 692 (1998).
4. Меглинский И.В. *Квантовая электроника*, **31** (12), 1101 (2001).
5. Meglinski I.V., Matcher S.J. *Physiol. Measurment.*, **23** (4), 741 (2002).
6. Исакович М.А. *ЖЭТФ*, **23** (3), 305 (1952).
7. Басс Ф.Г., Фукс И.М. *Рассеяние волн на статистически неровной поверхности* (М.: Наука, 1972).
8. Федорюк М.В. *Асимптотика: интегралы и ряды* (М.: Наука, 1987).
9. Рогаткин Д.А. *Оптика и спектроскопия*, **97** (3), 484 (2004).
10. Леонтович М.А. *Исследования по распространению радиоволн*. Под ред. Б.А.Введенского (М.: Изд. АН СССР, 1948, вып. 2, с. 5).
11. Марадудин А.А., Мендес Е.Р. *Оптика и спектроскопия*, **80** (3), 459 (1996).
12. Барун В.В., Иванов А.П. *Инж.-физ. журн.*, **85** (5), 1117 (2012).
13. Бреховских Л.М. *ДАН СССР*, **79** (4), 585 (1951); *ЖЭТФ*, **23** (3), 275 (1952).
14. Воронович А.Г. *Акустический журн.*, **53** (3), 346 (2007).
15. Чаевский Е.В. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **8** (6), 1128 (1965).
16. Smith V.G. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **15** (5), 668 (1967).
17. Иванов А.П. *Оптика рассеивающих сред* (Минск: Наука и техника, 1969).
18. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике* (М.: Наука, 1977, с. 794).
19. Мулламаа Ю.-А.Р. *Атлас оптических характеристик взволнованной поверхности моря* (Гаргу: Изд. АН ЭССР, 1964).
20. Топорец А.С. *Оптика шероховатой поверхности* (Л.: Машиностроение, 1988).
21. Тучин В.В. *Лазеры и волоконная оптика в биомедицинских исследованиях* (Саратов: Изд. Саратовского ун-та, 1998).