

# Теоретический предел пространственного разрешения в пертурбационной диффузионной оптической томографии

А.Б.Коновалов, В.В.Власов

*Оценен предел пространственного разрешения импульсной диффузионной оптической томографии (ДОТ), основанной на пертурбационной модели реконструкции. С точки зрения точности воспроизведения структур проведено сравнение трех различных подходов к решению обратной задачи ДОТ. Первый подход предполагает реконструкцию диффузионных томограмм по прямым линиям, второй – по среднестатистическим криволинейным траекториям фотонов, в третьем подходе для реконструкции используются полные банановидные распределения траекторий. С целью получения оценок разрешения выводятся аналитические выражения для функции рассеяния точки и модуляционной передаточной функции, а также проводится численный эксперимент по реконструкции прямоугольных рассеивающих объектов с круглыми поглощающими неоднородностями. Показано, что переход от реконструкции по прямым линиям к реконструкции с использованием распределений траекторий фотонов позволяет улучшить разрешение почти на порядок и превзойти точность реконструкции многошаговых алгоритмов, используемых при ДОТ.*

**Ключевые слова:** пространственное разрешение, диффузионная оптическая томография, пертурбационная модель реконструкции, точечная неоднородность, функция рассеяния точки, модуляционная передаточная функция.

## 1. Введение

Современные нелинейные методы диффузионной оптической томографии (ДОТ) [1–5], основанные на многошаговой линеаризации задачи реконструкции и подстройке на каждом шаге матрицы весовых коэффициентов, позволяют получать изображения, приемлемые с точки зрения требований диагностики онкологических заболеваний. Согласно [6] пространственное разрешение диффузионных томограмм составляет 4–6 мм внутри объекта размером 8–12 см и 1–3 мм вблизи его границ. Такие величины, хотя и существенно уступающие разрешению рентгеновской компьютерной томографии и интроскопии магнитного резонанса, вполне устраивают медиков-онкологов, поскольку контраст диффузионных томограмм, визуализирующих рак, оказывается удовлетворительным для постановки правильного диагноза [7]. Однако, несмотря на стремительный прогресс компьютерных технологий, до сих пор не существует быстродействующих алгоритмов, реализующих нелинейные методы ДОТ, которые позволили бы получать изображения в реальном времени. Время реконструкции диффузионных томограмм продолжает оставаться недопустимо большим и составляет десятки минут в 2D случае и часы в 3D случае (см., напр., [2, 3, 8]). По этой причине исследователи не прекращают поиски компромисса между точностью и скоростью реконструкции, разрабатывая все новые и новые приближенные методы, которые позволяют упрощенно формулировать и (или) решать обратную задачу ДОТ. Среди

приближенных методов наибольшее распространение получили так называемые пертурбационные методы реконструкции [9–13], пренебрегающие нелинейностью обратной задачи ДОТ и сводящие ее к линейному интегральному уравнению Фредгольма первого рода. В итоге такой подход позволяет ограничиться однократным обращением системы линейных алгебраических уравнений, описывающих дискретную модель реконструкции, и уменьшить время восстановления изображения.

В настоящей статье мы исследуем пертурбационную модель реконструкции, предложенную В.В.Любимовым в [14, 15] и развитую нами в предыдущих работах [16–18] для случая импульсного режима регистрации оптического сигнала. Согласно этой модели решению подлежит следующее интегральное уравнение [17, 18]:

$$g(\mathbf{r}_s, t_s, \mathbf{r}_d, t_d) = \int_V [W_{\mu_a}(\mathbf{r}_s, t_s, \mathbf{r}_d, t_d, \mathbf{r}) \delta\mu_a(\mathbf{r}) + W_D(\mathbf{r}_s, t_s, \mathbf{r}_d, t_d, \mathbf{r}) \delta D(\mathbf{r})] d^3r, \quad (1)$$

где

$$W_{\mu_a}(\mathbf{r}_s, t_s, \mathbf{r}_d, t_d, \mathbf{r}) = c \int_{t_s}^{t_d} P(\mathbf{r}, t | (\mathbf{r}_s, t_s) \rightarrow (\mathbf{r}_d, t_d)) dt, \quad (2)$$

$$W_D(\mathbf{r}_s, t_s, \mathbf{r}_d, t_d, \mathbf{r}) = -\frac{1}{D} \int_{t_s}^{t_d} P(\mathbf{r}, t | (\mathbf{r}_s, t_s) \rightarrow (\mathbf{r}_d, t_d)) \times \left[ c\mu_a + \frac{\partial}{\partial t} \ln G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, t - t_s) \right] dt. \quad (3)$$

Здесь  $(\mathbf{r}_s, t_s)$  и  $(\mathbf{r}_d, t_d)$  – пространственно-временные точки, определяющие положение соответственно источника и приемника на границе исследуемого рассеивающего объекта объемом  $V$ ;  $g(\mathbf{r}_s, t_s, \mathbf{r}_d, t_d)$  – результат измерения, непосред-

А.Б.Коновалов, В.В.Власов. ФГУП «Российский федеральный ядерный центр – ВНИИТФ им. Е.И.Забабахина», Россия, Челябинская обл., 456770 Снежинск, ул. Васильева, 13; email: a\_konov@mail.vega-int.ru

венно используемый для реконструкции;  $W_{\mu_a}(r_s, t_s, r_d, t_d, r)$  и  $W_D(r_s, t_s, r_d, t_d, r)$  – весовые функции, учитывающие вклад от каждой точки объекта в величину  $g(r_s, t_s, r_d, t_d)$ ;  $c$ ,  $\mu_a$  и  $D$  – соответственно скорость, коэффициенты поглощения и диффузии света в объекте;  $\delta\mu_a(r)$  и  $\delta D(r)$  – локальные пространственные возмущения оптических параметров  $\mu_a$  и  $D$ ;  $G(r-r', t-t')$  – функция Грина нестационарного уравнения диффузии;  $P(r, t | (r_s, t_s) \rightarrow (r_d, t_d))$  – функция, имеющая смысл условной плотности вероятности того, что фотон, мигрирующий из точки  $(r_s, t_s)$  в точку  $(r_d, t_d)$ , в некоторый промежуточный момент времени  $t$  окажется в точке пространства  $r \in V$ . Согласно [16] для  $P(r, t | (r_s, t_s) \rightarrow (r_d, t_d))$  справедливо соотношение

$$P(r, t | (r_s, t_s) \rightarrow (r_d, t_d)) = \frac{G(r-r_s, t-t_s)G(r_d-r, t_d-t)}{G(r_d-r_s, t_d-t_s)}. \quad (4)$$

