

# Резонансные дифракционные решётки для пространственного дифференцирования оптических пучков

Н.В.Головастикова, Д.А.Быков, Л.Л.Досколович

*Рассмотрена дифракция двумерного оптического пучка на резонансной дифракционной решётке. Получено дифференциальное уравнение, описывающее в общем виде пространственное преобразование профиля падающего пучка при дифракции на резонансной решётке. Показано, что при определённых параметрах резонанса дифракционная решётка позволяет выполнить операции пространственного дифференцирования и интегрирования падающего пучка. Рассчитаны параметры дифракционных решёток для пространственного дифференцирования оптических пучков в геометрии на пропускание. Показано, что дифференцирующая резонансная дифракционная решётка даёт возможность преобразовать двумерный гауссов пучок в двумерную моду Эрмита–Гаусса. Представленные результаты численного моделирования находятся в хорошем соответствии с предложенным теоретическим описанием. Применение рассмотренных резонансных дифракционных решёток перспективно для решения задач оптической обработки информации.*

**Ключевые слова:** резонансная решётка, оптическое дифференцирование, пространственное дифференцирование.

## 1. Введение

Оптические устройства, осуществляющие заданные временные и пространственно-временные преобразования оптических сигналов, представляют большой интерес для широкого спектра приложений, включающих сверхбыструю оптическую обработку информации и аналоговые оптические вычисления. Важнейшими операциями аналоговой обработки оптических сигналов являются операции временного и пространственного дифференцирования. Под временным дифференцированием оптического импульса понимается дифференцирование огибающей импульса, под пространственным – дифференцирование пространственного профиля светового пучка. Для выполнения временного дифференцирования были предложены различные варианты брэгговских решёток [1–8], а также резонансные дифракционные решётки [9–12]. Дифференцирование при этом осуществлялось в геометрии как на пропускание, так и на отражение. Пространственное дифференцирование впервые было рассмотрено в работе [13], где использовалась брэгговская решётка с дефектом, выполняющая операцию дифференцирования в геометрии на отражение. Отметим, что брэгговская решётка не позволяет провести операцию дифференцирования в геометрии на пропускание, что является существенным ограничением подхода, предложенного в [13].

В настоящей работе получено дифференциальное уравнение, описывающее в общем виде пространственное преобразование профиля падающего пучка при дифрак-

ции на резонансной дифракционной решётке. Показано, что при определённых параметрах резонанса дифракционная решётка позволяет выполнить операции пространственного дифференцирования и интегрирования падающего пучка. Впервые рассчитаны параметры дифракционной решётки для пространственного дифференцирования оптического пучка в геометрии на пропускание, при этом продемонстрирована возможность управления соотношением между качеством дифференцирования и амплитудой прошедшего сигнала за счёт изменения геометрических параметров решётки. В качестве важного практического применения дифференцирующей резонансной решётки рассмотрено преобразование двумерного гауссова пучка в двумерный пучок Эрмита–Гаусса.

## 2. Дифракция двумерного оптического пучка на дифракционной решётке

Рассмотрим двумерный оптический пучок, падающий на дифракционную структуру под углом  $\theta_u$ . В системе координат  $xz$ , связанной с пучком и повернутой относительно системы координат решётки  $x_{gr}z_{gr}$  на угол  $\theta_u$  (рис. 1), разложение падающего пучка по плоским волнам имеет вид

$$P_{inc}(x, z) = \int G(k_x) \exp(i k_x x - i \sqrt{k_0^2 n_{sup}^2 - k_x^2} z) dk_x, \quad (1)$$

где  $k_0 = 2\pi/\lambda$  – волновое число;  $n_{sup}$  – показатель преломления среды над структурой;  $k_x$  и  $\sqrt{k_0^2 n_{sup}^2 - k_x^2} = k_z$  – компоненты волновых векторов падающих волн;  $G(k_x)$  – угловой спектр пучка шириной  $\Delta_g$  ( $|k_x| \leq \Delta_g$ ). Функция  $P_{inc}(x, z)$  в (1) соответствует компоненте  $E_y$  электрического поля в случае ТЕ поляризации или компоненте  $H_y$  магнитного поля в случае ТМ поляризации.

