

О разрешающей способности линз, изготовленных из материала с отрицательным преломлением

А.Б.Петрин

Рассматривается разрешающая способность линз, изготовленных из материала с отрицательным показателем преломления. Показано, что концепция суперразрешения несостоятельна и сама возможность получения совершенного изображения противоречит, в конечном счете, уравнениям Максвелла в вакууме. Показано также, что известные ограничения теории дифракции на разрешающую способность оптических инструментов распространяются и на разрешающую способность линз, изготовленных из материала с отрицательным показателем преломления, в частности на разрешающую способность линзы Веселаго.

Ключевые слова: разрешающая способность, материал с отрицательным преломлением, теория дифракции.

1. Введение

В последние десятилетия возник огромный интерес к электродинамике материалов, характеризующихся отрицательными показателями преломления. Первые упоминания о таких материалах можно найти у Л.И.Мандельштама (см. исторический обзор в [1]), а систематические исследования их свойств были начаты в работе В.Г.Веселаго [2]. Благодаря достижениям в нанотехнологии композитных материалов были созданы среды, свойства которых можно объяснить наличием у них отрицательного показателя преломления [3, 4]. В некоторых работах [5, 6] был выдвинут тезис о том, что линзы из таких материалов позволяют преодолеть дифракционный предел оптических инструментов. Этот тезис находит много возражений [7], которые не являются абсолютно бесспорными [8]. Тем не менее выдвинутая в работе [5] концепция суперлинзы (в виде плоского слоя вещества с отрицательным преломлением), позволяющей в идеальном случае полностью преодолеть дифракционный предел и создать «идеальное изображение», нашла множество сторонников (см., напр., [9–14] и цитируемую там литературу). Однако сама концепция суперлинзы кажется весьма странной. Действительно, еще со времен Френеля известно, что размеры фокального пятна определяются только углом между крайними сходящимися лучами в области фокусировки и длиной волны излучения (см., напр., [15], §55). Размеры фокального пятна являются свойством сходящейся волны и не зависят от оптической системы, которая эту сходящуюся волну образовала. В случае суперлинзы сходящаяся волна находится вне слоя с отрицательным преломлением, и кажется разумным, что она должна фокусироваться в область обычных размеров. Несколько странно, что авторы упомянутых работ по суперлинзам не обсуж-

дают это противоречие с хорошо установленными фундаментальными фактами.

В работах [16–18] была рассмотрена в строгой формулировке задача распространения электромагнитной волны, излученной элементарным электрическим диполем Герца, расположенным в воздухе (или вакууме) параллельно границе слоя или, в частном случае, параллельно полупространству. Слой или полупространство заполнены материалом с отрицательным показателем преломления. Решение задач было построено на основе классического подхода [19] для аналогичных задач с обычным диэлектриком, восходящего к классическому методу Зоммерфельда [20, 21].

Расчеты в [16, 17] проведены для отрицательно преломляющих сред с малыми затуханиями. Размер фокального пятна оказался равным примерно половине длины волны и никакого суперразрешения обнаружено не было. В данной работе полученный результат будет обсуждаться с точки зрения строгого следствия теории электромагнитного поля – теоремы эквивалентности.

2. Разрешающая способность линзы Веселаго

Итак, в статье [5] Дж.Пендри рассмотрел линзу Веселаго, которая представляет собой плоскую пластину (рис.1) из материала с диэлектрической и магнитной проницаемостями, равными $\epsilon = -\epsilon_0$ и $\mu = -\mu_0$ соответственно, где ϵ_0 и μ_0 – проницаемости вакуума в системе СИ. Волны от точечного источника A испытывают отрицательное преломление на границе пластины и фокусируются в точку P (в лучевом приближении). В статье [5] автор приходит к выводу о том, что в пределе бесконечно малых потерь в точке P будет создаваться «идеальное изображение источника», т.е. возникнет сингулярность сфокусированного поля или, по крайней мере, пятно с размерами, много меньшими любого характерного размера задачи. Такой вывод был обусловлен усилением эванесцентных волн пластиной отрицательно преломляющей линзы. В предельном случае нулевых потерь это усиление должно было привести, по мнению автора [5], к компен-

А.Б.Петрин. Объединенный институт высоких температур РАН, Россия, 125412 Москва, ул. Ижорская, 13, стр. 2; e-mail: a_petrin@mail.ru

Поступила в редакцию 12 апреля 2013 г., после доработки – 24 июня 2013 г.