Результат измерения  $g(r_s, t_s, r_d, t_d)$ , называемый нами времяразрешенной оптической проекцией [17, 18], определяемый выражением

$$g(r_s, t_s, r_d, t_d) = -\ln \frac{\Gamma(r_s, t_s, r_d, t)}{\Gamma_0(r_s, t_s, r_d, t)} \Big|_{t=t_d}, \quad (5)$$

где  $\Gamma(r_s, t_s, r_d, t)$  – временная функция рассеяния точки (ФРТ), регистрируемая приемником в точке  $r = r_d$ , от источника, расположенного в точке  $r = r_s$ , в импульсном режиме сбора данных; индекс 0 соответствует однородному рассеивающему объекту, не возмущенному присутствием оптических неоднородностей. Важнейшей особенностью модели (1)–(3) является то обстоятельство, что времяразрешенная оптическая проекция (5) определяется для одного единственного времени задержки регистрации приемником  $t_d - t_s$ . Это означает, что в принципе для реконструкции изображения необходимо знать не всю временную ФРТ, а только один из ее отсчетов. Такой подход позволяет достичь наилучшего пространственного разрешения метода посредством выбора времени задержки регистрации приемником. В настоящей статье мы концентрируем внимание не на скорости, а именно на точности реконструкции диффузионных томограмм. Мы демонстрируем принципиальную возможность получения с использованием модели (1)–(3) разрешения, которое не только не уступает, но даже превышает разрешение точных многошаговых алгоритмов ДОТ. Что касается скорости реконструкции, то время счета на данном этапе исследований не оптимизируется, а возможность его уменьшения обсуждается в разд.4.

Оценивая предельное разрешение, мы сравниваем по точности три стадии реализации модели (1)–(3): реконструкцию по прямым линиям с использованием инверсии Радона [19], реконструкцию по наиболее вероятным траекториям фотонов с применением метода средних траекторий [16, 18, 20–24] и реконструкцию, основанную на использовании полных банановидных распределений траекторий фотонов [17]. Метод реконструкции по прямым линиям базируется на допущении о прямолинейности и регулярности траекторий распространения сигнала, совершенно не учитывает диффузный характер миграции фотонов в рассеивающем объекте и поэтому является весьма грубым методом решения обратной задачи ДОТ. Метод средних траекторий оперирует не прямыми линиями, а среднестатистическими траекториями фотонов, которые изгибаются вблизи границ рассеивающей среды

вследствие лавинообразной миграции фотонов за ее пределы. Средние траектории вполне корректно определяют массивы точек объекта, сигналы от которых вносят максимальный вклад в регистрируемый сигнал. Вкладами же от других точек объекта пренебрегается. И только метод реконструкции, основанный на использовании банановидных распределений траекторий, учитывает вклад в сигнал от каждой точки объекта. По этой причине из трех перечисленных данный метод является наиболее адекватным методом реконструкции с точки зрения соответствия его точной модели, лежащей в основе решения прямой задачи ДОТ (уравнение переноса, его диффузионное приближение или метод Монте-Карло).

Для оценки разрешения в случае реконструкции по прямым линиям мы используем аналитические соотношения для ФРТ и модуляционной передаточной функции (МПФ), вывод которых приводится в разд.2. Оценку разрешения в двух других случаях мы получаем, анализируя результаты численного эксперимента, в рамках которого реконструируются прямоугольные рассеивающие объекты с круглыми поглощающими неоднородностями. Описанию численного эксперимента, демонстрации и анализу его результатов посвящен разд.3. В разд.4 обсуждаются и анализируются полученные оценки разрешения.

## 2. Теоретический подход к оценке разрешения

Для получения оценок предельного разрешения используем подход, разработанный нами для случая рентгеновской томографии [25] и основанный на аппроксимации диффузионного томографа линейным фильтром, инвариантным к пространственному сдвигу. Данный подход предполагает применение для оценки качества изображения таких характеристик, как ФРТ и МПФ. Разумеется, в общем случае любая система визуализации, использующая диффузно рассеянное излучение, является нелинейной и пространственно-вариантной [26]. Однако, как показывают проведенные ранее исследования (см., напр., [6]), модель линейного пространственно-инвариантного фильтра оказывается удобной и полезной для грубых оценок характеристик качества изображения в локализованных областях диффузионных томограмм, где нелинейностью и пространственной варианностью в первом приближении можно пренебречь. Например, для нахождения предельного разрешения следует оценить характеристики качества изображения в центральной области томограммы, где размытие воспроизводимых пространственных структур максимально велико.

### 2.1. ФРТ на оптической проекции

Рассмотрим геометрию плоского слоя для 2D случая (рис.1). Пусть  $t_s = 0$ , источник находится в точке  $r_s(0, a)$ , а приемник – в точке  $r_d(l, -a)$ . Поставим задачу рассчитать времяразрешенную оптическую проекцию для точечной поглощающей неоднородности  $\delta\mu_a(r) = \delta(x, y)$ , расположенной в начале координат, как функцию расстояния  $l$ . Согласно (1) и (2) будем иметь

$$g_{\delta}(l) = \int_S^c \int_0^{t_d} P(r, t | (r_s, 0) \rightarrow (r_d, t_d)) dt \delta(x, y) dx dy, \quad (6)$$

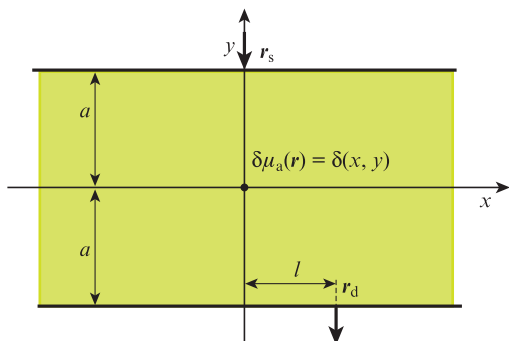


Рис.1. Геометрия регистрации данных.

