ПРИМЕНЕНИЯ ЛАЗЕРОВ И ДРУГИЕ ВОПРОСЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

PACS 03.65.Yz; 03.67.–a

Сжатие энтропии системы кубит – поле под действием декогерентности*

С.Абдел-Халек, К.Беррада, А.-С.Ф.Обада, М.Р.Б.Вахиддин

С помощью модели фазового затухания детально изучена динамика сжатия энтропии поля (field entropy squeezing) (СЭП) для системы кубит – поле. Результаты расчета показывают, что начальное состояние и декогерентность играют решающую роль в эволюции СЭП. Во время эволюции системы имеет место монотонная связь между СЭП, энтропией Верла и отрицательностью системы.

Ключевые слова: *система кубит – поле, декогерентность, сжатие энтропии поля.*

1. Введение

В последние годы повышенный интерес вызывают свойства диссипативных вариантов модели Джейнса – Каммингса (МДК) в связи с использованием этих свойств при проведении квантовых вычислений с помощью описания атомно-полевого взаимодействия с учетом эффекта декогерентности. В отличие от теоретических схем ретрансляции на основе динамических эффектов, МДК нашла свое практическое применение благодаря экспериментальному прогрессу в квантовой электродинамике резонаторов. Для использования МДК в квантовой обработке информации важно изучить роль эффекта декогерентности во взаимодействии поля с веществом, возникающего из-за неизбежного влияния окружающей среды. В этом контексте только в нескольких работах МДК исследовали с помощью как аналитических приближенных методов [1, 2], так и численных расчетов [3 – 6], в которых принимались во внимание диссипация и затухание фазы. Показано, что декогерентность вследствие рассеяния (система теряет энергию, создавая так называемый квант окружения) существенно влияет на реализацию схемы эксперимента в реальных физических ситуациях. Эффект затухания фазы описывает изменение когерентности состояния системы с течением времени, поскольку гамильтониан взаимодействия внешней среды с системой не коммутирует с гамильтонианом системы в этом процессе.

Запутанность является одним из видов нелокальной корреляции, которая играет важную роль при обработке квантовой информации. Представляющие интерес точно спроектированные запутанные состояния в действительности могут быть хрупкими и трудно реализуемыми [7]. Запутанные состояния квантового объекта часто рассматриваются как тонкая и экзотическая особенность квантовой механики, исследования которой имеют практическую и теоретическую значимость. С научно-философской точки зрения эта особенность была предметом основополагающих дискуссий и предложений, касающихся развития квантовой механики, начиная с работ Шредингера и знаменитой работы Эйнштейна – Подольского – Розена (ЭПР) [8]. Интересно, что запутанность является свойством нелокальных корреляций между двумя или более квантовыми системами и не может быть увеличена путем локальных квантовых операций и классических связей [7]. В силу своих особенностей квантовая запутанность используется в качестве важнейшего средства для решения таких задач, как квантовые вычисления, квантовая телепортация [9], сверхплотное кодирование [10], квантовая криптография [11, 12], а в последнее время – односторонние квантовые вычисления [13] и квантовая метрология [14, 15]. Эти задачи не могут быть решены с помощью классических подходов. Сложившаяся ситуация привела к интенсивному поиску новых математических инструментов, которые позволили бы ввести надлежащую меру этого явления [16]. В частности, это важно для выяснения вопроса о том, является ли некоторое квантовое состояние сепарабельным или проявляет вполне определенный квантовый характер. В качестве количественной характеристики (меры) запутанности квантового состояния рассматриваются согласованность [17–19], запутанность формирования [20 – 22], отрицательность [23 – 26] и т. д.

Исследования явления запутанности квантовой системы в присутствии декогеренции представляют собой обширное поле деятельности, и многие аспекты, связанные с этой проблемой, требуют дальнейших усилий. Есть целый ряд недавних работ, в которых рассматривается влияние декогеренции на квантовую запутанность и классическую корреляцию. Так, в работе [6] было исследовано влияние фазы затухания на классическую корреляцию, измеренную с помощью энтропии Верла (ЭВ) и распределения фазы Верла. Было обнаружено, что затухание фазы приводит к долгоживущей корреляции системы. Другая работа в этом направлении [27] связана с влиянием внутренней декогерентности на сжатие энтропии сверхпроводящего зарядо-

* Перевод с англ. А.А.Скворцова.

