НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

PACS 33.20.Fb; 34.80.Uv; 42.65.Dr

Комбинационное рассеяние фотона с удвоением частоты на каналированном позитроне

Н.П.Калашников, О.Н.Крохин

Проанализирована возможность появления антистоксовых линий в спектре комбинационного рассеяния фотона на «квазисвязанной» заряженной частице в режиме плоскостного (осевого) каналирования. Показано, что возможно появление излучения на частоте, которая представляет собой комбинацию частоты падающего фотона ω_0 и частоты переходов ω_i при поперечном квантованном движении каналированной частицы: $\omega = \omega_0 \pm \omega_i$.

Ключевые слова: *рамановское рассеяние, каналирование.*

1. Введение

Рассмотрим движение в монокристалле заряженной частицы (позитрона) с энергией E и импульсом $\boldsymbol{p}$, направленным под малым углом θ к кристаллографической плоскости. Если этот угол меньше так называемого угла Линдхарда $\theta_{\rm L}$ [1], то частица в монокристалле движется в режиме каналирования. В продольном направлении потенциал, ответственный за плоскостное каналирование, постоянен (непрерывный потенциал плоскости характеризуется отсутствием зависимости от продольной координаты [2]), поэтому продольный импульс каналированной частицы сохраняется:

$$E_1 + \hbar\omega_1 = E_2 + \hbar\omega_2, \qquad (1)$$

$$p_{1z} + \hbar k_{1z} = p_{2z} + \hbar k_{2z} \ \ (\omega_{1,2} = ck_{1,2}). \qquad (2)$$

Поперечная составляющая импульса положительно заряженной частицы при таком движении в потенциале кристаллографических плоскостей квантуется: $p_n = p\theta_n$ (рис.1) [2, 3].

Следует отметить, что квантованная энергия каналированной частицы в сопутствующей системе координат (ССК), движущейся со скоростью $V = E_1/p_1$, зависит от энергии каналированной частицы в силу того, что потенциал $U_{\rm pl}$, создаваемый кристаллографическими плоскостями, зависит от энергии частицы: $U_{\rm pl} = \gamma U(x)$, где $U(x)$ – потенциал плоскостей в лабораторной системе координат, γ – релятивистский фактор электрона.

Каналированная частица может совершать переходы между зонами поперечного движения, расположенными внутри ямы [2, 3].

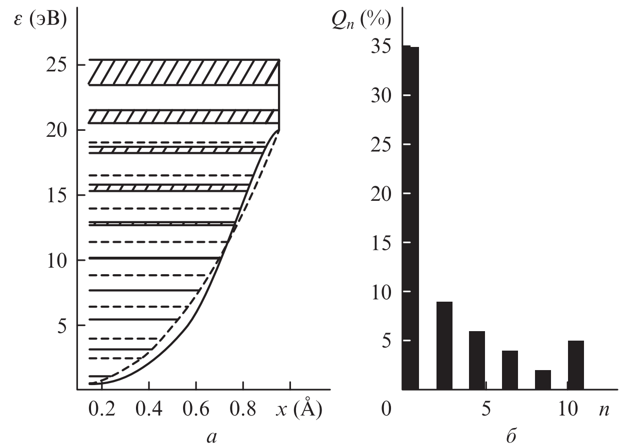

Рис.1. Энергетические зоны (уровни) (*а*) и коэффициенты населенности уровней (*б*) для позитронов с энергией E_1 = 28 МэВ в Si при нулевом угле влета относительно плоскости (110). Штриховая кривая – параболический потенциал, штриховые горизонтальные линии – положение уровней в нем.

Поперечное движение каналированной частицы характеризуется ярко выраженным квантованным зонным энергетическим спектром. Зоны, лежащие глубоко в ямах, очень узкие, поэтому практически можно говорить о дискретных уровнях в яме. Таким образом, в случае каналированной частицы, движущейся в режиме плоскостного каналирования, будем иметь дело (в ССК) с «одномерным» атомом, на спектр излучения которого существенно влияет эффект Доплера. Это позволяет утверждать, что для каналированных частиц могут иметь место известные в атомной физике разнообразные эффекты, в частности при взаимодействии с фотоном лазерного пучка возможно возникновение комбинационного (рамановского) рассеяния (генерация кратных гармоник).