В результате дифракции пучка на решётке выражения для отражённого и прошедшего полей в нулевом порядке дифракции примут вид

Н.В.Головастикова, Д.А.Быков, Л.Л.Досколович. Институт систем обработки изображений РАН, Россия, 443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 151; Самарский государственный аэрокосмический университет им. акад. С.П.Королёва, Россия, 443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 151; e-mail: bykovd@gmail.com

Поступила в редакцию 24 марта 2014 г., после доработки – 14 мая 2014 г.

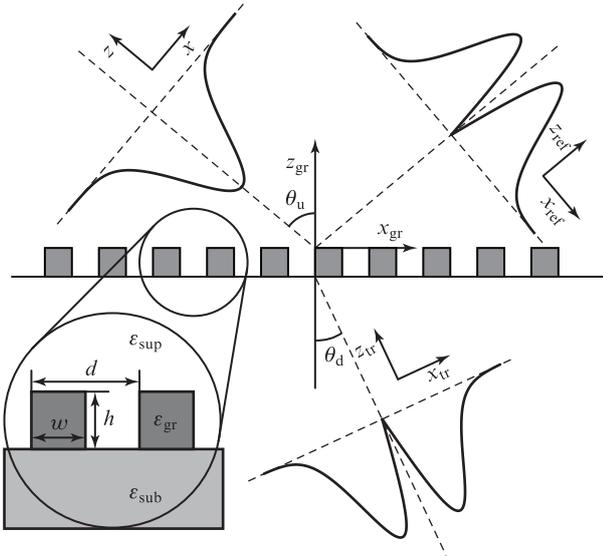


Рис.1. Геометрия задачи о дифракции оптического пучка на дифракционной решётке ( $\theta_d$  – угол преломления пучка).

$$P_{\text{ref}}(x_{\text{ref}}, z_{\text{ref}}) = \int G(k_x) R(\tilde{k}_x) \exp\left(ik_x x_{\text{ref}} + i\sqrt{k_0^2 n_{\text{sup}}^2 - k_x^2} z_{\text{ref}}\right) dk_x, \quad (2)$$

$$P_{\text{tr}}(x_{\text{tr}}, z_{\text{tr}}) = \int G(k_x) T(\tilde{k}_x) \exp\left(ik_x x_{\text{tr}} - i\sqrt{k_0^2 n_{\text{sub}}^2 - k_x^2} z_{\text{tr}}\right) dk_x,$$

где  $R(\tilde{k}_x)$  и  $T(\tilde{k}_x)$  – комплексные коэффициенты отражения и пропускания структуры;  $\tilde{k}_x = k_0 n_{\text{sup}} \sin(\theta + \theta_u) = k_x \cos \theta_u + k_z \sin \theta_u$  –  $x$ -компонента волнового вектора, падающего на решётку под углом  $\theta + \theta_u$  в системе координат решётки;  $n_{\text{sub}}$  – показатель преломления материала подложки. Отметим, что выражения (2) записаны в системах координат, связанных с отражённым и преломлённым пучками (рис.1). При этом полагаем, что начала систем координат  $xz$ ,  $x_{\text{ref}}z_{\text{ref}}$  и  $x_{\text{tr}}z_{\text{tr}}$  совпадают с началом системы координат  $x_{\text{gr}}z_{\text{gr}}$ .

Предполагая, что угловой спектр падающего пучка является достаточно узким ( $\Delta_g \ll k_0 n_{\text{sup}}$ ), получаем

$$\tilde{k}_x \approx k_x \cos \theta_u + k_0 n_{\text{sup}} \sin \theta_u = k_x \cos \theta_u + k_{x0}, \quad (3)$$

где  $k_{x0} = k_0 n_{\text{sup}} \sin \theta_u$ . Рассмотрим связь профиля падающего пучка  $P_{\text{inc}}(x, 0)$  с профилями отражённого пучка  $P_{\text{ref}}(x_{\text{ref}}, 0)$  и прошедшего пучка  $P_{\text{tr}}(x_{\text{tr}}, 0)$ . Из выражений (1), (2) следует, что преобразование профиля падающего пучка  $P_{\text{inc}}(x, 0)$  в профиль  $P_{\text{tr}}(x, 0)$  или  $P_{\text{ref}}(x, 0)$  можно описывать в терминах прохождения сигнала через линейную систему с передаточной функцией, пропорциональной коэффициенту отражения или пропускания дифракционной решётки [13]:

$$H_{\text{ref}}(k_x) = R(k_x \cos \theta_u + k_{x0}), \quad (4)$$

$$H_{\text{tr}}(k_x) = T(k_x \cos \theta_u + k_{x0}).$$

Отметим, что передаточные функции (4) по виду аналогичны передаточным функциям, описывающим временное преобразование оптического импульса [9–12].