S.Abdel-Khalek. The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Miramare-Trieste, Italy; Mathematics Department, Faculty of Science, Taif University, Taif, Saudi Arabia;
e-mail: sayedquantum@yahoo.co.uk
K.Berrada. The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Miramare-Trieste, Italy; Al Imam Mohammad Ibn Saud Islamic University, College of Science, Department of Physics, Riyadh, Saudi Arabia
A.-S.F.Obada. Mathematics Department, Faculty of Science, Al-Azher University, Nassr City 11884, Cairo, Egypt
M.R.B.Wahiddin. Department of Computer Science, International Islamic University of Malaysia, P.O. Box 10, 50728 Kuala Lumpur, Malaysia

Поступила в редакцию 21 сентября 2013 г.

вого кубита, находящегося в одномодовом поле. В этой работе сообщается, что появление и исчезновение сжатия энтропии зависит от внутренней декогерентности.

Основная цель настоящего исследования состоит в подробном изучении эволюции во времени сжатия энтропии поля (СЭП), ЭВ и меры запутанности с учетом эффекта затухания фазы. Кроме того, в нашей работе показана связь между ними в терминах параметров, описывающих рассматриваемую систему. Это приводит к следующему вопросу: можно ли использовать СЭП в качестве параметра запутанности и динамических свойств системы в присутствии декогерентности?

2. Основное уравнение и его динамика

Рассматриваемая модель представляет собой МДК двухуровневого атома, резонансно взаимодействующего с одной модой излучения в резонаторе, когда связь зависит от интенсивности и обеспечивает сохранение энергии системы. Мы предполагаем, что окружающая среда находится при нулевой температуре и на рассеяние энергии влияет затухание фазы. В приближении вращающейся волны гамильтониан взаимодействия системы дается выражением

$$\hat{H}_I = \lambda(\hat{A}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \hat{A}^\dagger|\downarrow\rangle\langle\uparrow|). \tag{1}$$

Здесь λ – константа связи; $\hat{A} = \hat{a}\sqrt{\hat{n}}$; $\hat{A}^\dagger = \sqrt{\hat{n}}\,\hat{a}^\dagger$; $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$; фактор $\sqrt{\hat{n}}$ – член взаимодействия, который больше не является линейным по полевым переменным и представляет собой зависимую от интенсивности связь.

В этом случае основное уравнение для оператора матрицы плотности $\hat{\rho}$ при наличии фазового затухания поля в резонаторе и нулевой температуре резервуара имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}_I,\hat{\rho}(t)] + \gamma[2\hat{n}\hat{\rho}(t)\hat{n} - \hat{n}^2\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{n}^2], \tag{2}$$

где γ – постоянная затухания фазы. Для получения точного решения уравнения (2) в случае высокодобротного резонатора могут быть использованы представления одетых состояний. При высокой добротности Q основное уравнение (2) можно записать в виде

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\Lambda}(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma\exp(\mathrm{i}\hat{H}_I t) \times[2\hat{n}\hat{\rho}(t)\hat{n} - \hat{n}^2\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{n}^2]\exp(-\mathrm{i}\hat{H}_I t), \tag{3}$$

где $\hat{\Lambda}(t) = \exp(\mathrm{i}\hat{H}_I t)\hat{\rho}(t)\exp(-\mathrm{i}\hat{H}_I t)$ и начальное состояние всей системы может быть выражено через матрицу плотности. Тогда, используя секулярное приближение [2], в котором пренебрегается осциллирующими членами, для основного уравнения (3) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{\Lambda}(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\gamma}{2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\{(2n+1)(2m+1)[\Gamma_{nn}^{++}\hat{\Lambda}(t)\Gamma_{mm}^{++} \\ &+ \Gamma_{nn}^{--}\hat{\Lambda}(t)\Gamma_{mm}^{--} + \Gamma_{nn}^{++}\hat{\Lambda}(t)\Gamma_{mm}^{--} + \Gamma_{nn}^{--}\hat{\Lambda}(t)\Gamma_{mm}^{++}] \\ &+ \Gamma_{nn}^{+-}\hat{\Lambda}(t)\Gamma_{mm}^{-+}\exp(2\mathrm{i}t\mu_{nm}) + \Gamma_{nn}^{-+}\hat{\Lambda}(t)\Gamma_{mm}^{+-}\exp(-2\mathrm{i}t\mu_{nm})\} \\ &- \frac{\gamma}{4}\sum_{n=0}^{\infty}[(2n+1)^2+1][(\Gamma_{nn}^{++}+\Gamma_{nn}^{--})\hat{\Lambda}(t) \\ &+ \hat{\Lambda}(t)(\Gamma_{nn}^{++}+\Gamma_{nn}^{--})],\end{aligned} \tag{4}$$

