

# Фокусировка излучения диполя киральным слоем с отрицательным показателем преломления.

## 2. Тонкий по сравнению с длиной волны слой

Д.В.Гузатов, В.В.Климов

*В рамках квазистатического приближения найдены точные аналитические решения задачи о поле точечного электромагнитного источника в присутствии слоя из би-изотропного (кирального) метаматериала. При некоторых параметрах задачи полученное решение может быть представлено в виде набора нескольких точечных источников (электрических и магнитных), которые являются изображениями исходного источника. В случае расположения исходного источника вблизи слоя, эти источники-изображения становятся реальными источниками поля. Данное парадоксальное решение обобщается затем на случай с учетом эффектов запаздывания, что дает возможность физической интерпретации найденных решений как набора источников и «стоков» циркулярно поляризованных волн.*

**Ключевые слова:** киральный метаматериал, отрицательный показатель преломления, квазистатическое приближение, плазмоны.

### 1. Введение

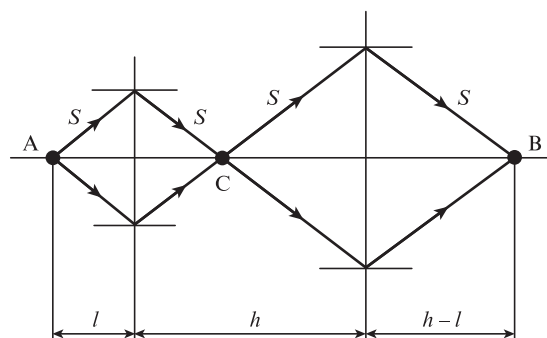
Расчет излучения точечного источника вблизи слоя вещества конечной толщины является классической задачей электродинамики, и история этого вопроса начинается с работ Зоммерфельда, опубликованных еще в начале 20-го века [1]. Несмотря на простоту геометрии, эта задача очень сложна и ей посвящено множество работ (см., напр., монографию [2]).

Ситуация стала еще интересней после работ Веселаго [3] и Пендри [4], в которых предполагалось, что если слой сделан из DNG (double negative) метаматериала, т. е. имеет одновременно отрицательные диэлектрическую и магнитную проницаемости, то он может стать интересным фокусирующим прибором – идеальной линзой (рис.1). Дальнейший анализ показал, однако, что картина, приведенная на рис.1, реализуется только для достаточно толстых слоев и не слишком малых потерь в них. В случае тонких слоев и малых потерь на поверхностях слоев происходит возбуждение поверхностных плазмонов и никакой сверхфокусировки не возникает, а вместо фокуса имеет место седловая точка (см., напр., [5]). Альтернатива использованию слоя с отрицательным показателем преломления была рассмотрена в работах [6–8], в которых вместо системы с одним источником было предложено использовать два симметричных источника и один «сток». В рамках такой постановки задачи поверхностные плазмоны не возбуждаются и можно говорить о ре-

альной сверхфокусировке. На основе аналитических решений [6–8] оказалось возможным создание нового типа оптических наноприборов – когерентных нанопоглотителей [9, 10].

Дальнейшим развитием приложений этой задачи является рассмотрение слоя, изготовленного из би-изотропного (кирального) метаматериала с отрицательным показателем преломления. Перспективность такой постановки задачи обусловлена тем, что киральность тесно связана с отрицательным показателем преломления [11] и поэтому можно ожидать появления многих интересных эффектов, в первую очередь связанных со сверхфокусировкой циркулярно поляризованных волн и созданием когерентных нанопоглотителей этих волн по аналогии с простыми когерентными нанопоглотителями [8, 9].

Первые результаты в данном направлении получены в нашей предыдущей работе [12], где была исследована возможность фокусировки излучения точечного источника киральным DNG слоем, толщина которого много больше длины волны излучения. Показано, что такой слой можно рассматривать как линзу, которая по-разному фокусирует право- и левополяризованные вол-



Д.В.Гузатов. Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Белоруссия, 230023 Гродно, ул. Ожешко, 22; e-mail: dm\_guzatov@mail.ru

В.В.Климов. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; e-mail: vklim@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 16 мая 2014 г., после доработки – 19 сентября 2014 г.

ны и обладает большей гибкостью в манипулировании фокусным расстоянием по сравнению с обычной линзой Весселага [3]. Однако рассмотренная в [12] фокусирующая система, несмотря на отрицательный показатель преломления, не имела сверхфокусирующих свойств, т. е. размер фокусного пятна оказался дифракционно-ограниченным. Это связано с тем, что толщина фокусирующего слоя существенно превышала длину волны излучения, а также с достаточно большим поглощением в слое. В настоящей работе (которая является непосредственным продолжением [12]) мы рассмотрим противоположный случай, когда толщина слоя много меньше длины волны излучения, причем поглощение в нем мало или совсем отсутствует, а источник может быть приближен к слою на расстояние, меньшее толщины последнего. Этот случай интересен с двух точек зрения. С одной стороны, такого рода слои (нанослой) могут быть интегрированы в перспективные оптические наноустройства, а с другой – физика оптических явлений в них существенно иная, чем в толстых по сравнению с длиной волны слоях, и является в некотором смысле парадоксальной (см. далее).

Общее решение задачи об излучении точечного источника вблизи кирального слоя с произвольными параметрами было найдено в [12], однако оно весьма громоздко и его анализ затруднителен. Поэтому в настоящей работе рассмотрение сначала проводится в рамках квазистатического приближения, когда можно пренебречь эффектами запаздывания. В случае источника, расположенного на расстоянии менее длины волны от нанослоя, такое приближение вполне законно, а найденное аналитическое решение позволяет глубже понять физику происходящих явлений.

Настоящая статья имеет следующую структуру. В разд.2 получено общее квазистатическое решение задачи о суммарном поле электрического и магнитного диполей (киральный диполь) вблизи кирального слоя. В разд.3 рассмотрен случай кирального DNG слоя без потерь (т.е. мнимые части диэлектрической и магнитной проницаемостей в слое точно равны нулю) и показано, что при этом происходит радикальное изменение решения по сравнению со слоем с потерями. В разд.4 парадоксальное решение, найденное в разд.3, обобщается с учетом эффектов запаздывания. Это обобщение позволяет понять физический смысл полученного решения: киральный слой с отрицательным показателем преломления не является идеальной линзой для циркулярно поляризованных волн (в смысле идеальной линзы Пендри–Весселага), но позволяет сфокусировать излучение двух симметрично расположенных циркулярно поляризованных точечных источников в область (сток), сколь угодно малого размера.