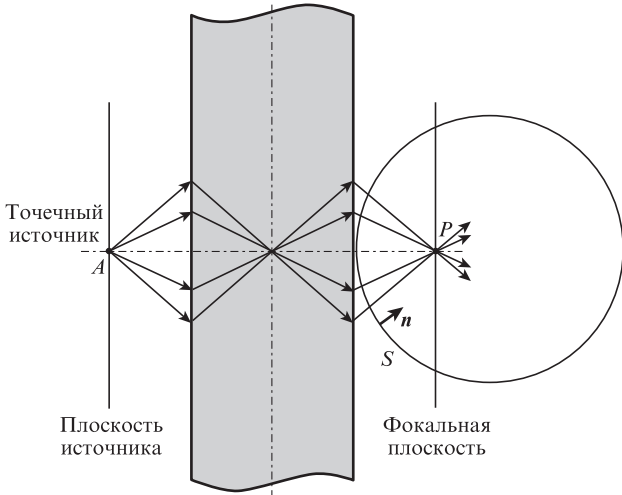


Рис.1. Линза Веселаго и вспомогательная поверхность S , окружающая фокальную точку P .

саци затухания эванесцентных волн снаружи пластины и к идеальному воспроизведению всех эванесцентных гармоник в плоскости изображения, т.е. к идеальному изображению. Однако переход к пределу нулевых потерь в работе [5] был выполнен некорректно. Следовало зафиксировать величину поглощения, найти поле от точечного источника в фокальной плоскости, а потом исследовать, как изменяется фокальное распределение при уменьшении поглощения, что в [5] сделано не было. При решении такой задачи в строгой формулировке [16, 17] оказалось, что для каждой конкретной величины потерь в веществе линзы фокальное пятно остается распределенным в конечной области пространства в соответствии с известными фундаментальными дифракционными ограничениями. Сторонников концепции суперразрешения такое доказательство его невозможности не убедило (см. [22] и цитируемую там литературу). Они ожидают, что, уменьшив кардинально потери в материале линзы или введя в нее активную среду, можно все-таки достичь желаемого. Однако ограничения теории дифракции носят фундаментальный характер. Они не должны зависеть от вида разложения электромагнитных полей по гармоникам, т.к. поле может быть разложено по различным полным наборам волн (разложение полей по плоским и эванесцентным волнам является лишь одним из возможных полных наборов волн). Поэтому далее в настоящей работе рассмотрены ограничения, накладываемые уравнениями электромагнитного поля (в конечном счете, уравнениями Максвелла), на разрешающую способность фокусирующих оптических инструментов.

Докажем, что суперразрешение невозможно, и найдем истинные размеры фокального пятна в плоскости изображения.

Окружим точку изображения P замкнутой поверхностью S , которая полностью находится в вакууме вне материала с отрицательным преломлением (см. рис.1). Задача распространения монохроматических электромагнитных волн в вакууме хорошо известна. Внутри S можно записать известные и хорошо изученные уравнения электродинамики. Так, согласно формулам Стреттона–Чу [23] электрическое и магнитное поля в точке P могут быть найдены по известным полям на границе S следующим образом:

$$E_P = i\omega\mu A_e - \frac{1}{i\omega\epsilon} \text{grad div} A_e - \text{rot} A_m, \quad (1)$$

$$H_P = i\omega\epsilon A_m - \frac{1}{i\omega\mu} \text{grad div} A_m + \text{rot} A_e, \quad (2)$$

где

$$A_e = \frac{1}{4\pi} \int_S [\mathbf{n}, \mathbf{H}] \frac{\exp(ikr)}{r} dS \quad \text{и} \quad A_m = \frac{1}{4\pi} \int_S [\mathbf{E}, \mathbf{n}] \frac{\exp(ikr)}{r} dS$$

– электрический и магнитный векторные потенциалы; \mathbf{n} – внутренняя нормаль к поверхности S ; $r = |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_S|$ – расстояние от элемента поверхности dS до точки P ; $k = \omega/c$ – волновое число; $\epsilon = \epsilon_0$ и $\mu = \mu_0$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости внутри S ; ω – частота волны; c – скорость света в вакууме; зависимость комплексного представления гармонических полей от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$. Заметим, что дифференциальные операторы в формулах (1) и (2) действуют на координаты точки P .