где $\Gamma_{nm}^{(ji)} = |\phi_n^{(j)}\rangle\langle\phi_m^{(i)}|$; j, i = «+», «–»; $|\phi_n^{\pm}\rangle$ – два собственных состояния полного гамильтониана (1) для резонатора без потерь; $\mu_{nm} = \mu_n - \mu_m$; $\pm\mu_n = \pm\lambda(n+1)$ – собственные значения оператора. Выражение для собственных векторов в приближении вращающейся волны имеет вид

$$\begin{pmatrix}|\phi_n^{+}\rangle \\ |\phi_n^{-}\rangle\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|n,\uparrow\rangle \\ |n+1,\downarrow\rangle\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Из приведенных выше формул мы можем найти аналитическое решение для матрицы плотности системы в основном начальном состоянии

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(t) &= \frac{1}{2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\sum_{\substack{r,s=\pm k\\ k=0}}^{1}\sum_{l=0}^{1}\exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)\exp[-\gamma t(n-m)^2] \\ &\times\exp[-\mathrm{i}t(r\mu_m - s\mu_n)]\,U_{nm}^{(rs)}\,|1-l,m+l\rangle\langle 1-k,n+k|,\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}U_{nm}^{(rs)} &= \langle\phi_m^{(r)}|\rho^{\mathrm{AF}}(0)|\phi_n^{(s)}\rangle\left\{1 + \delta_{rs}\left[\cosh\left(\frac{\gamma t\delta_{nm}}{2}\right) - 1\right]\right\} \\ &+ \delta_{nm}\delta_{rs}\langle\phi_m^{(-r)}|\rho^{\mathrm{AF}}(0)|\phi_n^{(-s)}\rangle\sinh\left(\frac{\gamma t}{2}\right);\end{aligned} \tag{7}$$

δ_{nm} – символ Кронекера. Предположим, что начальное состояние системы является произведением состояний: $\hat{\rho}^{\mathrm{AF}}(0) = \hat{\rho}^{\mathrm{A}}(0)\otimes\hat{\rho}^{\mathrm{F}}(0)$, причем атом, первоначально находится в возбужденном состоянии, т. е. $\hat{\rho}^{\mathrm{A}}(0) = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$, в то время как начальное состояние поля дается выражением

$$\hat{\rho}^{\mathrm{F}}(0) = \frac{|\alpha\rangle\langle\alpha| + r|-\alpha\rangle\langle-\alpha|}{1+r}. \tag{8}$$

При $r = 0$ световое поле возникает из когерентного состояния, в то время как при $r = 1$ поле представляет собой статистическую смесь когерентных состояний $|\alpha\rangle$ и $|-\alpha\rangle$, где $|\alpha\rangle$ – состояние, содержащее в среднем $|\alpha|^2$ фотонов. Для простоты, без потери общности, амплитуда α считается действительной.

3. Различные классические и квантовые характеристики

Начнем обсуждение с рассмотрения общего состояния таких классических и квантовых характеристик, как СЭП, квантовая запутанность и ЭВ.

3.1. Сжатие энтропии поля

В последние годы были разработаны важные подходы для систематического изучения сжатия квантовых систем. Так, в работе [28] обсуждается связь между сжатием и преобразованием запутанных состояний. Соотношение неопределенностей для энтропии, которое вводит понятие сжатия энтропии, описывает некоторые эффекты, обладающие высокой чувствительностью к сжатию поля [29, 30]. В настоящей работе СЭП рассматривается для другой системы [31]. Неравенство $\Delta X\Delta Y \geqslant \hbar/2$ использовалось в [32] для операторов, удовлетворяющих условию $[X, Y] = \mathrm{i}\hbar$, где ΔA – стандартное отклонение наблюдаемой величины A. Это уравнение было получено Гейзенбергом как математическое выражение принципа неопределенности для пары координата–импульс. Альтернативная математическая формулировка принципа неопределенности обеспечивается при выполнении неравенства [33, 34]

$$\delta X \delta Y \geqslant \pi e \hbar, \tag{9}$$

где δA – экспонента дифференциальной энтропии, соответствующей наблюдаемой величине A.