## 2. Точечный источник вблизи кирального слоя с потерями (квазистатическое приближение)

Рассмотрим источник с электрическим и магнитным дипольными моментами  $\mathbf{d}_0$  и  $\mathbf{m}_0$  соответственно (рис.2), расположенный в точке  $z_0$  ( $z_0 > 0$ ) на декартовой оси  $z$  в полубесконечной среде 1 (вакуум,  $\epsilon_1 = \mu_1 = 1$ ). Тонкий по сравнению с длиной волны киральный слой 2 толщиной  $h$  из метаматериала 2 находится в области  $-h < z < 0$ . Диэлектрическую и магнитную проницаемости кирального материала обозначим  $\epsilon_2$  и  $\mu_2$  соответственно, а параметр киральности –  $\chi_2$ .

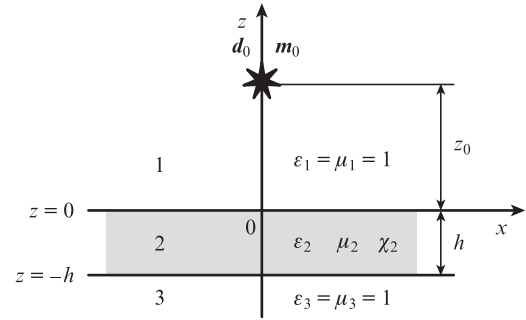


Рис.2. Геометрия задачи о дипольном источнике вблизи тонкого кирального слоя.

Как и в нашей предыдущей работе [12], рассмотрим слой из кирального вещества, описываемого материальными уравнениями в форме Друде–Борна–Федорова [13–15]

$$k_0 \mathbf{D}_2 = \epsilon_2 (k_0 \mathbf{E}_2 + \chi_2 \text{rot} \mathbf{E}_2), \quad k_0 \mathbf{B}_2 = \mu_2 (k_0 \mathbf{H}_2 + \chi_2 \text{rot} \mathbf{H}_2), \quad (1)$$

где  $\mathbf{D}_2, \mathbf{B}_2$  – индукции, а  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  – напряженности электрического и магнитного полей соответственно;  $k_0 = \omega/c$  – волновое число в вакууме. Множитель  $\exp(-i\omega t)$ , определяющий зависимость полей от времени, опущен. За киральным слоем расположена полубесконечная среда 3 (вакуум,  $\epsilon_3 = \mu_3 = 1$ ). Заметим, что случай сред 1 и 3 с другими значениями диэлектрических и магнитных проницаемостей может быть рассмотрен аналогично.

Для описания полей вблизи тонкого ( $k_0 h \ll 1$ ) кирального слоя воспользуемся квазистатическим приближением. Выражения для электрического и магнитного полей источника могут быть записаны с помощью потенциалов следующим образом ( $z > 0$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= -\nabla \phi_0^E, & \phi_0^E &= -(d_0 \nabla) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \\ \mathbf{H}_0 &= -\nabla \phi_0^H, & \phi_0^H &= -(m_0 \nabla) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\nabla$  – оператор градиента;  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_0$  – радиусы-векторы точки наблюдения и положения источника соответственно.

Для удобства дальнейших вычислений запишем выражения для потенциалов  $\phi_0^E$  и  $\phi_0^H$  в интегральном виде (см., напр., [16]):

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \phi_0^E \\ \phi_0^H \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} d_{0x} \\ m_{0x} \end{Bmatrix} \cos \varphi + \begin{Bmatrix} d_{0y} \\ m_{0y} \end{Bmatrix} \sin \varphi \int_0^\infty dq q J_1(q\rho) \\ &\times \exp(-q|z - z_0|) \pm \begin{Bmatrix} d_{0z} \\ m_{0z} \end{Bmatrix} \int_0^\infty dq q J_0(q\rho) \exp(-q|z - z_0|), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $0 \leq \rho < \infty$  и  $0 \leq \varphi < 2\pi$  – полярные координаты;  $J_n(q\rho)$  – функция Бесселя [17]; знак «+» перед последним слагаемым в (3) соответствует случаю  $z > z_0$ , а знак «-» – случаю  $z < z_0$ .

Выражения для рассеянных электрических и магнитных полей также запишем с помощью потенциалов. Для напряженностей полей  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  в полупространстве 1 ( $z > 0$ ) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\nabla \phi_1^E, \quad \mathbf{H}_1 = -\nabla \phi_1^H, \quad \begin{Bmatrix} \phi_1^E \\ \phi_1^H \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^1 \int_0^\infty dq q J_n(q\rho) \\ &\times \left[ \begin{Bmatrix} A_{nq1}^E \\ A_{nq1}^H \end{Bmatrix} \cos(n\varphi) + \begin{Bmatrix} B_{nq1}^E \\ B_{nq1}^H \end{Bmatrix} \sin(n\varphi) \right] \exp(-qz). \end{aligned} \quad (4)$$

Для напряженностей рассеянных полей в киральном слое  $E_2, H_2$  ( $-h < z < 0$ ) можно записать выражения

$$E_2 = -\nabla\phi_2^E, H_2 = -\nabla\phi_2^H, \left\{ \begin{matrix} \phi_2^E \\ \phi_2^H \end{matrix} \right\} = \sum_{n=0}^1 \int_0^\infty dq q J_n(q\rho) \times \left\{ \left[ \begin{matrix} A_{nq2}^E \\ A_{nq2}^H \end{matrix} \right] \cos(n\rho) + \left[ \begin{matrix} B_{nq2}^E \\ B_{nq2}^H \end{matrix} \right] \sin(n\rho) \right\} \exp(-qz) + \left\{ \left[ \begin{matrix} C_{nq2}^E \\ C_{nq2}^H \end{matrix} \right] \cos(n\rho) + \left[ \begin{matrix} D_{nq2}^E \\ D_{nq2}^H \end{matrix} \right] \sin(n\rho) \right\} \exp(qz). \quad (5)$$