где  $S$  – площадь рассеивающего 2D объекта. В наших предыдущих работах (см., напр., [16, 24, 27, 28]) показано, что стандартное среднеквадратичное отклонение (СКО) фотонов от их средней траектории, характеризующее толщину светового «пучка» в рассеивающем объекте и собственно размытие изображения, слабо зависит от геометрии объекта. На этом основании далее будем пользоваться соотношениями для бесконечного пространства, имеющими наиболее простой аналитический вид. В 2D случае для бесконечного пространства получаем выражение

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{\exp[-\mu_a c(t - t')]}{4\pi Dc(t - t')} \times \exp\left[-\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{4Dc(t - t')}\right], \quad (7)$$

$$P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_s, 0) \rightarrow (r_d, t_d) = \frac{t_d}{4\pi Dct(t_d - t)} \times \exp\left\{-\frac{[xt_d - x_d t - x_s(t_d - t)]^2 + [yt_d - y_d t - y_s(t_d - t)]^2}{4Dc t t_d (t_d - t)}\right\} = \frac{t_d}{4\pi Dct(t_d - t)} \exp\left\{-\frac{[xt_d - lt]^2 + [yt_d - a(t_d - 2t)]^2}{4Dc t t_d (t_d - t)}\right\}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6) и интегрируя по 2D пространству, приходим к следующему однократному интегралу:

$$g_s(l) = \frac{t_d}{4\pi D} \int_0^{t_d} \exp\left[-\frac{l^2 t^2 + a^2(t_d - 2t)^2}{4Dc t t_d (t_d - t)}\right] \frac{dt}{t(t_d - t)}, \quad (9)$$

который заменой  $\alpha = t/(t_d - t)$  приводится к виду

$$g_s(l) = \frac{\exp[a^2 l(2Dc t_d)]}{4\pi D} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{a^2 + l^2}{4Dc t_d} \alpha - \frac{a^2}{4Dc t_d} \frac{1}{\alpha}\right) \frac{d\alpha}{\alpha}. \quad (10)$$

Воспользовавшись таблицами [29], получим

$$g_s(l) = \frac{\exp[a^2 l(2Dc t_d)]}{2\pi D} K_0\left(\frac{a\sqrt{a^2 + l^2}}{2Dc t_d}\right), \quad (11)$$

где  $K_0(\xi)$  – функция Макдональда нулевого порядка. Выражение (11) по существу представляет собой ФПТ на оптической проекции  $\text{PSF}_{\text{прj}}(l)$ , окончательное выражение для которой получим после ее нормировки согласно условию

$$\int_{-\infty}^\infty \text{PSF}_{\text{прj}}(l) dl = 1.$$

Положив

$$\text{PSF}_{\text{прj}}(l) = AK_0\left(\frac{a\sqrt{a^2 + l^2}}{2Dc t_d}\right),$$

для коэффициента  $A$  будем иметь выражение [30]

$$A = \left[2 \int_0^\infty K_0\left(\frac{a\sqrt{a^2 + l^2}}{2Dc t_d}\right) dl\right]^{-1} = \left[2 \int_a^\infty K_0\left(\frac{a\beta}{2Dc t_d}\right) \frac{\beta d\beta}{\sqrt{\beta^2 - a^2}}\right]^{-1} = \frac{a}{2\pi Dc t_d} \exp\left(\frac{a^2}{2Dc t_d}\right). \quad (12)$$

Таким образом, для функции  $\text{PSF}_{\text{прj}}(l)$  получаем соотношение

$$\text{PSF}_{\text{прj}}(l) = \frac{\exp[a^2 l(2Dc t_d)]}{2\pi Dc t_d} K_0\left(\frac{a\sqrt{a^2 + l^2}}{2Dc t_d}\right). \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что при  $a \geq 3\sqrt{Dc t_d}$  можно воспользоваться асимптотическим приближением функции Макдональда

$$K_n(\xi) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \exp(-\xi).$$

Тогда

$$\text{PSF}_{\text{прj}}(l) \simeq \left(\frac{a}{4\pi Dc t_d \sqrt{a^2 + l^2}}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{a^2 - a\sqrt{a^2 + l^2}}{2Dc t_d}\right). \quad (14)$$

Выражение (14) слабо зависит от параметра  $a$  и хорошо аппроксимируется функцией Гаусса с ядром  $\sigma = \sqrt{2Dc t_d}$ :

$$\text{PSF}_{\text{прj}}(l) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma^2}\right). \quad (15)$$

Этот результат хорошо согласуется с оценкой Любимова [31], полученной для аппаратной функции, описывающей перенос изображения через плоский слой рассеивающей среды.

## 2.2. Оценка разрешения в случае реконструкции по прямым линиям

Опыт рентгеновской томографии свидетельствует о том, что фактически не существует стабильных алгоритмов, позволяющих в процессе реконструкции по прямым линиям компенсировать размытие структур, полученное при проецировании. Локальных успехов, конечно, можно достичь, применив, например, специальную фильтрацию проекций в частотной области [32, 33]. Однако при этом, улучшая пространственное разрешение, мы рискуем получить томограмму с артефактами, затрудняющими распознавание низкочастотных структур [20, 21, 34]. Покажем с помощью простых аналитических выкладок, что при ДОТ, так же как и при рентгеновской томографии, мало шансов компенсировать размытие на проекции, если использовать стандартные алгоритмы реконструкции по прямым.