Координатная и импульсная энтропии поля определяются выражением [32]

$$S_\xi(t) = -\int \langle \xi | \hat{\rho}^{\mathrm{F}}(t) | \xi \rangle \ln \langle \xi | \hat{\rho}^{\mathrm{F}}(t) | \xi \rangle \mathrm{d}\xi, \tag{10}$$

где $\xi = x, p$ – координата или импульс. Состояние поля Фока $|n\rangle$ можно записать в координатном и импульсном представлениях следующим образом:

$$(\langle x | n \rangle, \langle p | n \rangle) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!}} \times \left(H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \frac{H_n(p)}{\mathrm{i}^n} \exp\left(-\frac{p^2}{2}\right) \right), \tag{11}$$

где $H_n(\xi)$ – полиномы Эрмита. Соотношение неопределенностей для энтропий координаты и импульса задается согласно [32]:

$$\exp[S_x(t)] \exp[S_p(t)] \geqslant \pi e. \tag{12}$$

В рассматриваемом случае СЭП в терминах переменной θ описывается выражением [35]

$$\delta_{x(p)} = \exp[S_{x(p)}(t)] - \sqrt{\pi} e, \tag{13}$$

где при $\delta_{x(p)} < 0$ энтропия координаты (импульса) поля сжата. Здесь, как видно, динамика СЭП сравнивается с величиной отрицательности. Другими словами, величина отрицательности [25] используется для количественной оценки запутанности конечного состояния кубита поля (6) и определяется следующим образом:

$$N(\hat{\rho}) = \frac{\|\hat{\rho}^{\mathrm{T}_A}\| - 1}{2}, \tag{14}$$

где $\hat{\rho}^{\mathrm{T}_A}$ обозначает частичное транспонирование матрицы плотности $\hat{\rho}$ относительно подсистемы A. Нормированный след эрмитового оператора $\|\hat{\rho}^{\mathrm{T}_A}\| \equiv \mathrm{Tr}\sqrt{(\hat{\rho}^{\mathrm{T}_A})^{\dagger} \hat{\rho}^{\mathrm{T}_A}}$ имеет матричные элементы

$$\langle i_A, j_B | \hat{\rho}^{\mathrm{T}_A} | k_A, l_B \rangle = \langle k_A, j_B | \hat{\rho} | i_A, l_B \rangle. \tag{15}$$

Отрицательность варьируется от $N(\hat{\rho}) = 0$ для незапутанного состояния до $N(\hat{\rho}) = 1$ для максимально запутанного состояния, как и для хорошо известного случая ЭПР-состояния.

3.2. Энтропия Верла

Энтропия Верла используется при рассмотрении динамики квантовых систем [36–38]. Эта мера успешно применялась при описании различных свойств квантовых оптических полей, таких как неопределенность фазового пространства [39] и декогерентность [40]. Кроме того, в [41] обсуждалась проблема измерения квантовых корреляций (запутывания) в фазовом пространстве с использованием ЭВ. Установлено, что степень межмодовой корреляции сильно зависит от разности чисел фотонов в двухмодовых состояниях Фока. Был исследован также эффект фазового затухания классической корреляции, измеренный с помощью ЭВ и фазового распределения Верла [6, 42].

Любое квантовое состояние, описываемое матрицей плотности $\hat{\rho}$, может быть представлено с помощью функции квазираспределения Хусими $Q_\rho(v) = (1/\pi)\langle v | \hat{\rho} | v \rangle$, где $|v\rangle$ – когерентное состояние. Эта функция в β-пространстве определяется выражением

$$Q_\beta(t) = \frac{1}{\pi} \langle \beta | \hat{\rho}^{\mathrm{F}}(t) | \beta \rangle, \tag{16}$$

а ЭВ квантового состояния $\hat{\rho}$ – соотношением [36]

$$S_\rho = -\int_\Omega Q_\rho(v) \ln Q_\rho(v) \mathrm{d}v. \tag{17}$$

Согласно (17) ЭВ поля имеет вид [43, 44]

$$S_{\mathrm{W}}(t) = -\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\infty [Q_\beta(t) \ln Q_\beta(t)] |\beta| \mathrm{d}|\beta| \right\} \mathrm{d}\Omega. \tag{18}$$

Насколько нам известно, исследования динамики СЭП для системы кубит – поле, описываемой с помощью модели затухания фазы, до сих пор не проводились.

4. Численные результаты и их обсуждение

В этом разделе исследуется динамика СЭП под действием эффекта затухания фазы, когда поле возникает из смешанного состояния, а атом находится в возбужденном состоянии. При этом рассматривается корреляция СЭП со степенью запутанности и ЭВ.