Наконец, для напряженностей полей  $E_3, H_3$  в полупространстве 3 ( $z < -h$ ) имеем

$$E_3 = -\nabla\phi_3^E, H_3 = -\nabla\phi_3^H, \left\{ \begin{matrix} \phi_3^E \\ \phi_3^H \end{matrix} \right\} = \sum_{n=0}^1 \int_0^\infty dq q J_n(q\rho) \times \left\{ \left[ \begin{matrix} C_{nq3}^E \\ C_{nq3}^H \end{matrix} \right] \cos(n\rho) + \left[ \begin{matrix} D_{nq3}^E \\ D_{nq3}^H \end{matrix} \right] \sin(n\rho) \right\} \exp(qz). \quad (6)$$

Для нахождения коэффициентов в (4)–(6) необходимо воспользоваться условиями непрерывности потенциалов на поверхностях раздела сред и непрерывностью нормальных компонент индукций. Для определения индукций в слое подставим уравнения Максвелла в (1) и получим

$$D_2 = \frac{\varepsilon_2(E_2 + i\chi_2\mu_2 H_2)}{1 - \chi_2^2\varepsilon_2\mu_2}, B_2 = \frac{\mu_2(H_2 - i\chi_2\varepsilon_2 E_2)}{1 - \chi_2^2\varepsilon_2\mu_2}. \quad (7)$$

Из (7) следует, что внутри кирального слоя электрические и магнитные поля связаны между собой. В случае некиральной среды ( $\chi_2 = 0$ ) из (7) получаются обычные выражения для индукций.

Соотношения (7) позволяют записать граничные условия. Подставив в них потенциалы из (3)–(6), найдем искомые коэффициенты. Выражения для коэффициентов вследствие их громоздкости приведены в Приложении.

В нашей предыдущей работе [12] было показано, что условиями хорошей фокусировки излучения диполя толстым по сравнению с длиной волны слоем из кирального метаматериала с отрицательным показателем преломления являются следующие:  $z_0 < h, \varepsilon_2 = \mu_2 = -2 + i\delta$  ( $\delta \rightarrow 0$ ) и  $\chi_2 = \pm 1/2$ . При выполнении данных условий в слое преимущественно распространяются право- или левополяризованные волны (в зависимости от знака  $\chi_2$ ), для которых волновое число близко к  $-k_0$ . Тонкий киральный DNG слой мы рассмотрим в аналогичных условиях.

На рис.3 показаны зависимости логарифма модуля электрического поля (см. формулы (2), (4)–(6)) от  $z/z_0$  ( $x = y = 0$ ) для тонкого слоя из кирального метаматериала с отрицательным показателем преломления. Хорошо видно (рис.3,а), что в случае  $z_0 < h$  наибольшие по модулю значения индуцированного поля локализованы на поверхностях раздела сред, а не в точках пересечения лучей (см. рис.1), и фокусировка в строгом смысле не возникает совсем. Аналогичный результат получается из полного (с учетом запаздывания) решения задачи о диполе вблизи кирального DNG слоя [12]. Видно также, что при стремлении потерь в слое к нулю ( $\delta \rightarrow 0$ ) индуцированное поле неограниченно возрастает. Фактически происходит возбуждение плазмонных волн неограниченной амплитуды на поверхностях слоя.

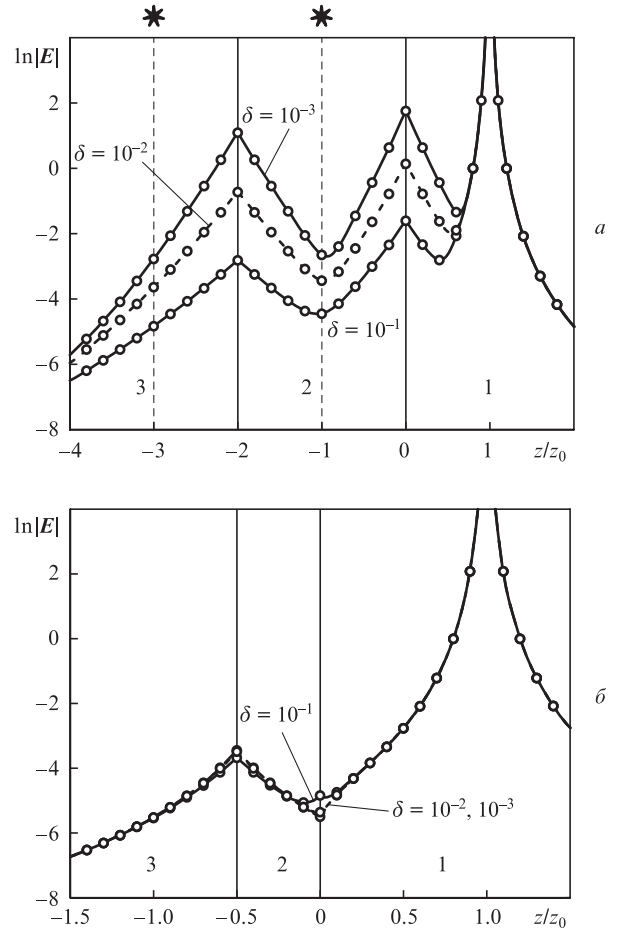


Рис.3. Логарифм модуля полного электрического поля (см. формулы (2), (4)–(6)) ( $E$  – в отн. ед.) как функция  $z/z_0$  ( $x = y = 0$ ) для тонкого кирального DNG слоя с  $\varepsilon_2 = \mu_2 = -2 + i\delta$  и  $\chi_2 = +1/2$  при различных  $\delta$  в случае диполя с  $d_0 \parallel x$  и  $m_0 = 0$ . Точки – соответствующие решения, полученные с учетом запаздывания [12] при  $k_0 z_0 = 0.1$ . Толщина слоя  $h = 2z_0$  (а) и  $z_0/2$  (б). Здесь и на рис.4–6 цифры 1, 2, 3 обозначают среды в соответствии с рис.2. Звездочки указывают положения фокусов согласно рис.1.