Формулы Стреттона–Чу для области S , в которой нет сторонних источников электромагнитного поля, являются выражением теоремы эквивалентности [24], следующей из леммы Лоренца и подробно рассмотренной в работах Лава, Щелкунова, Котлера и др. [25].

Рассмотрим физический смысл уравнений (1), (2). Если известны истинные электромагнитные поля \mathbf{E} и \mathbf{H} на границе области S , в которой нет сторонних источников, то поле в любой точке внутри S есть сумма полей электрических и магнитных поверхностных токов, расположенных на поверхности S и имеющих поверхностные плотности $\mathbf{j}_e = [\mathbf{n}, \mathbf{H}]$ и $\mathbf{j}_m = [\mathbf{E}, \mathbf{n}]$. Электромагнитные поля этих поверхностных токов полностью эквивалентны полям внешних по отношению к поверхности S сторонних токов (отсюда и название теоремы эквивалентности).

Итак, электромагнитное поле в любой точке внутри области S полностью определяется истинным электромагнитным полем на поверхности S . Этот вывод не зависит от формы поверхности, поэтому можно деформировать поверхность S и превратить ее в поверхность полусферы бесконечно большого радиуса (рис.2).

Интегралы в уравнениях (1), (2) по бесконечно удаленной поверхности полусферы в силу условия излучения Зоммерфельда равны нулю. В результате мы получаем интегрирование только по плоскости, параллельной пластине и находящейся в вакууме на бесконечно малом расстоянии от нее.

Заметим, что трансформация поверхности S в полусферу для дальнейшего доказательства непринципиальна и нужна лишь для ясности и удобства рассуждения. Использование условия излучения Зоммерфельда также не принципиально.

Далее, электромагнитное поле в любой точке P внутри поверхности S в силу формул Стреттона–Чу есть сумма полей от поверхностных токов $\mathbf{j}_e dS = [\mathbf{n}, \mathbf{H}] dS$ и $\mathbf{j}_m dS = [\mathbf{E}, \mathbf{n}] dS$, распределенных по поверхности S . Площадка dS с указанными поверхностными токами будет создавать в точке наблюдения P поля

$$dE_P = i\omega\mu \left(\frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \mathbf{j}_e dS \right) - \frac{1}{i\omega\epsilon} \text{grad div} \left(\frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \mathbf{j}_e dS \right) - \text{rot} \left(\frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \mathbf{j}_m dS \right), \quad (3)$$

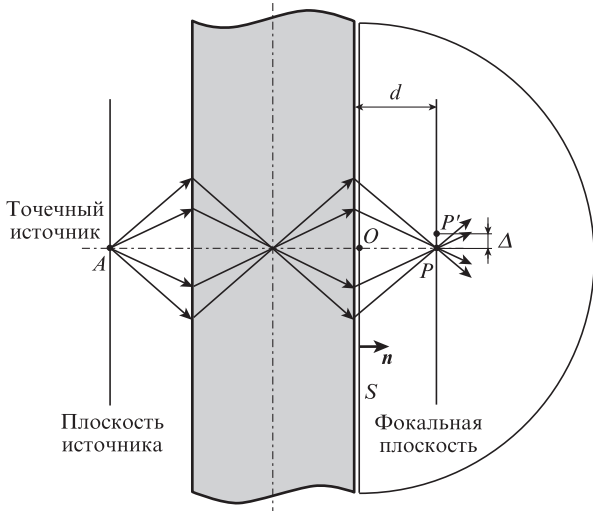


Рис.2. Деформированная поверхность S , превращенная в полусферу бесконечно большого радиуса.

$$d\mathbf{H}_P = i\omega\epsilon\left(\frac{\exp(ikr)}{4\pi r}\mathbf{j}_m dS\right) - \frac{1}{i\omega\mu}\text{graddiv}\left(\frac{\exp(ikr)}{4\pi r}\mathbf{j}_m dS\right) + \text{rot}\left(\frac{\exp(ikr)}{4\pi r}\mathbf{j}_e dS\right). \quad (4)$$

Если произвести дифференцирование, то выражение (3) можно представить в следующем тензорном виде:

$$(d\mathbf{E}_P)_q = \left(\frac{a_{qw}}{r} + \frac{b_{qw}}{r^2} + \frac{c_{qw}}{r^3}\right)\exp(ikr)\mathbf{j}_{e,w} dS + \left(\frac{d_{qw}}{r} + \frac{g_{qw}}{r^2}\right)\exp(ikr)\mathbf{j}_{m,w} dS, \quad (5)$$