С использованием уравнений (13), (14) и (18) получены основные результаты по эволюции сжатых компонент энтропии поля $\delta_{x,p}$, отрицательности $N(\hat{\rho})$, ЭВ S_{W} и распределения фаз Верла. Все кривые на рис.1, 2 построены для среднего числа фотонов $\bar{n} = 10$. Время t нормировано на обратную константу связи λ.

На рис.1 приведены результаты исследования влияния начального состояния поля при $r = 0$ и 1 на динамику различных физических величин в отсутствие эффекта затухания фазы. Видно, что величины δ_x, δ_p и S_{W} имеют периодическую зависимость от времени. Представляет интерес тот факт, что параметры δ_x и S_{W} очень чувствительны к изменению начального состояния. При этом поле не оказывает никакого влияния на динамику δ_p, т. е. СЭП имеет сложное поведение во времени, что может быть использовано в различных областях физики. Кроме того, наблюдаются значительное сжатие параметра δ_x для $r = 0$ и резкое его сжатие для $r = 1$ при $\lambda t = (2m + 1)\pi/2$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$. В то же время для δ_p сжатие вообще отсутствует. С другой стороны, ЭВ имеет большие значения при $r = 1$. Это указывает на то, что оптическое поле становится более квантово-механическим, поскольку оно имеет тенденцию к статистической смеси состояний.

Видно также, что в каждом цикле периодичности запутанность сначала возрастает до максимального значения, а затем уменьшается до нуля при $\lambda t = (2m + 1)\pi/2$. Рассматриваемая система подвержена быстрой и полной потере запутанности за конечное время. Затем система демонстрирует столь же быстрое возрождение запутанности, которая возрастает до максимума и уменьшается до минимума за время $\lambda t = m\pi$. В случае сжатия координатной

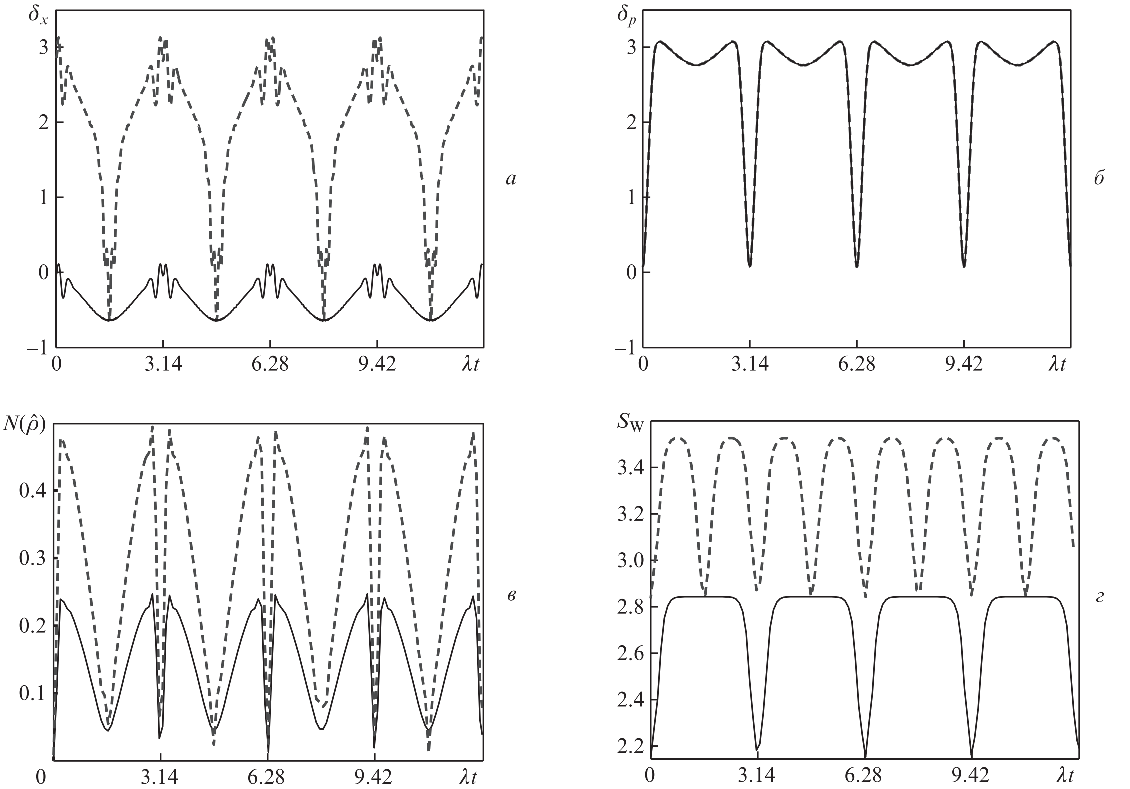

Рис.1. Временная эволюция СЭП для координаты δ_x (*а*) и импульса δ_p (*б*), а также отрицательности $N(\hat{\rho})$ (*в*) и энтропии Верла S_W (*г*) при $\alpha = \sqrt{10}$, $\gamma/\lambda = 0$, $r = 0$ (сплошные кривые) и 1 (штриховые кривые).