При  $z_0 > h$  максимум модуля индуцированного электрического поля локализован на дальней от источника поверхности слоя, между средами 2 и 3 (рис.3,б). Однако в этом случае, при стремлении потерь в слое к нулю, существенного изменения модуля поля не происходит. Заметим, что при этом фокусировка и не ожидается.

### 3. Точечный источник вблизи кирального слоя без потерь (квазистатическое приближение)

Как видно из предыдущего раздела, в случае  $z_0 < h$  при стремлении потерь в киральном DNG слое к нулю решение стремится к бесконечности во всем пространстве, т.е. не существует. Это связано с резонансным возбуждением поверхностных плазмонных волн.

Однако при этом возникает вопрос: возможно ли осмысленное решение в этой области параметров?

В случае DNG слоя без потерь ( $\delta = 0$ ) формальные выражения для потенциалов, полученных из соотношения (3), имеют вид (далее верхний знак соответствует  $\chi_2 = +1/2$ , а нижний  $-\chi_2 = -1/2$ )

$$\begin{aligned}
 -\phi_1^E = \pm i\phi_1^H = \frac{1}{2}(d_{0z} \mp im_{0z}) \int_0^\infty dq q J_0(q\rho) \exp[-q(z+z_0)] \\
 - \frac{1}{2}[(d_{0x} \mp im_{0x}) \cos \varphi + (d_{0y} \mp im_{0y}) \sin \varphi] \\
 \times \int_0^\infty dq q J_1(q\rho) \exp[-q(z+z_0)] \quad (z > 0),
 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_2^E = \pm i\phi_2^H = -\frac{1}{2}(d_{0z} \pm im_{0z}) \int_0^\infty dq q J_0(q\rho) \exp[-q(z+z_0)] \\
 + \frac{1}{2}[(d_{0x} \pm im_{0x}) \cos \varphi + (d_{0y} \pm im_{0y}) \sin \varphi] \\
 \times \int_0^\infty dq q J_1(q\rho) \exp[-q(z+z_0)] \quad (-h < z < 0),
 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_3^E = \pm i\phi_3^H = -\frac{1}{2}(d_{0z} \pm im_{0z}) \int_0^\infty dq q J_0(q\rho) \exp[q(z-z_0+2h)] \\
 + \frac{1}{2}[(d_{0x} \pm im_{0x}) \cos \varphi + (d_{0y} \pm im_{0y}) \sin \varphi] \\
 \times \int_0^\infty dq q J_1(q\rho) \exp[q(z-z_0+2h)] \quad (z < -h).
 \end{aligned} \quad (10)$$

Интегралы в (8)–(10) сходятся лишь при определенных значениях  $z$ . В случае  $z_0 < h$  в области  $z_0 < |z| < h$  решение (9), а в области  $h < |z| < 2h - z_0$  решение (10) неограниченно возрастают (плазмонные волны). В то же время в случае  $z_0 > h$  решения (9), (10) существуют при всех  $z$  и поверхностные плазмонные волны не возбуждаются.

Для получения ограниченного решения в слое из кирального метаматериала без потерь ( $\delta = 0$ ) в случае  $z_0 < h$  воспользуемся методом аналитического продолжения [6–8], для чего проинтегрируем формальные решения (8)–(10) в областях сходимости, а затем аналитически продолжим полученные выражения в область  $z_0 < h$ , где интегралы расходились. В результате для потенциалов во всем пространстве будут справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 -\phi_1^E = \pm i\phi_1^H = -\frac{1}{2}(\mathbf{d}_0 \pm i\mathbf{m}_0) \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_C|} \quad (z > 0), \\
 \phi_2^E = \pm i\phi_2^H = -\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{d}}_0 \pm i\tilde{\mathbf{m}}_0) \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_C|} \quad (-h < z < 0), \\
 \phi_3^E = \pm i\phi_3^H = -\frac{1}{2}(\mathbf{d}_0 \pm i\mathbf{m}_0) \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_B|} \quad (z < -h),
 \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mathbf{r}_C = -z_0\mathbf{e}_z$ ;  $\mathbf{r}_B = -(2h - z_0)\mathbf{e}_z$ ;  $\tilde{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{d}_0 - 2d_{0z}\mathbf{e}_z$ ;  $\tilde{\mathbf{m}}_0 = \mathbf{m}_0 - 2m_{0z}\mathbf{e}_z$ ;  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . Из (11) следует, что для существования ограниченного решения в случае  $z_0 < h$  для источника с электрическим и магнитным дипольными моментами  $\mathbf{d}_A = \mathbf{d}_0$  и  $\mathbf{m}_A = \mathbf{m}_0$ , расположенного в точке А с координатами  $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_0$  вблизи слоя из метаматериала без потерь, необходимо в точку С с координатами  $\mathbf{r}_C$  поместить источник с электрическим и магнитным дипольными моментами  $\mathbf{d}_C = (\tilde{\mathbf{d}}_0 \pm i\tilde{\mathbf{m}}_0)/2$  и  $\mathbf{m}_C = (\tilde{\mathbf{m}}_0 \mp i\tilde{\mathbf{d}}_0)/2$ , а за слоем в точку В с координатами  $\mathbf{r}_B$  – электрический и магнитный диполи с моментами  $\mathbf{d}_B = (\mathbf{d}_0 \pm i\mathbf{m}_0)/2$  и  $\mathbf{m}_B = (\mathbf{m}_0 \mp i\mathbf{d}_0)/2$ . Заметим, что точки А, В и С соответствуют точкам пересечения лучей в геометрической модели

идеальной линзы (см. рис.1). Найденные выражения (11) удовлетворяют граничным условиям как при  $z_0 > h$ , так и при  $z_0 < h$ .

Важно отметить, что в решении (11) нет сингулярностей при  $z_0 > h$ , в то время как при  $z_0 < h$  в слое и за ним решение (11) уже содержит реальные сингулярности. Важно также, что решение (11) при  $z_0 < h$  с тремя сингулярностями является устойчивым и добавление малых потерь в систему уже существенно не влияет на него. С физической точки зрения система источников (11) обладает такой симметрией, что плазмонные волны на поверхностях слоя не возбуждаются!