где a_{qw} , b_{qw} , c_{qw} , d_{qw} и g_{qw} – тензоры, зависящие только от направляющих косинусов единичного вектора, направленного от точки интегрирования в точку наблюдения, и имеющие структуру

$$\frac{C_1}{r^2} \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{bmatrix} + \frac{C_2}{r} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где C_1 , C_2 , C_3 – константы (свои для каждого из тензоров); $x = x_P - x_S$; $y = y_P - y_S$; $z = z_P - z_S$; $r = |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_S|$. Указанные тензоры меняются в зависимости от направляющих косинусов медленно, и эти зависимости непринципиальны для дальнейшего рассмотрения. Поле $(d\mathbf{E}_P)_q$ в формуле (5) специально представлено в такой форме, чтобы выделить зависимость его компонент от расстояния r . Выражение $(d\mathbf{E}_P)_q$ в (5), где q пробегает значения 1, 2, 3 или x, y, z , представляет собой проекцию вектора $d\mathbf{E}_P$ на q -ю координатную ось (это комплексная величина). В правой части (5) используется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющемуся индексу w .

С использованием (5) формула (1) может быть переписана в виде

$$(\mathbf{E}_P)_q = \int_S \left[\left(\frac{a_{qw}}{r} + \frac{b_{qw}}{r^2} + \frac{c_{qw}}{r^3}\right)\exp(ikr)\mathbf{j}_{e,w} + \left(\frac{d_{qw}}{r} + \frac{g_{qw}}{r^2}\right)\exp(ikr)\mathbf{j}_{m,w} \right] dS. \quad (7)$$

Перед тем как перейти к определению размера области фокусировки, ответим на следующий вопрос: что означает идеальная фокусировка с точки зрения теоремы эквивалентности?

Ответ очевиден: при идеальной фокусировке поля $(d\mathbf{E}_P)_q$ от всех площадок dS складываются в одной фазе. На комплексной плоскости поле $(d\mathbf{E}_P)_q$ каждого элемента dS представляется вектором, поэтому при идеальной фокусировке векторы от всех dS направлены параллельно друг другу и образуют комплексный вектор результирующей компоненты поля $(\mathbf{E}_P)_q$, векторную диаграмму которого для каждой составляющей $(\mathbf{E}_P)_q$ полного поля можно рассматривать совершенно так же, как рассматривают сложение колебаний в оптике ([26], с. 372)). На векторной диаграмме рис.3 условно показано сложение полей от отдельных элементов поверхности $(d\mathbf{E}_P)_q$, в результате которого получается вектор результирующей составляющей поля $(\mathbf{E}_P)_q$ в фокальной точке P (светлые стрелки соответствуют идеальной фокусировке). Условность диаграммы состоит в том, что реально при интегрировании в (7) нужно складывать бесконечно малые векторы $(d\mathbf{E}_P)_q$, и длины этих векторов не одинаковы. Угол поворота результирующего вектора относительно начала координат на рис.3 несуществен и определяется началом отсчета времени. Особо хочется подчеркнуть, что на рис.3 представлены векторы в комплексной плоскости, изображающие комплексные числа $(\mathbf{E}_P)_q$ и $(d\mathbf{E}_P)_q$, которые в реальном пространстве не векторы, а составляющие комплексного вектора электрического поля на осях координат; например, $(\mathbf{E}_P)_q$ может быть проекцией вектора электрического поля на одну из осей координат, лежащую в фокальной плоскости.

Сместим точку наблюдения из точки P в точку P' на малое расстояние Δ вдоль фокальной плоскости (см. рис.2), такое, что $\Delta \ll d$ и $\Delta \ll \lambda$ (d – расстояние от линзы до фо-