### 3. Преобразование сигнала резонансной дифракционной решёткой

Исследуем вид передаточных функций (4) в окрестности пространственных частот волноводных резонансов, связанных с возбуждением в решётке собственных мод. В окрестности резонанса для коэффициентов отражения и пропускания резонансных решёток справедливы следующие приближённые представления [10, 13–16]:

$$R(\tilde{k}_x) \approx a_R + \frac{b_R}{\tilde{k}_x - k_{\text{pole}}} = a_R \frac{\tilde{k}_x - k_{\text{zero}}^{(R)}}{\tilde{k}_x - k_{\text{pole}}}, \quad (5)$$

$$T(\tilde{k}_x) \approx a_T + \frac{b_T}{\tilde{k}_x - k_{\text{pole}}} = a_T \frac{\tilde{k}_x - k_{\text{zero}}^{(T)}}{\tilde{k}_x - k_{\text{pole}}},$$

где  $a_R, a_T$  – нерезонансные коэффициенты отражения и пропускания;  $k_{\text{pole}}$  – комплексная константа распространения собственной моды структуры;  $b_R, b_T$  – коэффициенты, описывающие резонансное рассеяние света на структуре;  $k_{\text{zero}}^{(T)} = k_{\text{pole}} - b_T/a_T$ ,  $k_{\text{zero}}^{(R)} = k_{\text{pole}} - b_R/a_R$  – нули коэффициентов отражения и пропускания, соответствующие полюсу  $k_{\text{pole}}$ . Отметим, что представления (5) неприменимы в окрестности  $\theta_u = 0$  ( $k_{x0} = 0$ ). Действительно, при  $k_{x0} = 0$  коэффициенты отражения и пропускания субволновой диэлектрической решётки с симметричным профилем (рис.1) являются чётными функциями от угла падения [17] и, следовательно, функциями от  $\tilde{k}_x^2$  [13]. В дальнейшем случай нормального падения не рассматривается.

С учётом уравнений (5) передаточные функции (4) могут быть представлены в виде

$$H_{\text{ref}} = H_{\text{tr}} = H(k_x) = a \frac{k_x \cos \theta_u - (k_{\text{zero}} - k_{x0})}{k_x \cos \theta_u - (k_{\text{pole}} - k_{x0})}, \quad (6)$$

где  $a = a_{R(T)}$ .

Введём следующие обозначения:  $g(x) = P_{\text{inc}}(x, 0)$  – распределение поля падающего пучка;  $f(x) = P_{\text{tr}}(x, 0)$  (или  $f(x) = P_{\text{ref}}(x, 0)$ ) – распределение поля отражённого (или прошедшего) пучка. Пусть  $G(k_x)$  и  $F(k_x)$  – фурье-спектры функций  $g(x)$  и  $f(x)$  соответственно. Тогда согласно (6) пространственные спектры входного сигнала  $G(k_x)$  и выходного сигнала  $F(k_x) = H(k_x)G(k_x)$  связаны уравнением

$$ik_x F(k_x) - i \frac{k_{\text{pole}} - k_{x0}}{\cos \theta_u} F(k_x) = aik_x G(k_x) - ai \frac{k_{\text{zero}} - k_{x0}}{\cos \theta_u} G(k_x). \quad (7)$$

Применяя обратное преобразование Фурье к правой и левой частям уравнения (7), получаем, что при дифракции пучка на резонансной дифракционной решётке отражённый (или прошедший) выходной сигнал является решением неоднородного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{df(x)}{dx} - i \frac{k_{\text{pole}} - k_{x0}}{\cos \theta_u} f(k_x) = a \frac{dg(x)}{dx} - ai \frac{k_{\text{zero}} - k_{x0}}{\cos \theta_u} g(k_x). \quad (8)$$