Поскольку точечная неоднородность  $\delta\mu_d(\mathbf{r}) = \delta(x, y)$  обладает аксиальной симметрией, то для обратного проецирования функции (13) вместо формул обращения Радона можно использовать одну из форм инверсии Абеля [19]:

$$\begin{aligned} \text{PSF}_{\text{bp}}(r) &= -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^\infty \frac{\text{PSF}_{\text{пр}}(l) l dl}{\sqrt{l^2 - r^2}} \\ &= -\frac{a \exp[a^2/(2Dct_d)]}{2\pi^2 Dct_d} \frac{d}{dr} \int_r^\infty K_0\left(\frac{a\sqrt{a^2 + l^2}}{2Dct_d}\right) \frac{l dl}{\sqrt{l^2 - r^2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Выполняя последовательно интегрирование [30] и дифференцирование в (16), получаем следующее выражение для ФРТ восстановленного изображения:

$$\text{PSF}_{\text{bp}}(r) = \frac{a}{4\pi Dct_d \sqrt{a^2 + r^2}} \exp\left(-\frac{a^2 - a\sqrt{a^2 + r^2}}{2Dct_d}\right). \quad (17)$$

ФРТ (17), так же как и ФРТ (14), при  $a \geq 3\sqrt{Dct_d}$  слабо зависит от параметра  $a$  и хорошо аппроксимируется функцией Гаусса с ядром  $\sigma = \sqrt{2Dct_d}$ :

$$\text{PSF}_{\text{bp}}(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right). \quad (18)$$

Очевидно, что функции (18) и (15) совпадают с точностью до нормировочного коэффициента. Таким образом, после реконструкции по прямым линиям мы имеем точно такое же размытие точечной неоднородности, каким оно было на проекции.

Для того чтобы получить оценку МПФ, необходимо взять 2D преобразование Фурье от  $\text{PSF}_{\text{bp}}(r)$ , которое, как известно [25, 35], в случае аксиальной симметрии трансформируется в преобразование Ханкеля. Таким образом, для МПФ в случае реконструкции по прямым линиям будем иметь выражение [30]

$$\begin{aligned} \text{MTF}_{\text{bp}}(v) &= \left| 2\pi \int_0^\infty \text{PSF}_{\text{bp}}(r) J_0(2\pi vr) r dr \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) J_0(2\pi vr) r dr \right| \\ &= \frac{\pi^{3/2} \sigma v}{\sqrt{2}} \exp(-\pi^2 \sigma^2 v^2) [I_{-1/2}(\pi^2 \sigma^2 v^2) - I_{1/2}(\pi^2 \sigma^2 v^2)] \\ &= \exp(-2\pi^2 \sigma^2 v^2) = \exp(-4\pi^2 Dct_d v^2), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $v$  – радиальная пространственная частота;  $J_0(\xi)$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка;  $I_n(\xi)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода  $n$ -го по-

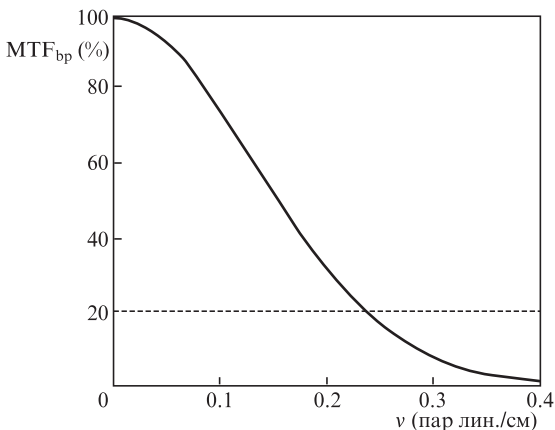


Рис.2. МПФ для случая реконструкции по прямым линиям.

рядка. Зависимость (19) для параметров  $c = 0.0214$  см/пс,  $D = 0.034$  см и  $t_d = 1000$  пс представлена на рис.2. Выбранные значения оптических параметров  $D$  и  $c$  являются типичными, например для ткани молочной железы [18]. Что касается времени задержки регистрации приемником, то его выбор обсуждается в разд.4. Из рис.2 видно, что 20%-ному контрасту (условный критерий визуального разрешения по Рэлею [35]) соответствует пространственная частота 0.24 пар лин./см или размер структуры 2.1 см. Подобный результат существенно уступает оценкам разрешения, полученным в [6], и, конечно же, оставляет желать лучшего.

### 3. Численный эксперимент

#### 3.1. Постановка эксперимента

Для оценки характеристик качества диффузионных томограмм в случаях применения метода средних траекторий фотонов и использования банановидных распределений траекторий мы провели численный эксперимент, в рамках которого задавались рассеивающие объекты прямоугольной формы размером  $10 \times 8$  см с круглыми поглощающими неоднородностями, моделировались времяразрешенные оптические проекции и рассчитывались средние траектории и банановидные распределения для разных пар источник–приемник, а также выполнялись соответствующие процедуры реконструкции. Всего мы использовали 32 источника и 32 приемника. Источники и приемники располагались на противоположных сторонах объектов (гранях  $x = a$  и  $x = -a$  (рис.1)) поочередно и эквидистантно. Поскольку мы исследовали режим «на просвет», связи между источниками и приемниками, расположенными на одной стороне объекта, игнорировались. Таким образом, число полезных связей, которые используются для реконструкции, составило  $32 \times 16$  (32 источника и 16 приемников). Расчеты проводились для семи объектов. Оптические параметры объектов имели следующие значения:  $c = 0.0214$  см/пс,  $D = 0.034$  см и  $\mu_a = 0.05$  см<sup>-1</sup>. Для оценки ФРТ рассматривался объект, содержащий расположенную в центре поглощающую неоднородность диаметром 0.06 см с коэффициентом поглощения  $\mu_a = 0.5$  см<sup>-1</sup>. Для оценки МПФ использовались шесть объектов, каждый из которых содержал по две круглые поглощающие неоднородности одинакового диаметра с коэффициентом поглощения  $\mu_a = 0.075$  см<sup>-1</sup>. Неоднородности располагались вблизи центров объектов и были удалены друг от друга на расстояние, равное их диаметру. Диапазон диаметров неоднородностей различных объектов составлял 1.2–0.2 см с шагом 0.2 см. С целью моделирования времяразрешенных оптических проекций методом конечных элементов решалось нестационарное уравнение диффузии с мгновенным точечным источником. Временные ФРТ  $\Gamma(r_s, t_s = 0, r_d, t)$  для каждой пары источник–приемник вычислялись как потоки фотонов на границах объектов в соответствии с законом Фика [36]. Времяразрешенные оптические проекции рассчитывались по формуле (5) для времени задержки  $t_d = 1000$  пс.