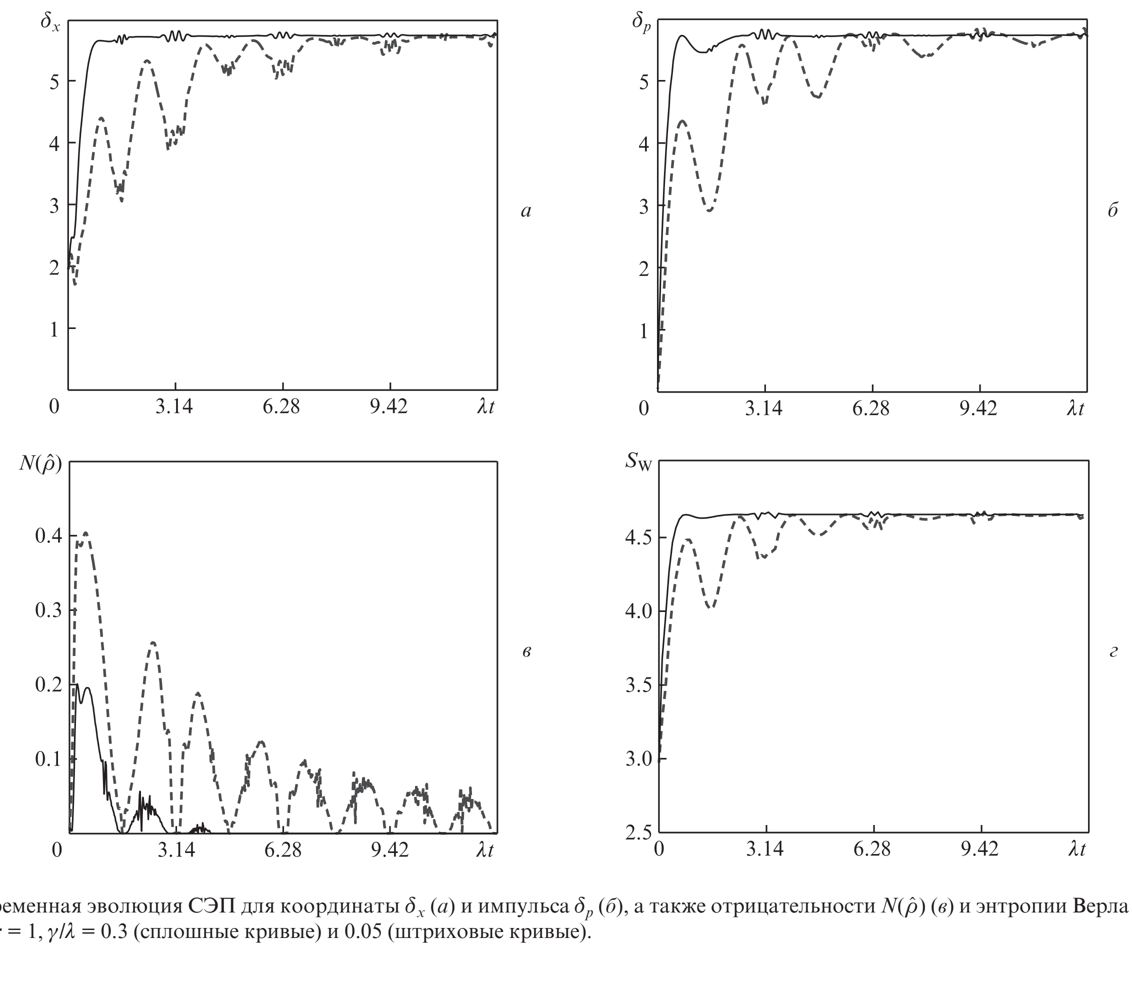

Рис.2. Временная эволюция СЭП для координаты δ_x (*а*) и импульса δ_p (*б*), а также отрицательности $N(\hat{\rho})$ (*в*) и энтропии Верла S_W (*г*) при $\alpha = \sqrt{10}$, $r = 1$, $\gamma/\lambda = 0.3$ (сплошные кривые) и 0.05 (штриховые кривые).