Решение данного уравнения несложно получить в следующем виде:

$$f(x) = a \int_C^x \exp\left(\frac{x-\xi}{v}\right) \left[ \frac{dg(\xi)}{d\xi} - i(k_{\text{zero}} - k_{x0})g(\xi) \right] d\xi, \quad (9)$$

где  $v = i \cos \theta_u / (k_{x0} - k_{\text{pole}})$  – параметр, аналогичный постоянной времени при временном дифференцировании оптических импульсов [9, 11];  $C = -\infty \cdot \text{sgn}(\text{Im} k_{\text{pole}})$ . Приведённое выражение для нижнего предела интегрирования  $C$  в (9) обеспечивает убывание поля сформированного пучка на бесконечности ( $f(\pm\infty) = 0$ ). Отметим, что возможность решения дифференциальных уравнений вида (8) с помощью резонансной дифракционной решётки представляет большой интерес, поскольку до настоящего времени для «оптического» решения подобных уравнений были предложены достаточно сложные системы с обратной связью [18].

Покажем, что при выполнении определённых условий для коэффициентов  $a$ ,  $b$  ( $b = b_{R(T)}$ ) в (5), (9) результирующий сигнал является производной или первообразной исходного сигнала. Действительно, при условии  $k_{x0} = k_{\text{zero}} = k_{\text{pole}} - b/a \in \mathbb{R}$  получим

$$\begin{aligned} f(x) &= a \int_C^x \exp\left(\frac{x-\xi}{v}\right) \frac{dg(\xi)}{d\xi} d\xi \\ &= a \left[ -v \frac{dg(x)}{dx} + v \int_C^x \exp\left(\frac{x-\xi}{v}\right) \frac{d^2g(\xi)}{d\xi^2} d\xi \right] \\ &= -av \frac{dg(x)}{dx} - av^2 \left[ \frac{d^2g(x)}{dx^2} - \int_C^x \exp\left(\frac{x-\xi}{v}\right) \frac{d^3g(\xi)}{d\xi^3} d\xi \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

При условии  $|v| \ll 1$  имеем

$$f(x) \approx -av \frac{dg(x)}{dx}, \quad (11)$$

т. е. результирующий сигнал ( $P_{\text{tr}}(x, 0)$  или  $P_{\text{ref}}(x, 0)$ ) пропорционален производной исходного сигнала  $g(x)$ .

Операция интегрирования реализуется при условиях  $k_{x0} = \text{Re} k_{\text{pole}}$ ,  $a = 0$ . В этом случае

$$\begin{aligned} f(x) &= ib \int_C^x \exp\left(\frac{x-\xi}{v}\right) g(\xi) d\xi \\ &= ib \left[ \Phi(x) + \frac{1}{v} \int_C^x \exp\left(\frac{x-\xi}{v}\right) \Phi(\xi) d\xi \right], \quad (12) \end{aligned}$$

где

$$\Phi(x) = \int_C^x g(\xi) d\xi.$$

При условии  $|v| \gg 1$  получим

$$f(x) \approx ib \Phi(x), \quad (13)$$

т. е. результирующий сигнал ( $P_{\text{tr}}(x, 0)$  или  $P_{\text{ref}}(x, 0)$ ) пропорционален первообразной исходного сигнала  $g(x)$ .

Следует отметить, что точное интегрирование или дифференцирование выполнить невозможно. Действительно, в случае интегрирования условию  $|v| \rightarrow \infty$  соответствует физически нереализуемая система, а в случае дифференцирования условию  $v \rightarrow 0$ , согласно (11), соответствует нулевая амплитуда выходного сигнала. Варьирование величины  $|v|$  позволяет достичь компромисса между качеством дифференцирования (или интегрирования) и энергией прошедшего сигнала.