Электрическое поле для найденного решения (11) показано на рис.4. Из рис.3 и 4 видно, что при  $z_0 > h$  (рис.4, б) решение (11) практически не отличается от обычного общего решения (рис.3, б). Однако при  $z_0 < h$  решения существенно различаются (ср. рис.3, а и 4, а). Обычное решение в пределе  $\delta = 0$  имеет сингулярности на границах слоя (бегущие плазмоны неограниченной амплитуды), в то время как решение (11) имеет сингулярности лишь в точках, соответствующих пересечению лучей на рис.1 (звездочки на рис.4, а). Фактически в пределе  $\delta = 0$  происходит потеря единственности (бифуркация) решения.

На рис.5 показаны электрические потенциалы для систем с малыми потерями и без потерь при расположении источника на разных расстояниях от кирального DNG слоя.

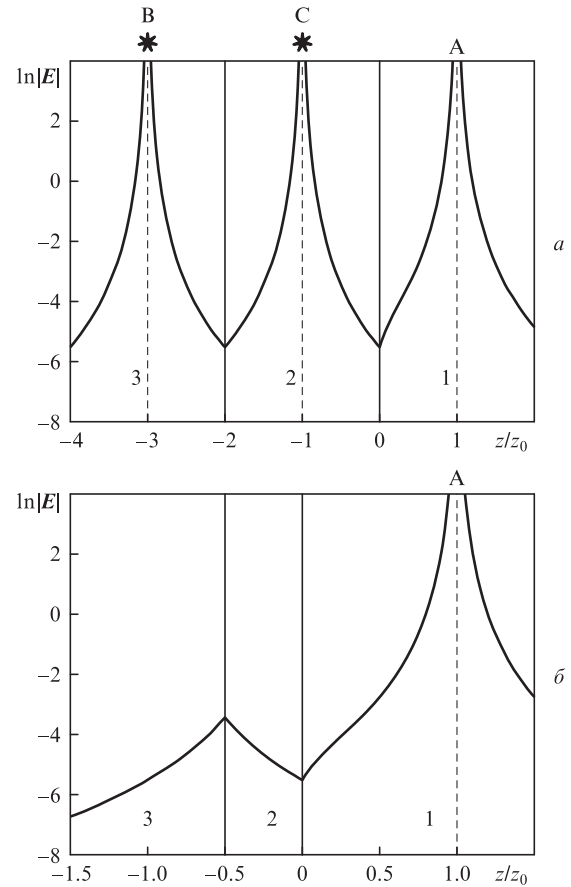


Рис.4. Логарифм модуля полного электрического поля (см. формулы (2) и (11)) ( $E$  – в отн. ед.) как функция  $z/z_0$  ( $x = y = 0$ ) для тонкого кирального DNG слоя без потерь с  $\varepsilon_2 = \mu_2 = -2$  и  $\chi_2 = +1/2$  в случае диполя с  $\mathbf{d}_0 \parallel x$  и  $\mathbf{m}_0 = 0$ . Толщина слоя  $h = 2z_0$  (а) и  $z_0/2$  (б). Точки А, В и С соответствуют положениям основного (А) и дополнительных (В и С) источников излучения. Звездочки указывают положения фокусов согласно рис.1.