2. Кинематика комбинационного рассеяния фотона «связанным» каналированным позитроном

Основные характеристики комбинационного рассеяния могут быть получены путем анализа законов сохра-

Н.П.Калашников. Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; e-mail: kalash@mephi.ru
О.Н.Крохин. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; e-mail: krokhin@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 10 сентября 2014 г., после доработки – 21 октября 2014 г.

нения энергии и продольного импульса. Предположим, что на монокристалл падает позитрон с импульсом $\boldsymbol{p}_1$ и энергией E_1 и фотон с импульсом $\boldsymbol{k}_1$ и энергией ω_1 (будем полагать, если не оговорено особо, что $\hbar = c = 1$). В результате взаимодействия фотона с каналированным позитроном испускается фотон с импульсом $\boldsymbol{k}_2$ и энергией ω_2, импульс и энергия позитрона в конечном состоянии принимают значения $\boldsymbol{p}_2$ и E_2. Отметим, что при протекании реакции в произвольном постоянном поле сохраняется энергия системы (1).

В продольном направлении потенциал, ответственный за каналирование положительно заряженной частицы, постоянен и система обладает определенным продольным импульсом (2) (импульс фотона в среде равен $k_{1,2}n(\omega)$, где $n(\omega)$ – показатель преломления кристалла, который для простоты предполагаем равным единице).

Проанализируем соотношение (2), описывающее закон сохранения продольного импульса. Согласно кинематике движения каналированного ультрарелятивистского позитрона

$$p_{1zn} = \sqrt{p_1^2 - 2E_1\varepsilon_n(p_1)}, \quad p_{2zm} = \sqrt{p_2^2 - 2E_2\varepsilon_m(p_2)}, \tag{3}$$

где $\varepsilon_n(p_1)$ и $\varepsilon_m(p_2)$ – квантованные энергии поперечного движения в начальном и конечном состояниях.

С помощью (3) перепишем равенство (2) в виде

$$\omega_1\cos\vartheta_0 + \sqrt{E_1^2 - m_{\rm p}^2 - 2E_1\varepsilon_n(E_1)}$$
$$= \omega_2\cos\vartheta + \sqrt{E_2^2 - m_{\rm p}^2 - 2E_2\varepsilon_m(E_2)}, \tag{4}$$

где ϑ_0 и ϑ – углы между направлением распространения фотона и продольной осью до и после рассеяния соответственно; $m_{\rm p}$ – масса покоя позитрона.

Рассмотрим наиболее интересный случай комбинационного рассеяния в условиях плоскостного каналированного движения положительно заряженных частиц (позитронов) с энергиями $E_1, E_2 \gg \omega_1, \omega_2$.

Поскольку полная энергия каналированной частицы много больше квантованной энергии ее поперечного движения, то в соотношении (4) можно разложить квадратные корни в ряд Тейлора. После разложения получим

$$(\omega_2 - \omega_1)\beta + (\omega_1\cos\vartheta_0 - \omega_2\cos\vartheta)$$
$$- \beta[\varepsilon_n(E_1) - \varepsilon_m(E_2)] = 0, \tag{5}$$

где $\beta = V/c$.

Выражение (5) существенно упрощается в случае комбинационного рассеяния «вперед», когда $\cos\vartheta_0 = 1$ (т. е. $\vartheta_0 = 0$) и $\cos\vartheta = 1$ (т. е. $\vartheta = 0$):

$$(\omega_2 - \omega_1)(1 - \beta) = \beta(\varepsilon_m - \varepsilon_n). \tag{6}$$

Для ультрарелятивистского случая соотношение (6) можно переписать в виде

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\beta}{1-\beta}(\varepsilon_m - \varepsilon_n) = 2\gamma^2(\varepsilon_m - \varepsilon_n). \tag{7}$$

Если $\omega_2 = 2\omega_1$, то можно ожидать появления генерации второй гармоники при выполнении условия

$$\omega_1 = 2\gamma^2(\varepsilon_m - \varepsilon_n). \tag{8}$$

Предположим, что каналированный позитрон может совершать переходы между дискретными уровнями поперечного движения. Тогда частотный сдвиг и его зависимость от энергии каналированной частицы в простейших случаях аппроксимации формы ямы могут быть найдены в явном виде. Для простоты предположим, что непрерывный потенциал плоскости представляет собой прямоугольную яму Кронига–Пенни. Следовательно,

$$\varepsilon_n = \frac{\pi^2}{2m_{\rm p}d^2}n^2, \tag{9}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$; d – расстояние между плоскостями.