## 4. Дифференцирование оптического пучка

Рассмотрим дифференцирование оптического пучка в геометрии на пропускание. Как было показано выше, для этого необходимо наличие нуля передаточной функции (6), соответствующего нулю коэффициента пропускания на центральной пространственной частоте падающего пучка  $k_{x0} = k_0 n_{\text{sup}} \sin \theta_u$ . Известно, что условие наличия нуля в спектре пропускания выполняется для субволновой диэлектрической решётки (в этом случае решение в виде распространяющейся волны существует только для нулевого порядка дифракции) [12, 14–16]. Таким образом, для дифференцирования падающего пучка будем использовать субволновую диэлектрическую дифракционную решётку.

Для подтверждения возможности пространственного дифференцирования было выполнено численное моделирование дифракции света на решётке в схеме, представленной на рис.1. Аналогичные структуры широко применяются в качестве узкополосных спектральных фильтров [19]. При расчёте использовались диэлектрические проницаемости  $\epsilon_{\text{sup}} = 1$  (материал над решёткой),  $\epsilon_{\text{gr}} = 8.6207$  (материал решётки) и  $\epsilon_{\text{sub}} = 2.3535$  (материал подложки), которые соответствуют воздуху, арсениду алюминия и кварцу. Параметры дифференцирующей структуры ( $d$  – период,  $h$  – высота,  $w$  – ширина ступеньки) были получены в результате минимизации  $|v|$  при условии наличия нуля в спектре пропускания. Отметим, что вычисление параметра  $v$  сводится к вычислению полюса  $k_{\text{pole}}$ . Для определения последнего на каждой итерации строилась аппроксимация Паде порядка  $[1/1]$  функции  $T(\tilde{k}_x)$  в окрестности точки  $k_x = k_{x0}$ . Для расчёта функции  $T(\tilde{k}_x)$  использовался метод фурье-мод в формулировке работ [20, 21]. Расчёт проводился для пучка с длиной волны  $\lambda = 1.064$  мкм при спектральной ширине  $\Delta_g = 0.55$  мкм<sup>-1</sup>. Полученные в результате оптимизации параметры решётки приведены в подписи к рис.2. При указанных параметрах величины  $k_{\text{pole}} = 1.4599 - 0.9843i$  мкм<sup>-1</sup> и  $k_{\text{zero}} = 1.8841$  мкм<sup>-1</sup>. Таким образом, пространственное дифференцирование падающего пучка будет выполняться при центральной пространственной частоте  $k_{x0} = k_{\text{zero}} = 1.8841$  мкм<sup>-1</sup>, соответствующей углу падения  $\theta_u = 0.3247$  рад.

На рис.2,а показан пространственный спектр пропускания дифракционной решётки с рассчитанными параметрами. Согласно рис.2,а передаточная функция (6) в окрестности значения  $k_x = 0$  с точностью до линейной фазы хорошо соответствует передаточной функции идеального дифференцирующего фильтра  $H_{\text{dif}}(k_x) = ik_x (k_x | < \Delta_g)$ . Линейная фаза обуславливает сдвиг отражённого пучка (эффект Гуса–Хенхена) и не влияет на качество дифференцирования. На рис.2,б показаны амплитуды падающего гауссова пучка  $P_{\text{inc}}(x, 0) = \exp(-x^2/\sigma^2)$  ( $\sigma = 8.1$  мкм) и прошедшего пучка  $f(x) = P_{\text{tr}}(x, 0)$ , а также модуль аналитически вычисленной производной. Последний приведён в увеличенном масштабе, что обеспечивает равенство максимальных значений модуля аналитической производной и амплитуды прошедшего пучка. Таким образом, рис.2,б демонстрирует высокую точность дифференцирования, в частности модуль выборочного коэффициента корреляции между амплитудой прошедшего пучка и модулем аналитически вычисленной производной превышает 0.999.