Для реконструкции поглощающих неоднородностей мы использовали дискретную модель, согласно которой задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$g = \hat{W}f, \quad (20)$$

где  $\mathbf{g} = \{g_i\}$  – вектор времяразрешенных оптических проекций;  $\mathbf{f} = \{f_i\}$  – вектор дискретных значений реконструируемой функции;  $\hat{W} = \{W_{ij}\}$  – матрица весовых коэффициентов. В случае применения метода средних траекторий матрица весовых коэффициентов определяется на основании подхода, подробно описанного в [18, 22–24]. Для регуляризации процедуры реконструкции вместо бесконечно узких средних траекторий мы использовали банановидные полосы конечной ширины с вершинами в точках расположения источников и приемников. Формула для вычисления весовых коэффициентов имеет вид

$$W_{ij} = cS_{ij}/(v_{ij}d), \tag{21}$$

где  $S_{ij}$  – площадь области пересечения  $i$ -й банановидной полосы с  $j$ -й ячейкой дискретизации в области реконструкции;  $d$  – линейный размер ячейки;  $v_{ij}$  – дискретное значение средней скорости миграции фотонов, для которой справедливо выражение

$$v(t) = |d\mathbf{R}(t)/dt|, \tag{22}$$

где радиус-вектор

$$\mathbf{R}(t) = \int_V \mathbf{r}P(\mathbf{r}, t | (\mathbf{r}_s, 0) \rightarrow (\mathbf{r}_d, t_d)) d^3r \tag{23}$$

описывает траекторию центра масс распределения  $P(\mathbf{r}, t | (\mathbf{r}_s, 0) \rightarrow (\mathbf{r}_d, t_d))$ , которая собственно и является средней траекторией фотонов. При использовании для реконструкции банановидных распределений траекторий матрица весовых коэффициентов  $\hat{W}$  получается в результате дискретизации весовой функции  $W_{\mu_a}(\mathbf{r}_s, t_s = 0, \mathbf{r}_d, t_d, \mathbf{r})$ , рассчитанной для каждой пары источник–приемник в соответствии с подходом, изложенным в [17]. Этот подход основан на выводе точного аналитического выражения для функции  $P(\mathbf{r}, t | (\mathbf{r}_s, 0) \rightarrow (\mathbf{r}_d, t_d))$  в полупространстве, ее численном интегрировании по времени  $t$  и применении метода центрально-симметричного отображения с целью нахождения весовой функции в случае геометрии плоского слоя.

В обоих случаях для обращения системы (20) мы использовали итерационный мультипликативный алгебраический алгоритм реконструкции (МААР), модифицированный нами с целью улучшения сходимости итерационного процесса. Суть модификации заключается в том, чтобы учесть неравномерность распределения сумм весовых коэффициентов по ячейкам области реконструкции. Формула для введения поправок в решение на каждой  $(s + 1)$ -й итерации имеет вид [17, 18, 22–24]

$$f_j^{(s+1)} = f_j^{(s)} \left( \frac{g_i}{\sum_j W_{ij} f_j^{(s)}} \right)^{\lambda N W_{ij} / \sum_i W_{ij}}, \tag{24}$$

где  $\lambda \in (0, 1)$  – параметр, управляющий скоростью сходимости итерационного процесса;  $N$  – полное число связей источник–приемник, используемых для реконструкции. Для обеспечения максимальной точности воспроизведения структур реконструкцию всех семи объектов мы выполняли на очень мелкой сетке ( $625 \times 500$ ) при малом значении управляющего параметра ( $\lambda = 0.05$ ). В этом случае регуляризованное решение достигается после нескольких десятков итераций при использовании метода средних

траекторий и только после 5000–10000 итераций при использовании распределений траекторий.

### 3.2. Результаты реконструкции и их анализ

На рис.3,а и б приведены результаты реконструкции объекта для оценки ФРТ, полученные соответственно с

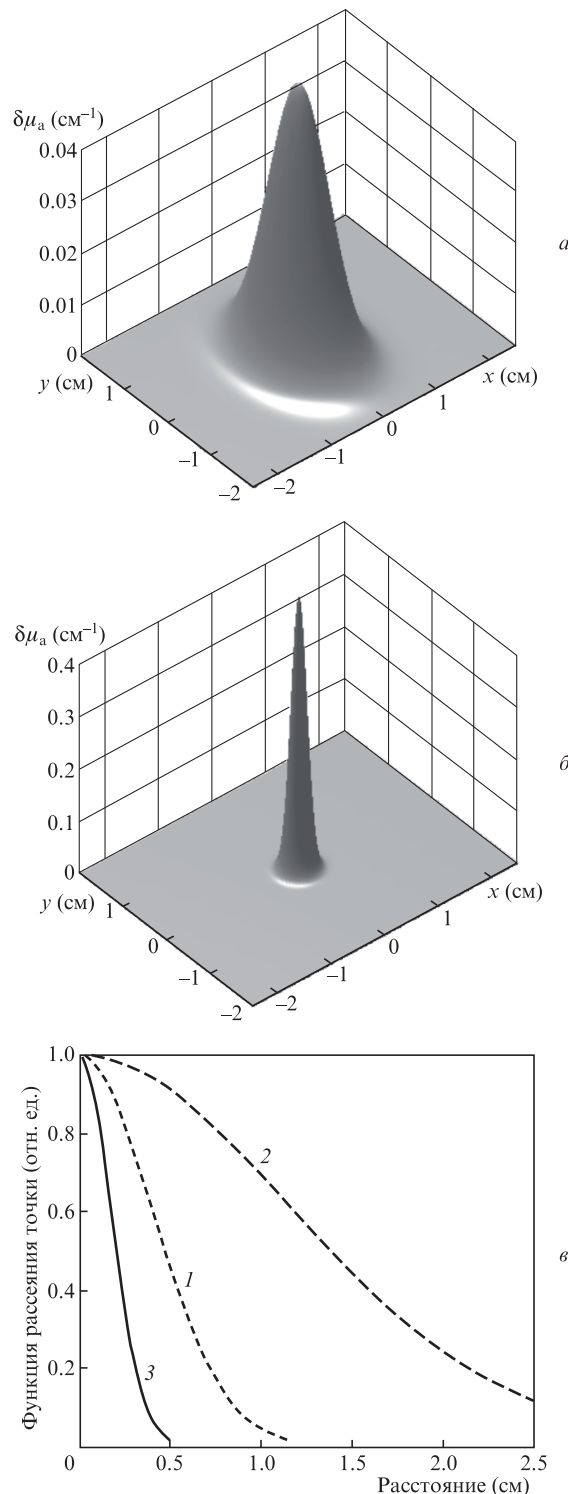


Рис.3. Результаты реконструкции объекта для оценки ФРТ по методу средних траекторий (а) и с использованием банановидных распределений (б), а также нормированные профили ФРТ для методов средних траекторий (1), прямых линий (2) и с использованием банановидных распределений (3) (в).