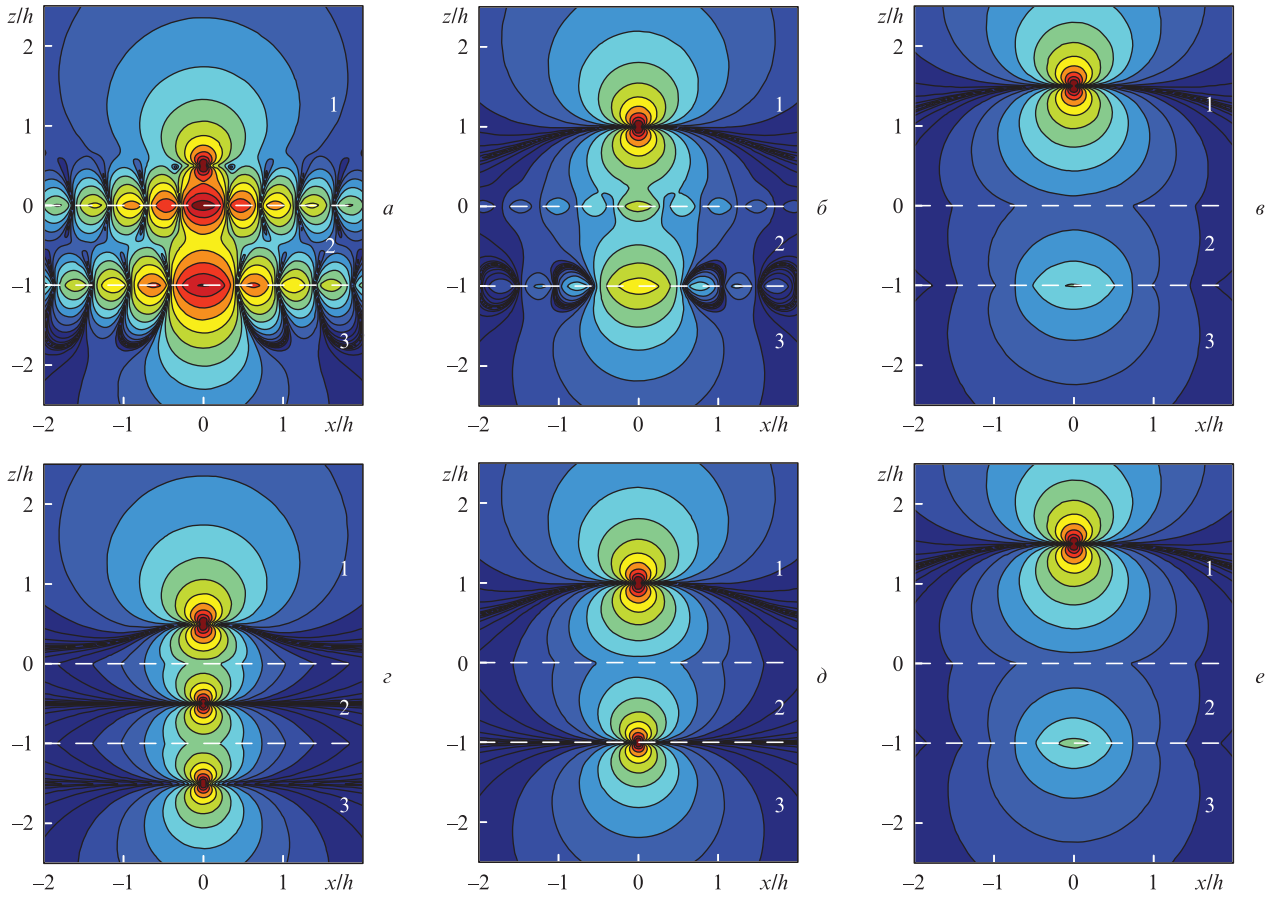


Рис.5. Логарифм модуля полного электрического потенциала ( $\phi^E$  – в отн. ед.) в плоскости  $y = 0$  для тонкого кирального DNG слоя с  $\epsilon_2 = \mu_2 = -2 + i\delta$  и  $\chi_2 = +1/2$  в случае диполя с  $\mathbf{d}_0 \parallel z$  и  $\mathbf{m}_0 = 0$  для слоев с небольшими потерями ( $\delta = 10^{-2}$ , а-в) и без потерь ( $\delta = 0$ , г-е) при расположении источника на расстоянии  $z_0 = h/2$  (а, г),  $h$  (б, д) и  $3h/2$  (в, е). Светлые области соответствуют большим значениям  $|\phi^E|$ , а темные – малым. Цветной вариант рис.5 помещен на сайте нашего журнала <http://www.quantum-electron.ru>.

В обычной идеальной линзе Веселаго отраженного поля нет. Как следует из (11), для подавления отраженного от кирального DNG слоя поля необходимо положить  $\mathbf{d}_0 = \pm i\mathbf{m}_0$ . В этом частном случае получим

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_A &= \mathbf{d}_0, \quad \mathbf{m}_A = \mp i\mathbf{d}_0, \\ \mathbf{d}_C &= \tilde{\mathbf{d}}_0, \quad \mathbf{m}_C = \mp i\mathbf{d}_C, \\ \mathbf{d}_B &= \mathbf{d}_0, \quad \mathbf{m}_B = \mp i\mathbf{d}_B. \end{aligned} \tag{12}$$

Если же в (11) положить  $\mathbf{d}_0 = \mp i\mathbf{m}_0$ , то поля в средах 2 и 3 будут равны нулю. Тогда рассматриваемый тонкий киральный DNG слой без потерь будет являться «зеркалом» для излучения источника. Этот интересный эффект будет рассмотрен в отдельной публикации более подробно.

Таким образом, в настоящем разделе с помощью метода аналитического продолжения найдено решение, положения сингулярностей в котором совпадают с точками пересечения лучей на рис.1. Для прояснения физического смысла полученного решения надо рассмотреть задачу с учетом запаздывания, что и будет сделано в следующем разделе.

#### 4. Учет эффектов запаздывания

Удивительной особенностью найденного в разд.3 квазистатического решения является то, что оно допускает простое, но точное обобщение на случай с запаздывани-

ем, для чего достаточно электростатические функции Грина для решений вне слоя заменить на запаздывающие функции Грина ( $J = A, B$ ):

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \rightarrow \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}. \tag{13}$$

Для решения внутри слоя необходимо сделать аналогичное преобразование, но при этом надо учесть, что в киральном DNG слое без потерь в зависимости от знака  $\chi_2 = \pm 1/2$  ( $\epsilon_2 = \mu_2 = -2$ ) могут распространяться либо левополяризованные (L), либо правополяризованные (R) волны [12]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|} &\rightarrow \frac{\exp(-ik_L|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|}, \\ k_L &= \frac{k_0\sqrt{\epsilon_2\mu_2}}{1 - \chi_2\sqrt{\epsilon_2\mu_2}} \rightarrow -k_0 \quad (\chi_2 = +1/2), \\ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|} &\rightarrow \frac{\exp(-ik_R|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|}, \\ k_R &= \frac{k_0\sqrt{\epsilon_2\mu_2}}{1 + \chi_2\sqrt{\epsilon_2\mu_2}} \rightarrow -k_0 \quad (\chi_2 = -1/2). \end{aligned} \tag{14}$$

В результате явные выражения для напряженностей электрических и магнитных полей в случае диполей (12), когда отсутствует отраженное поле, принимают вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_A &= [(d_A \nabla) \nabla + k_0^2 d_A] \frac{\exp(ik_0 |r - r_A|)}{|r - r_A|} \\
 &+ ik_0 \text{rot} \left[ \frac{m_A \exp(ik_0 |r - r_A|)}{|r - r_A|} \right], \quad \mathbf{H}_A = -\frac{i}{k_0} \text{rot} \mathbf{E}_A \quad (z > 0), \\
 \mathbf{E}_C &= [(d_C \nabla) \nabla + k_0^2 d_C] \frac{\exp(ik_0 |r - r_C|)}{|r - r_C|} \\
 &- ik_0 \text{rot} \left[ \frac{m_C \exp(ik_0 |r - r_C|)}{|r - r_C|} \right], \quad \mathbf{H}_C = \frac{i}{k_0} \text{rot} \mathbf{E}_C \quad (-h < z < 0), \\
 \mathbf{E}_B &= [(d_B \nabla) \nabla + k_0^2 d_B] \frac{\exp(ik_0 |r - r_B|)}{|r - r_B|} \\
 &+ ik_0 \text{rot} \left[ \frac{m_B \exp(ik_0 |r - r_B|)}{|r - r_B|} \right], \quad \mathbf{H}_B = -\frac{i}{k_0} \text{rot} \mathbf{E}_B \quad (z < -h).
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Как следует из (15), источники излучения (12) создают циркулярно поляризованные волны, а киральный слой имеет эффективный показатель преломления, равный  $-1$ . Заметим, что найденные выражения (15) удовлетворяют граничным условиям для всех  $z_0$ .