Предложенная дифракционная структура может быть рассмотрена как аналог фурье-коррелятора, состоящего из пары линз с линейным по амплитуде пространствен-

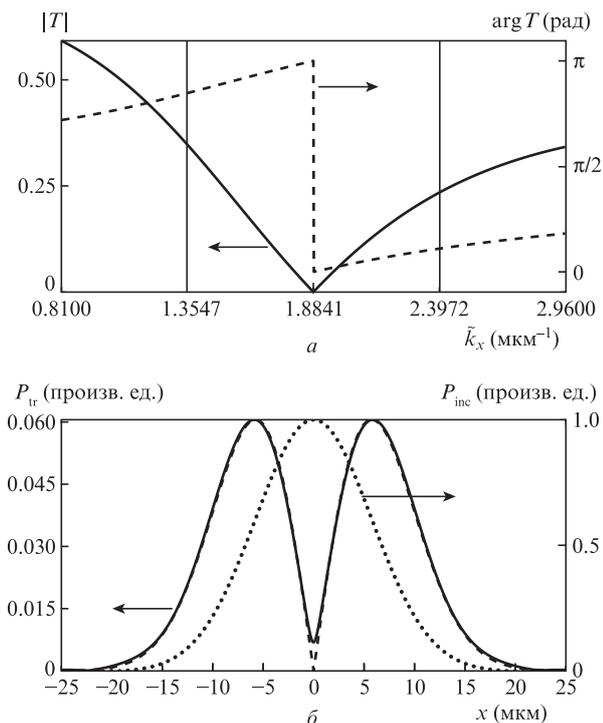


Рис.2. Модуль (сплошная кривая) и аргумент (штриховая кривая) комплексного коэффициента пропускания как функции  $\tilde{k}_x$  (а), амплитуды прошедшего (сплошная кривая) и падающего (пунктирная кривая) пучков, а также модуль аналитически рассчитанной производной (штриховая кривая) (б) для решётки с параметрами  $d = 0.49$  мкм,  $h = 0.46$  мкм,  $w = 0.295$  мкм. Вертикальными линиями указан использованный в расчёте интервал пространственных частот.

ным фильтром в фурье-плоскости. Передаточная функция такого фильтра имеет вид  $H_{\text{dif}}(k_x) = k_x/\Delta_g$  ( $k_x < \Delta_g$ ). Интересно сравнить энергетическую эффективность рассчитанной дифракционной решётки с максимально возможной эффективностью указанного пространственного дифференцирующего фильтра. Под энергетической эффективностью будем понимать величину  $av$  в (11), характеризующую амплитуду выходного сигнала. Для идеального фильтра  $av = |H'(0)| = 1/\Delta_g = 1.818$  мкм. Энергетическая эффективность рассчитанной дифракционной структуры  $av = |H'(0)| \approx 0.56$  мкм. Меньшая энергетическая эффективность предложенной дифракционной структуры компенсируется существенно меньшими её пространственными размерами (несколько микрометров по сравнению с десятками сантиметров для фурье-коррелятора). Кроме того, приведённое максимальное значение энергетической эффективности недостижимо на практике из-за френелевских потерь.

Исследуем возможность управления качеством дифференцирования путём изменения геометрических параметров дифракционной решётки. На рис.3 представлена зависимость параметра  $|v|$  в (9), (10), определяющего соотношение между точностью дифференцирования и энергией прошедшего сигнала, от ширины ступеньки дифракционной решётки  $w$ . При вычислении величины  $|v|$  проводился пересчёт значений  $k_{\text{pole}}$ ,  $k_{x0}$  и  $\theta_u$  для изменённой геометрии структуры. Согласно рис.3 минимум  $|v|$  достигается при  $w = 0.295$  мкм; данное значение использовалось при расчёте зависимостей на рис.2.

Для исследования влияния параметра  $|v|$  на качество дифференцирования было выполнено моделирование диф-

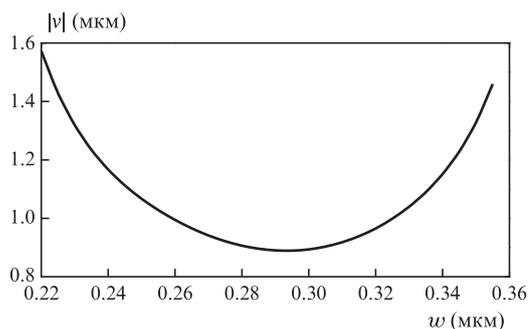


Рис.3. Параметр  $|v|$  в зависимости от ширины ступеньки решётки  $w$  при  $d = 0.49$  мкм,  $h = 0.46$  мкм.