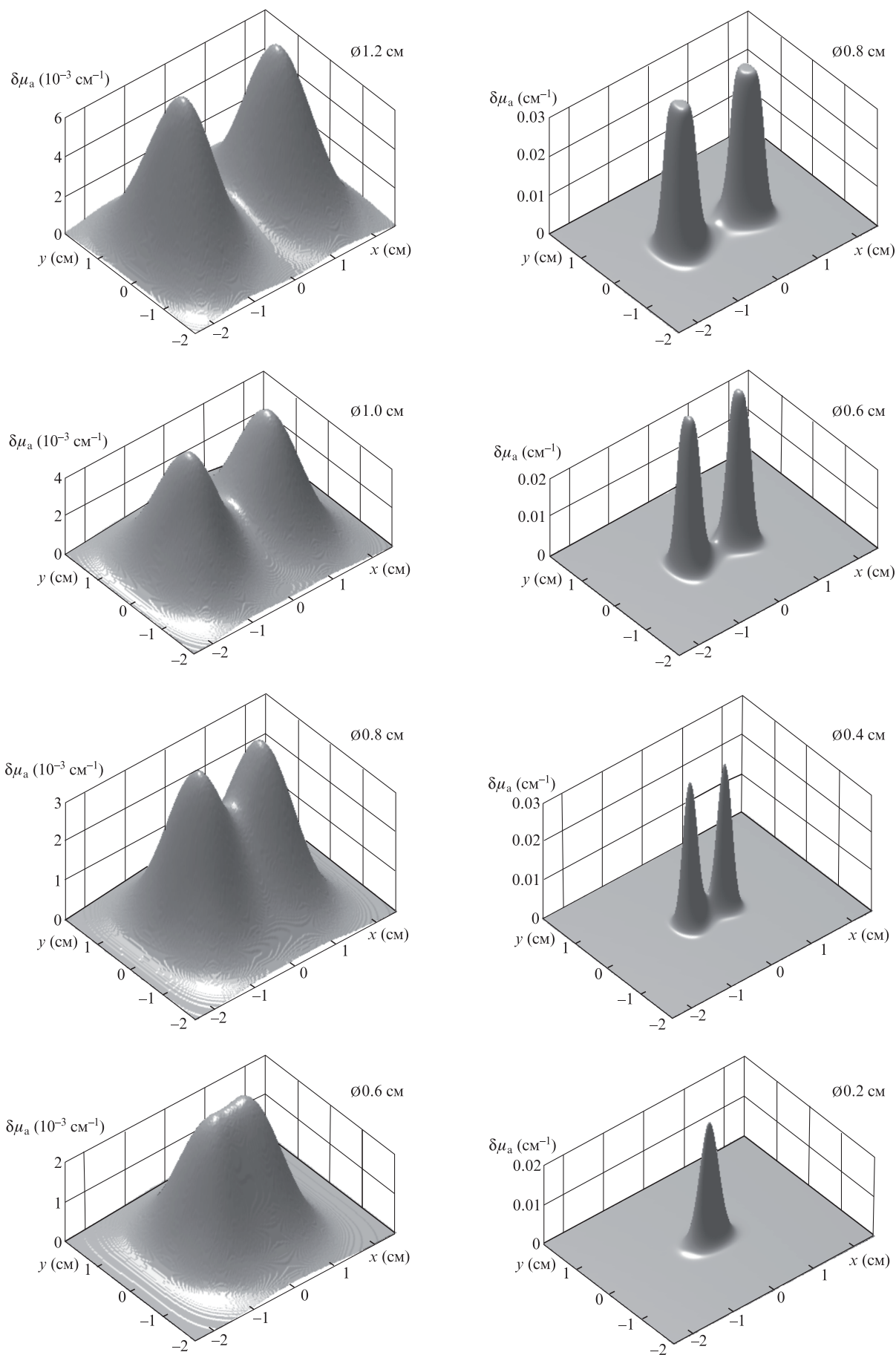


Рис.4. Результаты реконструкции объектов с двумя поглощающими неоднородностями.

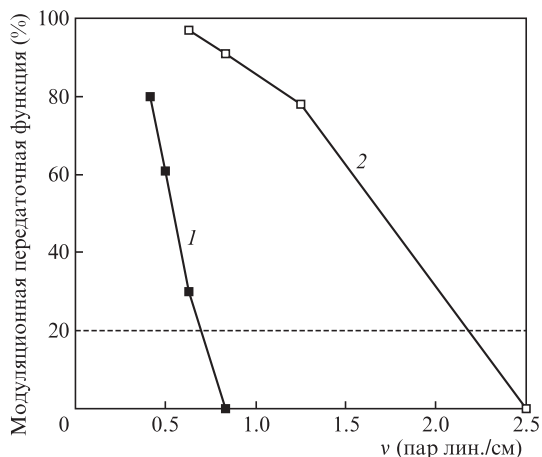


Рис.5. МПФ для случаев реконструкции объекта по средним траекториям (1) и с использованием банановидных распределений (2).

применением метода средних траекторий и с использованием банановидных распределений. Здесь и далее результаты реконструкции представляются в виде трехмерных графиков  $\delta\mu_a(x, y)$ , причем визуализируется только центральная часть томограммы размером  $5 \times 4$  см. На рис.3, в показаны нормированные по амплитуде профили полученных ФРТ и профиль теоретической ФРТ  $PSF_{bp}(r)$  (см. выражение (17)), который также нормирован по амплитуде на интервал  $(0, 1]$ . Хорошо видно, что все ФРТ имеют различную ширину на половине высоты. Это свидетельствует о том, что в отличие от грубой модели реконструкции по прямым линиям модели, учитывающие характер распространения света в объекте, позволяют минимизировать размытие структур, полученное при проецировании точечной неоднородности. Наименьшее размытие и, следовательно, максимальную точность воспроизведения структур дает метод, использующий банановидные распределения траекторий фотонов.