энтропии оптического поля приведенная на рис.1,*а* нижняя кривая показывает, что δ_x возрастает до максимума, имея при этом за короткое время локальные минимумы и максимумы, а затем уменьшается до минимума при $\lambda t = (2m + 1)\pi/2$. Энтропия S_W возрастает до максимума с последующими локальными минимумами и максимумами, после чего она стремится к локальному минимуму при $\lambda t = m\pi$.

При исследовании динамики δ_x и δ_p, обусловленной взаимодействием в системе кубит–поле, была найдена корреляция между обеими величинами в процессе эволюции. При этом наблюдается прямая монотонная зависимость между δ_p и $N(\hat{\rho})$ в диапазоне $(2m + 1)\pi/2 - \varepsilon \leqslant \lambda t \leqslant (2m + 1)\pi/2 + \varepsilon$, где ε – малая величина. В данном случае проявляется одинаковое поведение этих величин с минимумами при $\lambda t = (2m + 1)\pi/2$, что означает симметрию обеих величин относительно точек $\lambda t = (2m + 1)\pi/2$. Кроме того, видно, что величины δ_p и $N(\hat{\rho})$ имеют косвенную (или прямую) связь в процессе эволюции, проявляющуюся в обратном монотонном изменении δ_p от максимума, при этом $N(\hat{\rho})$ увеличивается от своего минимума. Следует отметить, что полученный результат не имеет общего характера, т.к. δ_p и запутанность представляют собой две разные и независимые физические величины.

Для визуализации действия эффекта затухания фазы на динамику указанных величин на рис.2 для случая $r = 1$ показана их эволюция при разных значениях параметра γ/λ. Поведение системы полностью изменилось под влиянием эффекта декогерентности. Из рис.2 следует, что отрицательность уменьшается с увеличением γ/λ и совсем исчезает при достаточно больших временах, что приводит систему в сепарабельное состояние, когда ее нелокальная корреляция полностью теряется. С другой стороны, видно, что действие декогерентности на δ_x, δ_p и S_W одинаково и между ними в процессе эволюции системы существует монотонная зависимость, имеющая один и тот же характер для всех величин. Интересно, что δ_x и δ_p возрастают с увеличением γ/λ и в процессе эволюции никакого сжатия не наблюдается. Кроме того, установлено, что при больших временах ЭВ имеет тенденцию к стабилизации для различных значений γ/λ, что указывает на независимость поля от внешней среды и его квантово-механический характер. Полученные результаты свидетельствуют о том, что декогеренция может уничтожить запутанность и сдерживать сжатие в процессе эволюции.

5. Заключение

В работе подробно изучена динамика сжатия энтропии системы кубит–поле в присутствии эффекта затухания фазы, включающего в себя сжатие координатной и импульсной компонент энтропии поля, с учетом начальных условий и параметра декогерентности. Показано, что энтропия поля обладает богатой динамикой, а это обеспечивает различные физические явления за счет надлежащего выбора параметров рассматриваемой системы. При этом энтропия поля имеет разный порядок величины в зависимости от огибающей оптического поля и параметра затухания фазы, а также монотонную связь со степенью запутанности и статистическими свойствами поля в различных диапазонах безразмерного времени. Обнаружено, что число независимых величин очень чувствительно к степени смешения оптического поля. С другой стороны, эффект декогерентности может разрушить запутанность системы и препятствовать сжатию в процессе эволюции. Полученные результаты могут иметь большое значение для применения СЭП в квантовой теории информации. В будущем планируется исследовать эволюцию сжатия энтропии поля мультикубитной системы с учетом конечной температуры окружающей среды и расстояния между кубитами. Важно также изучить немарковскую динамику сжатия, что полезно для лучшего понимания взаимосвязи между сжатием энтропии поля и квантовыми характеристиками в процессе появления декогерентности.

К.Беррада и С.Абдел-Халек выражают признательность за гостеприимство Международному центру теоретической физики им. Абдуса Салама (Триест, Италия).