ракции оптического пучка на решётке с шириной ступеньки  $w = 0.225$  мкм, параметр  $|v|$  для которой больше своего минимального значения на 60%. На рис.4 приведены спектр пропускания такой дифракционной решётки и результат дифференцирования гауссова пучка с указанными выше параметрами. Ноль в спектре пропускания рассматриваемой решётки соответствует центральной пространственной частоте падающего пучка  $k_{x0} = 2.5647$  мкм<sup>-1</sup> и углу падения  $\theta_u = 0.4493$  рад.

Из сравнения рис.2,б и 4,б видно, что рост параметра  $|v|$  влечёт за собой увеличение амплитуды результирующего пучка (в два раза в рассматриваемом случае) при одновременном ухудшении качества дифференцирования. Действительно, на рис.4,б становятся заметными отклонения формы получаемого пучка от модуля аналитически рассчитанной производной вне центральной области, где сосредоточена энергия пучка. В частности, среднеквадратичное отклонение амплитуды прошедшего пучка от аналитически рассчитанной производной увеличивается от 0.0007 (рис.2,  $w = 0.295$  мкм) до 0.002 (рис.4,  $w = 0.225$  мкм). Тем не менее решётка с изменёнными параметрами (рис.4) по-прежнему позволяет осуществить

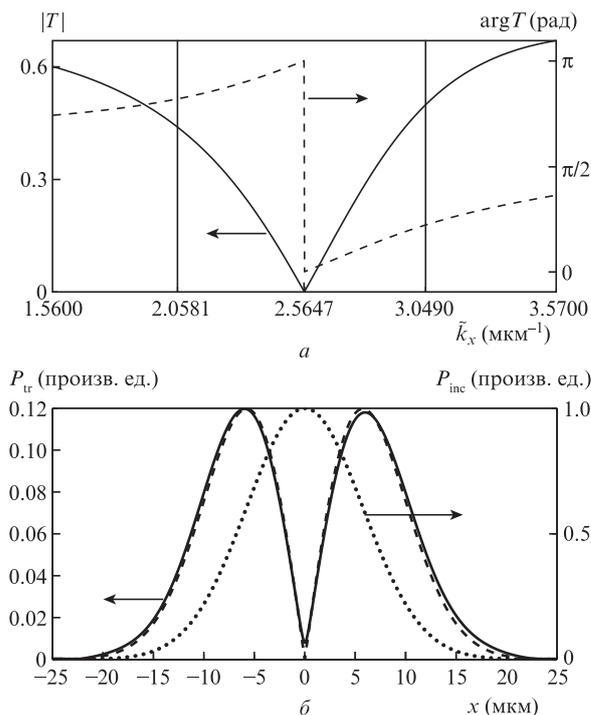


Рис.4. То же, что и на рис.2, но при  $w = 0.225$  мкм.

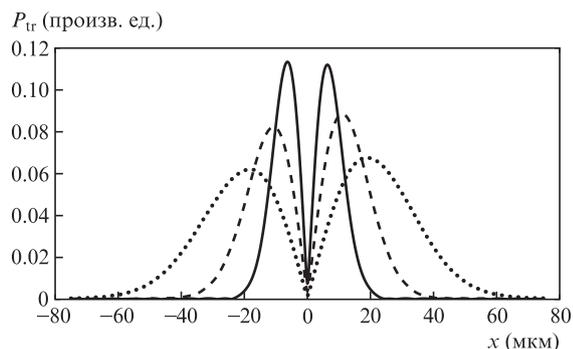


Рис.5. Амплитуда прошедшего пучка при  $z_{tr} = 0$  (сплошная кривая), 500 мкм (штриховая кривая) и 1000 мкм (пунктирная кривая).

дифференцирование сигнала с высокой точностью. Таким образом, в результате варьирования ширины ступеньки  $w$  дифракционной решётки удалось вдвое увеличить амплитуду результирующего сигнала при незначительном ухудшении качества дифференцирования. Данный результат демонстрирует широкие возможности по управлению рабочими характеристиками решётки-дифференциатора (соотношением между качеством дифференцирования и энергетической эффективностью) путём изменения геометрических параметров.