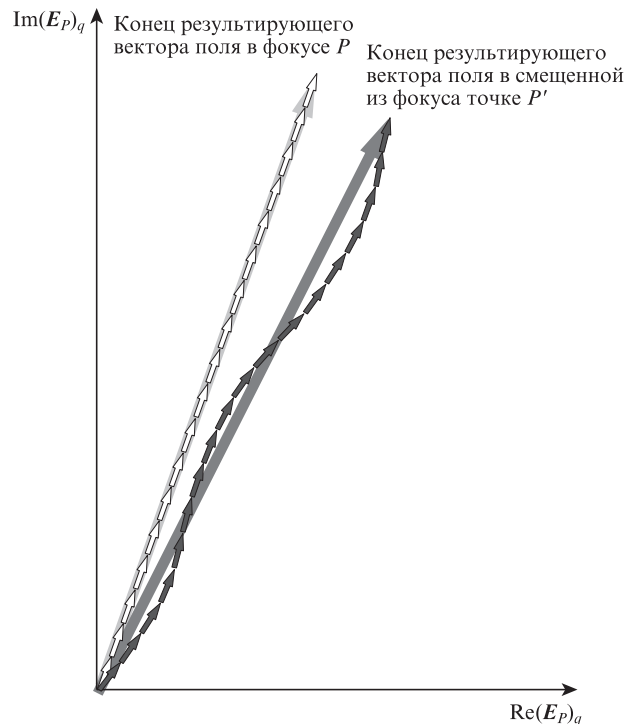


Рис.3. Схематическое изображение векторной диаграммы, на которой показано сложение полей от отдельных элементов поверхности $(d\mathbf{E}_P)_q$ в вектор результирующего поля $(\mathbf{E}_P)_q$ в фокальной точке P (светлые стрелки) и в смещенной от нее точке P' (темные стрелки).

кальной плоскости, λ – длина волны внутри S). Полное электрическое поле в точке наблюдения при смещении немного изменится. Изменения вкладов от отдельных элементов поверхности dS при указанном смещении происходят в соответствии с (5) за счет как изменения длин векторов $(d\mathbf{E}_P)_q$, так и их небольших поворотов (в соответствии с изменениями фаз волн, которые возникают при смещении точки наблюдения). На рис.3 результат сложения векторов $(d\mathbf{E}_P)_q$ в смещенной точке P' показан темными стрелками.

Оценим теперь размер области на фокальной плоскости, в которой поле будет близко к полю в фокальной точке P . Можно выделить два предельных случая: $d \gg \lambda$ и $d \ll \lambda$. Будем считать, что в случае $d \gg \lambda$ точка P находится в дальней зоне линзы, а в случае $d \ll \lambda$ – в ближней.

Рассмотрим сначала случай дальней зоны ($d \gg \lambda$). При малом смещении ($\Delta \ll d$) в выражении (5) изменения $(d\mathbf{E}_P)_q$ будут определяться изменением фазового множителя $\exp(ikr)$, возникающим при смещении. Элементарные векторы на векторной диаграмме будут поворачиваться, практически не изменяясь по амплитуде. Вследствие этого результирующий вектор будет уменьшаться по амплитуде и, вообще говоря, тоже поворачиваться. Нетрудно понять, что заметное изменение амплитуды результирующего вектора возникнет при $\Delta \sim \lambda/2$, где λ – длина волны в вакууме. В этом случае фазы волн, определяемых отдельными элементами, изменяются от нуля для dS на оси симметрии системы (точка O на рис.2) до $\pm k\Delta \sim \pi$ для бесконечно удаленных элементов плоскости. Поэтому характерный размер фокального пятна в окрестности точки фокуса P составит $\sim \lambda$. При малых же смещениях (таких, что $\Delta \ll \lambda/2$) просто невозможно заметно уменьшить результирующий вектор $(\mathbf{E}_P)_q$, т.к. поворот слагаемых векторов $(d\mathbf{E}_P)_q$ будет при этом пренебрежимо малым, а их длина не изменится.

Из последнего результата сразу следует невозможность суперразрешения по Пендри в дальней зоне. Действительно, если поле равно бесконечности в точке P , то при малом, но конечном смещении $\Delta \ll \lambda/2$ поле $(\mathbf{E}_P)_q$ по амплитуде в процентном отношении изменится мало и, значит, будет равно бесконечности в конечной области в окрестности фокуса, что невозможно, т.к. в этой области будет сконцентрирована бесконечная электромагнитная энергия (точечный источник перед линзой излучает конечную энергию). Более того, последовательные (от границы полученной зоны бесконечного поля) конечные смещения $\Delta \ll \lambda/2$ позволяют и дальше расширять эту зону бесконечного поля, постепенно заполняя область S .