При переходах между уровнями с фиксированными значениями (n, m) сдвиг частоты определяется соотношением

$$\Delta\omega = 2\gamma^2(\varepsilon_m - \varepsilon_n) = \frac{\pi^2}{m_{\rm p}^3 d^2}(m_{\rm p}^2 - n^2)E^2. \tag{10}$$

Таким образом, сдвиг частоты растет квадратично с ростом энергии каналированной частицы, и для $\varepsilon_m - \varepsilon_n \ll m_{\rm p}$ всегда выполняется условие $\Delta\omega \ll E$.

При переходах между соседними уровнями ($m = n + 1$)

$$\Delta\omega = \frac{\pi^2}{m_{\rm p}^3 d^2}(2n+1)E^2. \tag{11}$$

Оценка для антистоксовой компоненты ($n = 1$) дает $\Delta\omega \sim 5\gamma^2$ (в эВ).

3. Дифференциальное сечение комбинационного рассеяния фотона каналированным связанным позитроном

Предположим, что на монокристалл падает позитрон с импульсом $\boldsymbol{p}_1$ и энергией E_1. В результате взаимодействия фотона с каналированным позитроном испускается фотон с импульсом $\boldsymbol{k}_2$ и энергией ω_2, импульс и энергия позитрона в конечном состоянии принимают значения $\boldsymbol{p}_2$ и E_2.

В системе координат, в которой начальный продольный импульс позитрона равен нулю, позитрон можно рассматривать как квантованный одномерный (в случае осевого каналирования – как двумерный) объект [2, 3]. В этой системе координат мы имеем дело с нерелятивистским объектом, для которого амплитуда (сечение) рассеяния фотона связанной частицей хорошо известна [4, 5].

В связи с этим достаточно преобразовать амплитуду (сечение) рассеяния в лабораторную систему координат по простым правилам (см., напр., [6] (§3, с. 88–90)), учитывая при этом, что квантовый объект, сопоставленный каналированному позитрону, обладает одномерным (плоскостное каналирование) или двумерным (осевое каналирование) импульсом.

Например, амплитуда упругого рассеяния вперед фотона на каналированной частице

$$f(\omega) = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{|1 - \beta\cos\theta|}F(\omega'), \tag{12}$$

где $F(\omega')$ – амплитуда рассеяния в системе покоя (ССК) каналированной частицы; $\omega' = (1 - \beta\cos\theta)\gamma\omega$ – частота фотона в ССК.

Рассмотрим рассеяние фотона с импульсом $\boldsymbol{k}_1$, энергией ω_1 и поляризацией $\boldsymbol{e}_1$ позитроном с энергией ε_{1n}, находящимся в состоянии с волновой функцией $\psi_1^{(+)}(x) = u_{1n}(x)\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_{1n}t)$. В результате рассеяния возникает фотон с импульсом $\boldsymbol{k}_2$, энергией ω_2 и поляризацией $\boldsymbol{e}_2$, позитрон переходит в состояние с энергией ε_{2m} и волновой функцией $\psi_2^{(+)}(x) = u_{2m}(x)\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_{2m}t)$.

Используя стандартную технику фейнмановских диаграмм ([4], §59), рассмотрим нерелятивистский случай, когда энергии фотонов малы по сравнению с энергией покоя позитрона, $\omega_1 \ll m_{\mathrm{p}}$, $\omega_2 \ll m_{\mathrm{p}}$, и значения энергии поперечного движения каналированного позитрона ε_{m2} и ε_{n1} мало отличаются от m_{p}:

$$|\varepsilon_{n1} - m_{\mathrm{p}}| \ll m_{\mathrm{p}}, \quad |\varepsilon_{m2} - m_{\mathrm{p}}| \ll m_{\mathrm{p}}. \tag{13}$$

Эти предположения позволяют существенно упростить выражение для матричного элемента перехода:

$$W = -2\pi\alpha \exp[\mathrm{i}(k_1 - k_2)x]\sqrt{\omega_1\omega_2} \times \sum_s \left(\frac{\langle 2|\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_2^*|s\rangle\langle s|\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_1|1\rangle}{\varepsilon_1 - \varepsilon_s + \omega_1} + \frac{\langle 2|\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_1|s\rangle\langle s|\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_2^*|1\rangle}{\varepsilon_1 - \varepsilon_s - \omega_2} \right), \tag{14}$$

где α – постоянная тонкой структуры.