Отметим, что первая производная для гауссова пучка совпадает с модой Эрмита–Гаусса  $H_1(x/\sigma)$  ( $H_1 = 2\sqrt{2}x \times \exp(-x^2)$ ), которая не изменяет свою форму (с точностью до масштаба) при распространении в свободном пространстве [22]. На рис.5 показана амплитуда преобразованного пучка при различных значениях  $z_{tr}$ . При расчёте использовался прошедший пучок, амплитуда которого приведена на рис.4,б. Зависимости на рис.5 подтверждают, что прошедший пучок сохраняет свою форму с точностью до масштаба.

## 5. Заключение

В работе получен общий вид преобразования двумерного оптического пучка при дифракции на резонансной дифракционной решётке. Показана возможность осуществления операций пространственного дифференцирования и интегрирования падающего оптического пучка. В рамках электромагнитной теории рассчитаны параме-

тры дифракционной решётки, позволяющей выполнить пространственное дифференцирование в геометрии на пропускание. Продемонстрирована возможность управления соотношением между точностью дифференцирования и энергией прошедшего сигнала путём изменения геометрических параметров решётки-дифференциатора. В качестве важного практического применения дифференцирующей решётки рассмотрено преобразование двумерного гауссова пучка в моду Эрмита–Гаусса.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 13-07-00464 и 13-07-97001, а также стипендии президента РФ СП-1665.2012.5.

1. Kulishov M., Azaña J. *Opt. Express*, **15**, 6152 (2007).
2. Slavík R., Park Y., Kulishov M., Morandotti R., Azaña J. *Opt. Express*, **14**, 10699 (2006).
3. Kulishov M., Azaña J. *Opt. Lett.*, **30**, 2700 (2005).
4. Slavík R., Park Y., Kulishov M., Azaña J. *Opt. Lett.*, **34**, 3116 (2009).
5. Rivas L.M., Boudreau S., Park Y., Slavík R., LaRochelle S., Carballar A., Azaña J. *Opt. Lett.*, **34**, 1792 (2009).
6. Berger N.K., Levit B., Fischer B., Kulishov M., Plant D.V., Azaña J. *Opt. Express*, **15**, 371 (2007).
7. Li M., Janner D., Yao J., Pruneri V. *Opt. Express*, **17**, 19798 (2009).
8. Preciado M.A., Muriel M.A. *Opt. Lett.*, **33**, 2458 (2008).
9. Bykov D.A., Doskolovich L.L., Soifer V.A. *Opt. Lett.*, **36**, 3509 (2011).
10. Быков Д.А., Досколович Л.Л., Сойфер В.А. *ЖЭТФ*, **141**, 832 (2012).
11. Bykov D.A., Doskolovich L.L., Soifer V.A. *J. Opt. Soc. Am. A*, **29**, 1734 (2012).
12. Bykov D.A., Doskolovich L.L., Golovastikov N.V., Soifer V.A. *J. Opt.*, **15**, 105703 (2013).
13. Doskolovich L.L., Bykov D.A., Bezuз E.A., Soifer V.A. *Opt. Lett.*, **39**, 1278 (2014).
14. Popov E., Mashev L. *Optica Acta*, **33**, 607 (1986).
15. Nevière M., Popov E., Reinisch R. *J. Opt. Soc. Am. A*, **12**, 513 (1995).
16. Gippius N.A., Tikhodeev S.G., Ishihara T. *Phys. Rev. B*, **72**, 045138 (2005).
17. Шестопапов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А., Сиренко Ю.К. *Резонансное рассеяние волн. Т.1. Дифракционные решётки* (Киев: Наукова думка, 1986, с.232).
18. Tan S., Wu Z., Lei L., Hu S., Dong J., Zhang X. *Opt. Express*, **21**, 7008 (2013).
19. Liu Z.S., Tibuleac S., Shin D., Toung P.P., Magnusson R. *Opt. Lett.*, **23**, 1556 (1998).
20. Moharam M.G., Pommet D.A., Grann E.B., Gaylord T.K. *J. Opt. Soc. Am. A*, **12**, 1077 (1995).
21. Li L. *J. Opt. Soc. Am. A*, **14**, 2758 (1997).
22. Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г. *Современная оптика гауссовых пучков* (М.: Физматлит, 2010, с.184).