На рис.6 показан поток энергии (вектор Пойнтинга)  $\mathbf{S} = [c/(8\pi)] \text{Re}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*]$  для решения (15) в плоскости  $y = 0$ . Видно, что потоки энергии при расположении основного источ-

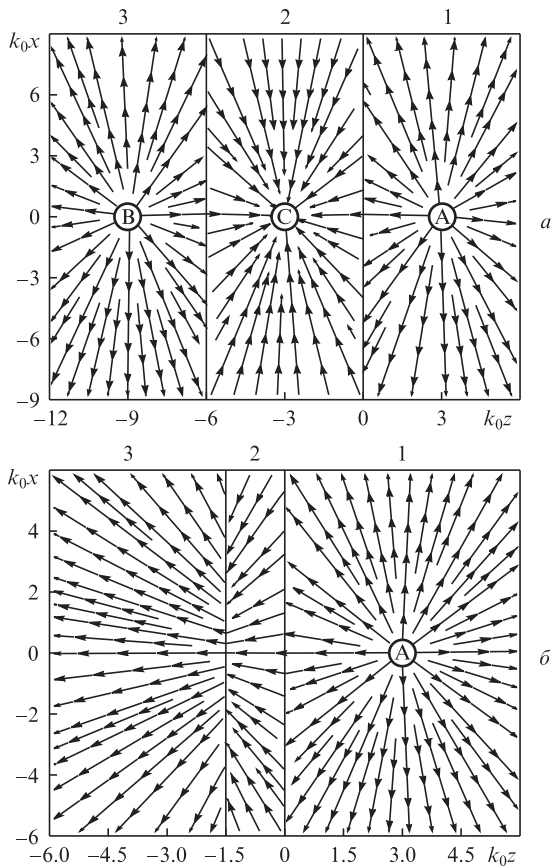


Рис.6. Поток энергии в плоскости  $y = 0$  для кирального DNG слоя без потерь с  $\epsilon_2 = \mu_2 = -2$  и  $\chi_2 = +1/2$  (см. формулу (15)). Толщина слоя  $h = 2z_0$  (а) и  $z_0/2$  (б). Источник с  $d_A \parallel y$  расположен в точке  $k_0z_0 = 3$ . Точки А, В и С соответствуют положениям основного (А) и дополнительных (В и С) источников излучения.

ника в области  $z_0 < h$  направлены к дополнительному источнику внутри слоя (стоку), а не за слой, как это происходило бы в идеальной линзе (ср. рис.1 и 6,а). При перемещении основного источника в область  $z_0 > h$  сингулярности в решении для полей в слое и за слоем не возникают, а поток энергии в этом случае направлен за слой (рис.6,б).

Аналогичное поведение вектора Пойнтинга имеет место и при рассмотрении задачи об излучении основного и дополнительных электрических диполей вблизи слоя с показателем преломления  $-1$ , исследованной в работах [6–8]. Полученное там решение может быть основой для создания уникальных устройств – идеальных когерентных нанопоглотителей [9, 10] – или для резонансного возбуждения атомов с высокой вероятностью. Найденное в настоящей работе решение (15) является более сложным, т.к. требует наличия киральных источников излучения с равными по модулю электрическим и магнитным дипольными моментами. Тем не менее можно думать о создании на основе этого решения когерентного идеального поглотителя циркулярно поляризованных волн и элементов квантовых компьютеров.

## 5. Заключение

Таким образом, в настоящей работе как в квазистатическом приближении, так и в рамках полной системы уравнений Максвелла получены и исследованы аналитические выражения для электромагнитных полей кирального дипольного (электрического и магнитного) источника, расположенного вблизи тонкого слоя из кирального метаматериала с отрицательным показателем преломления.

Показано, что для дипольного кирального источника, находящегося на расстоянии, превышающем толщину слоя, решение может быть представлено в виде двух дополнительных (мнимых) киральных точечных источников. При расположении исходного источника на расстоянии от слоя, меньшем его толщины, для получения ограниченного решения мнимые источники должны быть заменены реальными. Полученное решение обобщено на случай с учетом эффектов запаздывания для слоя произвольной по сравнению с длиной волны толщины.

Отметим, что решение было найдено для специальных значений диэлектрической и магнитной проницаемостей и параметра киральности и не является единственно возможным. Исследование всего класса новых решений для слоя из кирального метаматериала будет приведено в отдельной публикации.

Полученные в настоящей работе результаты могут использоваться для расчета рассеяния электромагнитного излучения дипольного источника слоем из тонкого кирального метаматериала, для интерпретации экспериментальных результатов, а также для разработки новых фокусирующих приборов на основе циркулярно поляризованных волн. Основной особенностью такого рода устройств будет либо поглощающая наночастица, либо даже одиночный атом, расположенные в месте предсказываемого нашим решением стока энергии (точка С на рис.6).

Авторы выражают благодарность Белорусскому республиканскому фонду фундаментальных исследований (грант №Ф12Р-006), РФФИ (грант №14-02-00290), фонду «Сколково» и Российскому квантовому центру за финансовую поддержку настоящей работы.