В случае ближней зоны ($d \ll \lambda$) при малом смещении $\Delta \ll d$ в выражении (5) наибольшие изменения будут вносить множители

$$\left(\frac{a_{qw}}{r} + \frac{b_{qw}}{r^2} + \frac{c_{qw}}{r^3} \right) \text{ и } \left(\frac{d_{qw}}{r} + \frac{g_{qw}}{r^2} \right),$$

а вклад фазового множителя $\exp(ikr)$ будет пренебрежимо малым. Элементарные векторы $(d\mathbf{E}_P)_q$ на векторной диаграмме в этом случае практически не будут поворачиваться, а только изменяться по амплитуде. На поверхности S в этом случае будет наблюдаться максимум эквивалентных поверхностных токов $\mathbf{j}_e = [\mathbf{n}, \mathbf{H}]$ и $\mathbf{j}_m = [\mathbf{E}, \mathbf{n}]$ вблизи оси симметрии (точка O на рис.2), причем они будут находиться в фазе (при $\Delta \ll d$ изменение $\exp(ikr)$ пренебрежимо мало). Поэтому очевидно (см. (7)), что заметное измене-

ние амплитуды результирующего вектора произойдет при $\Delta \sim d/2$, где d – характерный размер задачи. Тогда приходим к выводу, что фокальное пятно в окрестности точки P в ближней зоне имеет размер $\sim d$. При малых же смещениях (таких, что $\Delta \ll d$) просто невозможно заметно уменьшить результирующий вектор $(\mathbf{E}_P)_q$, т.к. слагаемые $(d\mathbf{E}_P)_q$ при неизменном направлении изменятся по длине пренебрежимо мало.

Доказательство невозможности суперразрешения по Пендри и в ближней зоне аналогично доказательству для дальней зоны. Действительно, если поле равно бесконечности в точке P , то при малом, но конечном смещении $\Delta \ll d$ поле $(\mathbf{E}_P)_q$ по амплитуде в процентном отношении изменится мало. Следовательно, оно будет равно бесконечности в конечной области в окрестности фокуса, что невозможно, т.к. в этой области будет сконцентрирована бесконечная электромагнитная энергия (точечный источник излучает конечную энергию). Рассуждая аналогично, приходим к выводу о невозможности суперразрешения и в промежуточной зоне.

Приведенные выше выводы полностью подтверждаются результатами расчетов фокусирующих свойств линзы Веселаго с малым поглощением материала, выполненных в рамках теории работ [16, 17].

Здесь хотелось бы ответить на критику работ [16, 17] в работе [22]. В ней говорится, что пределы интегрирования в [16, 17] были недостаточно велики, чтобы правильно учесть все эванесцентные волны, дающие вклад в «суперразрешение». То, что аналитические решения в [16, 17] являются правильными и строгими, в [22] не подвергается сомнению. Однако критика численных результатов работ [16, 17] необоснованна по следующим причинам.

1. В [16] математически строго исследуется фокус внутри линзы Веселаго (о котором в [22] почему-то забывают и в котором тоже должно быть совершенное изображение по Пендри). Верхний предел интегрирования в [16] равен примерно $10^2 k_0$, где k_0 – волновое число в вакууме на рассматриваемой частоте. При этом могли бы быть разрешены детали фокального распределения, примерно в 100 раз меньшие длины волны в вакууме λ , однако в результате расчетов было найдено, что распределение поля в фокусе имеет обычный размер (порядка λ). Эти детали вычислений были приведены в [16].

2. В [17] дано строгое решение задачи нахождения фокального распределения энергии для линзы Веселаго в виде интеграла. При стремлении поглощения в линзе к нулю наступает момент, когда численное нахождение интеграла становится невозможным из-за возникновения в подынтегральном выражении экспонент с большими показателями – происходит переполнение численного представления. Чтобы избежать этого и решить задачу, в материал линзы были введены малые затухания $\varepsilon = \varepsilon_0(-1 + 0.001i)$ и $\mu = \mu_0(-1 + 0.001i)$. При этом, как можно убедиться, эванесцентные волны будут иметь заметные амплитуды только при волновых числах, немногим больших k_0 , а затем, с ростом волнового числа, по которому идет интегрирование, эти амплитуды резко снижаются. Поэтому при интегрировании для получения правильного результата (при указанном затухании в линзе) достаточно взять область волновых чисел в пределах $2k_0 - 3k_0$, что и было сделано в работе [17]. В расчетах [17] могли бы быть выявлены детали фокального распределения с размерами $\sim \lambda/3$, однако было получено распределение обычных размеров, $\sim \lambda$. Как мы видим, опираясь на выводы настоя-

щей работы, это не случайно. Поэтому на критику в [22] можно ответить следующее: пределы в [17] были выбраны достаточными, чтобы интеграл сходился и чтобы заметить гипотетическое суперразрешение, которого, как оказалось, нет.