Дифференциальное сечение комбинационного рассеяния связано с матричным элементом W соотношением

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi\,|W|^2\,\delta(\varepsilon_1 + \omega_1 - \varepsilon_2 - \omega_2)\frac{\mathrm{d}^3 k_2}{(2\pi)^3}. \tag{15}$$

Устраняя δ-функцию интегрированием по $\mathrm{d}\omega_2$, находим

$$\mathrm{d}\sigma = \omega_1\omega_2^3\,\mathrm{d}\Omega_2 \times \left| \sum_s \left(\frac{\langle 2|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_2^*|s\rangle\langle s|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_1|1\rangle}{\varepsilon_1 - \varepsilon_s + \omega_1} + \frac{\langle 2|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_1|s\rangle\langle s|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_2^*|1\rangle}{\varepsilon_1 - \varepsilon_s - \omega_2} \right) \right|^2, \tag{16}$$

где $\boldsymbol{Q}$ – дипольный момент ондулятора; Ω_2 – телесный угол рассеяния фотона.

4. Резонансное рассеяния фотона каналированным позитроном

В выражение для матричного элемента (14) входит сумма по всем возбужденным состояниям ондулятора в ССК. Если энергия фотона ω_1 равна разности энергий одного из возбужденных состояний и основного состояния ондулятора, т.е. $\omega_1 = \varepsilon_s - \varepsilon_1$, то сечение рассеяния обращается в бесконечность, что указывает на неприменимость полученного выражения при $\omega_1 = \varepsilon_s - \varepsilon_1$. Этот случай соответствует резонансу. Причина неприменимости формулы (14) вблизи резонанса заключается в том, что мы рассматривали $\psi_s^{(+)}(x)$ как волновые функции стационарных состояний, содержащих время в виде $\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_{1s}t)$.

Между тем следует учитывать зонный характер энергии поперечного движения и то, что возбужденные состояния являются приближенно стационарными. Такие состояния можно описывать как состояния с комплексной энергией, при этом волновые функции содержат время в виде $\exp[-\mathrm{i}(\varepsilon_s - \mathrm{i}\Gamma_s/2)t]$, где Γ_s – вещественная положительная величина (ширина уровня).

Следовательно, при частотах, близких к резонансной, в выражении (14) можно отбросить все слагаемые, кроме резонансного, и заменить в нем ε_s на $\varepsilon_s - \mathrm{i}\Gamma_s/2$. Таким образом, получаем следующее выражение для амплитуды рассеяния:

$$W = 2\pi\alpha\sqrt{\omega_1\omega_2}\sum_s \left(\frac{\langle 2|\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_2^*|s\rangle\langle s|\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_1|1\rangle}{\varepsilon_s - \varepsilon_1 - \omega_1 - \mathrm{i}\Gamma_s/2} \right), \tag{17}$$

где суммирование распространяется на все состояния с энергией ε_s. Соответственно дифференциальное сечение рассеяния можно представить в виде

$$\mathrm{d}\sigma = \omega_1\omega_2^3\,\mathrm{d}\Omega_2 \left| \sum_s \left[\frac{\langle 2|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_2^*|s\rangle\langle s|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_1|1\rangle}{(\varepsilon_s - \varepsilon_1 - \omega_1)^2 + \Gamma_s^2/4} \right] \right|^2. \tag{18}$$

1. Lindhard J. *Mat.-Pys. Medd. Dansk. Vid. Selsk.*, **34**, №14 (1965).
2. Калашников Н.П. *Когерентные взаимодействия заряженных частиц в монокристаллах* (М.: Атомиздат, 1981).
3. Барышевский В.Г. *Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях* (Минск: Изд-во БГУ им. В.И.Ленина, 1982).
4. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Теоретическая физика. Т.IV. Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1989).
5. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1981).
6. Гольдбергер М.Л., Ватсон К.М. *Теория столкновений* (М.: Мир, 1967).