**Приложение. Явный вид коэффициентов в выражениях (4)–(6)**

Входящие в (4)–(6) коэффициенты могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} A_{nq1}^E \\ B_{nq1}^E \end{Bmatrix} &= -\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} A_{nq}^E \\ B_{nq}^E \end{Bmatrix} \sinh(2qh) \{2\mu_2(\varepsilon_2^2 - 1 + \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2) \\ &+ [\varepsilon_2^2 - \mu_2^2 + \varepsilon_2^2 \mu_2^2 - (1 - \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2)^2] \tanh(2qh)\} \frac{1}{\Delta} \\ &- i\chi_2 \varepsilon_2 \mu_2 \begin{Bmatrix} A_{nq}^H \\ B_{nq}^H \end{Bmatrix} \sinh(2qh) \\ &\times [\varepsilon_2 \mu_2 + 1 - \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2 + (\varepsilon_2 + \mu_2) \tanh(qh)] \frac{1}{\Delta}, \end{aligned} \quad (П1)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} A_{nq2}^E \\ B_{nq2}^E \end{Bmatrix} \exp(qh) &= \begin{Bmatrix} A_{nq}^E \\ B_{nq}^E \end{Bmatrix} \cosh(qh) \{2\mu_2(\varepsilon_2 - 1)(1 - \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2) \\ &+ [(\varepsilon_2 - 1 + \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2)(1 - \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2) + \mu_2^2(\varepsilon_2 - 1 - \chi_2^2 \varepsilon_2^2)] \tanh(qh)\} \frac{1}{\Delta} \\ &+ i\chi_2 \varepsilon_2 \mu_2 \begin{Bmatrix} A_{nq}^H \\ B_{nq}^H \end{Bmatrix} \cosh(qh) [2(1 - \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2) \\ &+ (\varepsilon_2 + \mu_2 - \varepsilon_2 \mu_2 + 1 - \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2) \tanh(qh)] \frac{1}{\Delta}, \end{aligned} \quad (П2)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} C_{nq2}^E \\ D_{nq2}^E \end{Bmatrix} \exp(-qh) &= \begin{Bmatrix} A_{nq}^E \\ B_{nq}^E \end{Bmatrix} \cosh(qh) \{2\mu_2(\varepsilon_2 + 1)(1 - \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2) \\ &+ [(\varepsilon_2 + 1 - \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2)(1 - \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2) + \mu_2^2(\varepsilon_2 + 1 + \chi_2^2 \varepsilon_2^2)] \tanh(qh)\} \frac{1}{\Delta} \\ &- i\chi_2 \varepsilon_2 \mu_2 \begin{Bmatrix} A_{nq}^H \\ B_{nq}^H \end{Bmatrix} \cosh(qh) [2(1 - \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2) \\ &+ (\varepsilon_2 + \mu_2 + \varepsilon_2 \mu_2 - 1 + \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2) \tanh(qh)] \frac{1}{\Delta}, \end{aligned} \quad (П3)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} C_{nq3}^E \\ D_{nq3}^E \end{Bmatrix} \exp(-qh) &= 2\varepsilon_2 \begin{Bmatrix} A_{nq}^E \\ B_{nq}^E \end{Bmatrix} \cosh(qh) \\ &\times [2\mu_2(1 - \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2) + (\mu_2^2 + 1 - \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2) \tanh(qh)] \frac{1}{\Delta} - \end{aligned}$$

$$- 2i\chi_2 \varepsilon_2 \mu_2 \begin{Bmatrix} A_{nq}^H \\ B_{nq}^H \end{Bmatrix} \sinh(qh) (\varepsilon_2 \mu_2 - 1 + \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2) \frac{1}{\Delta}, \quad (П4)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \cosh^2(qh) \{4\varepsilon_2 \mu_2 (1 - \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2) \\ &+ 2(\varepsilon_2 + \mu_2)(\varepsilon_2 \mu_2 + 1 - \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2) \tanh(qh) \\ &+ [(\varepsilon_2 + \mu_2)^2 + \varepsilon_2^2 \mu_2^2 \\ &- (2\varepsilon_2 \mu_2 - 1 + \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2)(1 - \chi_2^2 \varepsilon_2 \mu_2)] \tanh^2(qh)\}; \end{aligned} \quad (П5)$$

$$A_{nq}^E = (-\delta_{n0} d_{0z} + \delta_{n1} d_{0x}) \exp(-qz_0); \quad B_{nq}^E = \delta_{n1} d_{0y} \exp(-qz_0); \quad (П6)$$

$$A_{nq}^H = (-\delta_{n0} m_{0z} + \delta_{n1} m_{0x}) \exp(-qz_0); \quad B_{nq}^H = \delta_{n1} m_{0y} \exp(-qz_0);$$

$\delta_{np}$  – дельта-символ Кронекера, равный 1 при  $n = p$  и нулю в других случаях.

Выражения для других коэффициентов в (4)–(6) можно получить из (П1)–(П4) с помощью перестановки индексов  $E \leftrightarrow H$ , перестановки диэлектрической и магнитной проницаемостей  $\varepsilon_2 \leftrightarrow \mu_2$  и замены  $\chi_2 \rightarrow -\chi_2$ .

1. Sommerfeld A. *Ann. Phys.*, **28**, 665 (1909).
2. Banos A. *Dipole Radiation in the Presence of a Conducting Half-Space* (Oxford: Pergamon Press, 1966).
3. Веселаго В.Г. *УФН*, **92**, 517 (1967).
4. Pendry J.B. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 3966 (2000).
5. Merlin R. *Appl. Phys. Lett.*, **84**, 1290 (2004).
6. Климов В.В. *Письма в ЖЭТФ*, **89** (5), 270 (2009).
7. Klimov V.V. <http://demonstrations.wolfram.com/EnergyFlowInANegativeIndexMaterial/>.
8. Klimov V., Baudon J., Ducloy M. *Europhys. Lett.*, **94**, 20006 (2011).
9. Klimov V., Sun S., Guo G.-Y. *Opt. Express*, **20**, 13071 (2012).
10. Guo G.-Y., Klimov V., Sun S., Zheng W.-J. *Opt. Express*, **21**, 11338 (2013).
11. Pendry J.B. *Science*, **306**, 1353 (2004).
12. Гузатов Д.В., Климов В.В. *Квантовая электроника*, **44**, 873 (2014).
13. Drude P. *Lehrbuch der Optik* (Leipzig: Verlag von S.Hirzel, 1906).
14. Борн М. *Оптика: учебник электромагнитной теории света* (Харьков–Киев: ГНТИ Украины, 1937).
15. Бокуть Б.В., Сердюков А.Н., Федоров Ф.И. *Кристаллография*, **15**, 1002 (1970).
16. Морс Ф., Фешбах Г. *Методы теоретической физики. Т.2* (М.: ИЛ, 1960).
17. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям* (М.: Наука, 1979).