На рис.4 приведены результаты реконструкции объектов с двумя поглощающими неоднородностями. В левом столбце представлены томограммы, восстановленные по методу средних траекторий, а в правом – результаты реконструкции с использованием банановидных распределений. Диаметр неоднородностей указан в правом верхнем углу каждого изображения. Видно, что предельное разрешение близко к 0.8 см в случае применения метода средних траекторий и составляет 0.2–0.4 см в случае, когда для реконструкции используются полные распределения траекторий фотонов. Более точно предельное разрешение можно получить, если построить МПФ. Для этого по профилю каждого изображения на рис.4 оценивается коэффициент передачи модуляции как относительная глубина провала между двумя пиками. Диаметрам неоднородностей ставятся в соответствие дискретные значения пространственной частоты. В качестве МПФ рассматривается зависимость коэффициента передачи модуляции от пространственной частоты (рис.5). Из рис.5 видно, что с контрастом не менее 20% будут воспроизводиться структуры с частотами не более 0.7 и 2.2 пар лин./см (т. е. размером не менее 0.72 и 0.23 см) при использовании метода средних траекторий и полных банановидных распределений соответственно. Последняя цифра, несомненно, заслуживает внимания, поскольку характеризует разрешение, превышающее разрешение точных многошаговых алгоритмов ДОТ.

## 4. Обсуждение результатов

В работах [14, 31, 37] Любимов выдвинул гипотезу о том, что пространственное разрешение импульсной ДОТ может быть оценено как СКО фотонов от их средней траектории, которое характеризует ширину банановидного распределения траекторий фотонов. В случае пертурбационной модели (1)–(3) для СКО мы имеем выражение [14, 16, 18, 20–24, 27, 28, 37]

$$\Delta(t) = \left[ \int_V |\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)|^2 P(\mathbf{r}, t | (r_s, t_s) \rightarrow (r_d, t_d)) d^3r \right]^{1/2}. \quad (25)$$

Статистические характеристики распределений фотонов, включая и второй момент  $\Delta(t)$ , исследовались нами для различных геометрий рассеивающего объекта в ряде работ [16, 18, 24, 27, 28, 37]. Доказано, что величина  $\Delta(t)$  слабо зависит от геометрии объекта, особенно это касается центральной области, наиболее удаленной от границ объекта, где СКО принимает максимальные значения. Воспользовавшись формулами (8), (23) и (25), нетрудно показать, что в случае бесконечного 2D пространства справедливо соотношение

$$\Delta(t) = \left[ \frac{4Dct(t_d - t)}{t_d} \right]^{1/2}. \quad (26)$$

Максимум функции (26) достигается при  $t = t_d/2$ :

$$\Delta_{\max} = \Delta(t_d/2) = \sqrt{Dct_d}. \quad (27)$$

Подставляя в (27) выбранные в разд.2 значения оптических параметров и  $t_d$ , получаем  $\Delta_{\max} \simeq 0.85$  см. Сравнивая это значение с оценками разрешения, полученными в разд.2 и 3, мы видим, что СКО фотонов от их средней траектории действительно может служить мерой пространственного разрешения в пертурбационной ДОТ. И для предельного разрешения  $\Delta r_{\lim}$  можно записать следующее выражение:

$$\Delta r_{\lim} = \gamma \Delta_{\max}. \quad (28)$$

При этом коэффициент пропорциональности  $\gamma$  близок к 0.9 в случае реконструкции по средним траекториям, равен  $\sim 2.5$  в случае реконструкции по прямым линиям и близок к 0.3, если для восстановления томограмм используются банановидные распределения траекторий фотонов.

Следует отметить, что превосходный результат в последнем случае получен во многом благодаря уникальной возможности использовать в модели (1)–(3) для реконструкции времяразрешенные оптические проекции, которые определяются для одного единственного значения времени задержки регистрации приемниками. Многошаговые алгоритмы импульсной ДОТ не обладают такой возможностью, поскольку используют для реконструкции интегральные данные, такие как интегрированная интенсивность, среднее время пролета фотонов, результаты преобразования Меллина–Лапласа от временной ФРТ и др. (см., напр., [1]). Сделанный выбор времени задержки (1000 пс) обусловлен желанием минимизировать размытие неоднородностей и, следовательно, пространственное разрешение. Понятно, что в соответствии с формулами (27) и (28) мы заинтересованы в выборе предельно малого значения времени задержки. С другой стороны, это зна-

чение должно обеспечивать отношение сигнал/шум, приемлемое для качественной реконструкции томограмм. Согласно исследованиям [18] минимальное время задержки, удовлетворяющее этому требованию для данной геометрии, близко именно к 1000 пс. Однако, несмотря на то что выбор времени задержки сделан нами обоснованно, исходя из практических соображений, шум в настоящей работе не моделировался, и для реконструкции использовались «идеальные» (незашумленные) данные. Поэтому полученные количественные оценки следует считать оценками теоретического предела разрешения. Это означает, что в реальном физическом эксперименте могут быть получены несколько менее оптимистичные результаты.

Выше было отмечено, что скорость счета на данном этапе исследований не оптимизировалась. В случае использования банановидных распределений время реконструкции одного изображения на персональном компьютере Intel PC (1.7-GHz Pentium 4, 512-MB RAM) в среде MATLAB составляет несколько часов. По нашим оценкам, посредством оптимального выбора размера сетки и управляющего параметра  $\lambda$ , а также путем оптимизации кода и использования более быстрой, нежели MATLAB, программной среды скорость счета может быть увеличена в несколько раз. Особый интерес представляет применение объектно-ориентированного подхода для реализации нашего итерационного алгоритма на графических процессорах. В этом случае, как свидетельствует опыт наших коллег [38], выигрыш в скорости счета может достигать двух и более порядков.