3. В [16] были проведены гораздо более точные численные расчеты, доказывающие, что в фокусе внутри линзы Веселаго пятно имеет размер $\sim \lambda$. Линза Веселаго может быть представлена в виде двух таких линз (одна дает изображение точечного источника внутри линзы Веселаго, а вторая переводит это изображение во внешний фокус линзы Веселаго). Значит, в фокусе линзы Веселаго размер минимального пятна тоже должен быть $\sim \lambda$! Не может конечное пятно внутри преобразоваться в точку во внешнем фокусе!

Наконец, замечу, что и у Дж.Пендри в работе [5] есть математически некорректные вычисления, которые в конечном счете и привели ко всем этим недоразумениям с суперразрешением. Он сначала суммирует ряд геометрической прогрессии по известной формуле, а затем в полученной формуле устремляет знаменатель прогрессии к бесконечности, что математически некорректно.

3. Выводы

Итак, в настоящей работе доказано, что суперразрешения и, следовательно, системы, создающей идеальное изображение, быть не может. Сфокусированное поле в свободном пространстве не может иметь сингулярности. Размер минимального фокального пятна от точечного источника в плоскости изображения есть величина $\sim \lambda$ в дальней зоне и порядка характерного размера задачи d в ближней зоне. Эти выводы не зависят от конструкции фокусирующей системы и от материалов, из которой эта система изготовлена, включая конструкции с активными и сверхпроводящими средами.

Чтобы исключить удручающие поиски суперразрешения в будущем, предлагаю, по аналогии со вторым началом термодинамики (невозможность вечного двигателя второго рода), назвать невозможность суперразрешения вторым началом электродинамики.

1. Макаров В.П., Рухадзе А.А. *УФН*, **181** (12), 1357 (2011).
2. Веселаго В.Г. *УФН*, **92**, 517 (1967).
3. Smith D.R., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 4184 (2000).
4. Shelby R.A., Smith D.R., Schultz S. *Science*, **292**, 77 (2001).
5. Pendry J.B. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 3966 (2000).
6. Lagarkov A.N., Kissel V.N. *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 077401-1 (2004).
7. Williams J.M. *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 249703-1 (2001).
8. Pendry J.B. *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 249704-1 (2001).
9. Cui T.J., Cheng Q., Lu W.B., et al. *Phys. Rev. B*, **71**, 045114 (2005).
10. Chen J.J., Grzegorzczak T.M., Wu B., et al. *Phys. Rev. E*, **74**, 046615 (2006).
11. Alitalo P., Tretyakov S.A. *Metamaterials*, **1**, 81 (2007).
12. Cheng Q., Cui T.J. *Opt. Lett.*, **30** (10), 1216 (2005).
13. Scalora M., D'Aguanno G., Mattiucci N., et al. *Opt. Express*, **15** (2), 508 (2007).
14. Podolskiy V.A., Kuhta N.A., Milton G.W. *Appl. Phys. Lett.*, **87**, 231113 (2005).
15. Сивухин Д.В. *Общий курс физики, т. IV. «Оптика»* (М.: Наука, 1985).
16. Петрин А.Б. *Письма в ЖЭТФ*, **87** (9), 550 (2008).
17. Петрин А.Б. *ЖЭТФ*, **134** (3), 436 (2008).
18. Petrin A., in *Wave Propagation in Materials for Modern Applications* (Vukovar: IN-TECH, 2010, Ch. 7); www.sciyo.com.
19. King R.W.P., Smith G.S. *Antennas in Matter* (Cambridge, MA: Massachusetts Inst. Technol. Press, 1981).
20. Sommerfeld A. *Ann. Physik. (Leipzig)*, **81**, 1135 (1926).
21. Wait J.R. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, **40** (5), 7 (1998).
22. Шевченко В.В. *УФН*, **181** (11), 1171 (2011).
23. Страттон Дж.А. *Теория электромагнетизма* (М.–Л.: Гостехиздат, 1948).
24. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. *Возбуждение электромагнитных волн* (М.–Л.: Энергия, 1967).
25. Марков Г.Т. *Радиотехника и электроника*, **4**, 5 (1958).
26. Горелик Г.С. *Колебания и волны* (М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959).