1. Barnett S.M., Knight P.L. *Phys. Rev. A*, **33**, 2444 (1986).
2. Puri R.R., Agarwal G.S. *Phys. Rev. A*, **35**, 3433 (1987).
3. Quang T., Knight P.L., Buzek V. *Phys. Rev. A*, **44**, 6069 (1991).
4. Eiselt J., Risken H. *Phys. Rev. A*, **43**, 346 (1991).
5. Englert B.G., Naraschewski M., Schenzle A. *Phys. Rev. A*, **50**, 2667 (1994).
6. Abdel-Khalek S., Obada A.S.F. *Ann. Phys.*, **325**, 2542 (2010).
7. Nielsen M., Chuang I. *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press, 2000).
8. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. *Phys. Rev.*, **47**, 777 (1935).
9. Bennett C.H. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 1895 (1993).
10. Agrawal P., Pati A. *Phys. Rev. A*, **74**, 062320 (2006).
11. Yin Z.Q. et al. *Phys. Rev. A*, **82**, 042335 (2010).
12. Noh T.G. *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 230501 (2009).
13. Morimae T. *Phys. Rev. A*, **81**, 060307 (2010).
14. Schaffry M. et al. *Phys. Rev. A*, **82**, 042114 (2010).
15. Berrada K., Abdel-Khalek S., Raymond Ooi C.H. *Phys. Rev. A*, **86**, 033823 (2012).
16. Wisemann H.M., Milburn G.J. *Quantum Measurement and Control* (Cambridge: Cambridge University Press, 2010).
17. Wootters W.K. *Quantum. Inf. Comput.*, **1**, 27 (2001).
18. Berrada K., Fanchini F.F., Abdel-Khalek S. *Phys. Rev. A*, **85**, 052315 (2012).
19. Berrada K. *Opt. Commun.*, **285**, 2227 (2012).
20. Bennett C.H., Bernstein H.J., Popescu S., Schumacher B. *Phys. Rev. A*, **53**, 2046 (1996).
21. Popescu S., Rohrlich D. *Phys. Rev. A*, **56**, R3319 (1997).
22. Berrada K., Abdel-Khalek S. *Physica E*, **44**, 628 (2011).
23. Peres A. *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 1413 (1996).
24. Zyczkowski K., Horodecki P., Sanpera A., Lewenstein M. *Phys. Rev. A*, **58**, 883 (1998).
25. Vidal G., Werner R.F. *Phys. Rev. A*, **65**, 032314 (2002).
26. Berrada K., Abdel-Khalek S., Obada A.S.F. *Phys. Lett. A*, **376**, 1412 (2012).
27. Xue-Qun Y., Bin S., Jian Z. *Commun. Theor. Phys.*, **48**, 63 (2007).
28. Hongyi F., Yue F. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**, 5319 (2003).
29. Fang M.F., Zhou P., Swain S. *J. Mod. Opt.*, **47**, 1043 (2000); El-Shabat T.M., Abdel-Khalek S., Abdel-Aty M., Obada A.S.F. *Chaos, Solitons Fractals*, **18**, 289 (2003).
30. El-Shabat T.M., Abdel-Khalek S., Abdel-Aty M., Obada A.S.F. *J. Mod. Opt.*, **50**, 2013 (2003); El-Shabat T.M., Abdel-Khalek S., Obada A.S.F. *Chaos, Solitons Fractals*, **26**, 1293 (2005).
31. Qing-Chun Z., Shi-Nig Z. *Chin. Phys.*, **14**, 0336 (2005).
32. Kennard E.H. *Z. Phys.*, **44**, 326 (1927).
33. Beckner W. *Ann. Math.*, **102**, 159 (1975).
34. Bialynicki-Birula I., Mycielski J. *Commun. Math. Phys.*, **44**, 129 (1975).
35. Abdel-Khalek S., Ahmed M.M.A., Obada A.S.F. *Chin. Phys. Lett.*, **28**, 120305 (2011).
36. Wehrl A. *Rep. Math. Phys.*, **16**, 353 (1979).
37. Orlowski A., Paul H., Kastelewicz G. *Phys. Rev. A*, **52**, 1621 (1995).
38. Abdel-Khalek S., Berrada K., Eleuch H., Abdel-Aty M. *Opt. Quantum Electron.*, **42**, 887 (2011).
39. Miranowicz A., Matsueda H., Wahiddin M.R.B. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **33**, 5159 (2000).
40. Anderson A., Halliwell J.J. *Phys. Rev. D*, **48**, 2753 (1993).
41. Piatek K., Leonski W. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**, 4951 (2001).
42. Obada A.S.F., Abdel-Khalek S., Khalil E.M., Ali S. *Phys. Scr.*, **86**, 055009 (2012).
43. Miranowicz A., Bajer J., Wahiddin M.R.B., Imoto N. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**, 3887 (2001).
44. Obada A.S.F., Abdel-Khalek S., Plastino A. *Physica A*, **390**, 525 (2011).