## 5. Заключение

В настоящей работе получены оценки теоретического предела пространственного разрешения импульсной ДОТ, основанной на пертурбационной модели. Показано, что данная модель, использующая для реконструкции время-разрешенные оптические проекции, в принципе позволяет получить пространственное разрешение, которое не уступает разрешению точных многошаговых алгоритмов ДОТ и даже превышает его. Для того чтобы в достаточной мере компенсировать размытие структур, полученное при регистрации диффузно рассеянного сигнала, в процессе реконструкции необходимо использовать полные банановидные распределения траекторий фотонов, которые позволяют учесть вклад от каждой точки объекта в регистрируемый сигнал. Банановидные распределения рассчитываются полуаналитически с применением диффузионного приближения уравнения переноса.

Можно ожидать, что при условии оптимизации скорости счета рассмотренный метод ДОТ окажется конкурентоспособным и востребованным на практике и будет использоваться, например, в оптической маммографии для реконструкции функциональных параметров молочной железы.

Авторы выражают признательность В.В.Любимову, без теоретических исследований которого (см., напр., [14, 15, 31, 37]) публикация настоящей статьи была бы невозможна.

1. Arridge S.R. *Inverse Prob.*, **15**, R41 (1999).
2. Hielscher A.H., Klose A.D., Hanson K.M. *IEEE Trans. Med. Imaging*, **18**, 262 (1999).

3. Schweiger M., Arridge S.R., Nissilä I. *Phys. Med. Biol.*, **50**, 2365 (2005).
4. Dehghani H., Eames M.E., Yalavarthy P.K., Davis S.C., Srinivasan S., Carpenter C.M., Pogue B.W., Paulsen K.D. *Commun. Numer. Methods Eng.*, **25**, 711 (2008).
5. Arridge S.R., Schotland J.C. *Inverse Prob.*, **25**, 123010 (2009).
6. Pogue B.W., Davis S.C., Song X., Brooksby B.A., Dehghani H., Paulsen K.D. *J. Biomed. Opt.*, **11**, 033001 (2006).
7. O'Sullivan T.D., Cerussi A.E., Cuccia D.J., Tromberg B.J. *J. Biomed. Opt.*, **17**, 071311 (2012).
8. Enfield L.C., Gibson A.P., Everdell N.L., Delpy D.T., Schweiger M., Arridge S.R., Richardson C., Keshtgar M., Douek M., Hebden J.C. *Appl. Opt.*, **46**, 3628 (2007).
9. Kak A.C., Slaney M. *Principles of Computerized Tomographic Imaging* (New York: IEEE Press, 1988).
10. Feng S., Zeng Z.-A., Chance B. *Appl. Opt.*, **34**, 3826 (1995).
11. Arridge S.R. *Appl. Opt.*, **34**, 7395 (1995).
12. Markel V.A., Schotland J.C. *J. Opt. Soc. Am. A*, **18**, 1336 (2001).
13. Markel V.A., Schotland J.C. *Phys. Rev. E*, **70**, 056616 (2004).
14. Любимов В.В. *Оптика и спектроскопия*, **80**, 687 (1996).
15. Кравченко О.В., Любимов В.В. *Оптика и спектроскопия*, **89**, 119 (2000).
16. Lyubimov V.V., Kalintsev A.G., Kononov A.B., Lyamtsev O.V., Kravtzenyuk O.V., Murzin A.G., Golubkina O.V., Mordvinov G.B., Soms L.N., Yavorskaya L.M. *Phys. Med. Biol.*, **47**, 2109 (2002).
17. Kononov A.B., Vlasov V.V., Uglov A.S., Lyubimov V.V. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **8088**, 80880T (2011).
18. Коновалов А.Б. *Канд. дис.* (Снежинск, Российский федеральный ядерный центр – ВНИИТФ, 2012).
19. Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. *Вычислительная томография в газовой динамике и физике плазмы* (Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987).
20. Kononov A.B., Lyubimov V.V., Kutuzov I.I., Kravtzenyuk O.V., Murzin A.G., Mordvinov G.B., Soms L.N., Yavorskaya L.M. *J. Electron. Imaging*, **12**, 602 (2003).
21. Любимов В.В., Коновалов А.Б., Кутузов И.И., Кравченко О.В., Калинин А.Г., Мурзин А.Г., Голубкина О.В., Сомс Л.Н., Яворская Л.М. *Оптический журн.*, **70** (10), 37 (2003).
22. Коновалов А.Б., Власов В.В., Калинин А.Г., Кравченко О.В., Любимов В.В. *Квантовая электроника*, **36**, 1048 (2006).
23. Коновалов А.Б., Власов В.В., Могиленских Д.В., Кравченко О.В., Любимов В.В. *Квантовая электроника*, **38**, 588 (2008).
24. Kononov A.B., Vlasov V.V., Lyubimov V.V. *Optik*, **124**, 6000 (2013).
25. Kononov A.B., Vlasov V.V. *ISRN Sign. Process.*, **2013**, 356291 (2013).
26. Kononov A.B., Vlasov V.V., Kravtzenyuk O.V., Lyubimov V.V. *EURASIP J. Adv. Sign. Process.*, **2007**, 34747 (2007).
27. Волконский В.Б., Кравченко О.В., Любимов В.В., Миронов Е.П., Мурзин А.Г. *Оптика и спектроскопия*, **86**, 299 (1999).
28. Кравченко О.В., Любимов В.В. *Оптика и спектроскопия*, **88**, 670 (2000).
29. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции* (М.: Наука, 1981).
30. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Специальные функции* (М.: Наука, 1983).
31. Любимов В.В. *Оптика и спектроскопия*, **76**, 725 (1994).
32. Вайнберг Э.И., Казак И.А., Курозаев В.П. *ДАН СССР*, **257**, 89 (1981).
33. Gonzalez R.C., Woods R.E. *Digital Image Processing* (New Jersey: Prentice Hall, 2002).
34. Калинин А.Г., Калинин Н.А., Кравченко О.В., Любимов В.В. *Оптика и спектроскопия*, **99**, 162 (2005).
35. Papoulis A. *Systems and Transforms with Applications in Optics* (New York: McGraw-Hill, 1968).
36. Duderstadt J.J., Hamilton L.J. *Nuclear Reactor Analysis* (New York: Wiley, 1976).
37. Любимов В.В. *Оптика и спектроскопия*, **86**, 297 (1999).
38. Doronin A., Meglinski I. *Biomed. Opt. Express*, **2**, 2461 (2011).