

Модель оптической нелинейности воздуха в среднем ИК диапазоне длин волн

Ю.Э.Гейнц, А.А.Землянов

Представлена модель оптической нелинейности воздуха (атмосферного азота и кислорода), пригодная для использования при численных расчетах распространения излучения в области длин волн ~ 10 мкм. В модели учитываются электронный эффект Керра, нелинейности высших порядков, ионизация газовой среды электронным ударом, дисперсия групповой скорости импульса. Кроме того, рассмотрен вопрос о границах применимости приближения Друде для вычисления скорости ударной ионизации.

Ключевые слова: филаментация, дальний ИК диапазон, лазерное излучение.

1. Введение

Одним из наиболее ярких проявлений оптической нелинейности среды при распространении в ней мощного излучения является филаментация лазерного пучка. В основе данного явления лежит светоиндуцированное изменение показателя преломления среды, известное как оптический эффект Керра, которое приводит к самофокусировке пучка лазерного излучения [1]. Для наблюдения эффекта самофокусировки необходимо преодолеть естественную дифракцию пучка, приводящую к его расширению по мере распространения в среде. Это накладывает определенное пороговое условие на мощность излучения при заданной длине волны λ . Например, для воздуха при нормальном давлении критическая мощность самофокусировки P_c в области длин волн ~ 1 мкм составляет несколько гигаватт. Исторически первым лазерным источником, способным генерировать импульсы излучения такой мощности, стал фемтосекундный лазер на кристалле Ti:сапфира. Спектр генерации этого источника находится в ближнем ИК диапазоне и характеризуется несущей длиной волны $\lambda_0 = 750\text{--}900$ нм, а использование нелинейных преобразователей частоты дало возможность освоить видимый и УФ диапазоны.

Титан-сапфировый лазер является основным инструментом исследователей вот уже около двадцати лет, чем обусловлено то, что подавляющее большинство теоретических и расчетных работ по самофокусировке и филаментации излучения выполнено именно для этого спектрального диапазона (см. обзоры [1–5]). В то же время прогресс в лазерной технологии привел к появлению источников импульсного излучения гига- и тераваттной мощности в более длинноволновой части спектра. Здесь отметим исследования [6], где впервые с помощью техники четырехволнового смешения была получена генерация

вблизи 3 мкм, а также работу [7], в которой представлен твердотельный мультимиллиджоулевый субтераваттный лазер на $\lambda_0 = 3.9$ мкм.

Научный и практический интерес к средневолновому ИК диапазону лазерной генерации связан с открывающимися перспективами в спектроскопии атмосферных газов и примесей [8], имеющих полосы поглощения в средней ИК области. Это получение экстремально широкополосного источника когерентного излучения (ультрасуперконтинуума), простирающегося от УФ до средней ИК области, в процессе нелинейной временной компрессии импульсов [9], формирование протяженных плазменных каналов [10] для генерации излучения в терагерцевом диапазоне частот и передачи электричества, а также ряд других приложений.

В этой связи многообещающей выглядит идея использования излучения хорошо известного газового CO₂-лазера для наблюдения филаментации пучка и нелинейных трансформаций его спектра [11] в длинноволновом окне прозрачности атмосферы с центром на $\lambda \sim 10$ мкм [12]. В современных CO₂-лазерах используются рабочие смеси CO₂–N₂O–He под высоким давлением [13, 14], что позволяет существенно повысить мощность генерации таких источников до мультитераваттного уровня за счет укорочения импульса излучения до нескольких пикосекунд [15] и даже сотен фемтосекунд [16]. Важным преимуществом десятимикронного излучения является то, что при сравнительно небольшом поглощении в атмосфере, ~ 0.1 км⁻¹, вследствие квадратичного роста параметра P_c с увеличением длины волны излучения воздушная трасса способна без существенных потерь передавать лазерные импульсы мощностью до нескольких тераватт. При дальнейшем повышении мощности импульса реализуется самофокусировка пучка и возникают нелинейные потери, связанные главным образом с ионизацией и оптическим пробоем воздуха.

К настоящему времени нам известны лишь несколько работ [11, 17], в которых представлены результаты теоретического моделирования самофокусировки и филаментации высокомошных УКИ десятимикронного диапазона в воздухе. В данных работах установлены основные особенности взаимодействия тераваттного десятимик-

Ю.Э.Гейнц, А.А.Землянов. Институт оптики атмосферы им. В.Е.Зуева СО РАН, Россия, 634021 Томск, пл. Акад. Зуева, 1; e-mail: ygeints@iao.ru, zaa@iao.ru

Поступила в редакцию 23 января 2014 г., после доработки – 28 февраля 2014 г.

ронного излучения с газовой средой, а именно увеличение среднего сечения формирующихся при самофокусировке светового пучка филаментов и формирование аномально (в сравнении с видимым и ближним ИК диапазонами) протяженного плазменного канала. Причиной этого является то, что в поле излучения мощных импульсов CO₂-лазера изменяется сам характер ионизации среды. В отличие от преимущественно многофотонного поглощения в ближнем ИК диапазоне, ионизация молекул оптическим полем длинноволнового излучения проходит в режиме туннелирования связанных электронов. Кроме того, существенно возрастают «температура» образовавшейся лазерной плазмы и роль электронного каскада (ударной ионизации), что заметно сказывается на общей картине самовоздействия лазерного пучка.

Основной задачей настоящей работы является дальнейшее развитие представленной в [11, 17] физической модели оптической нелинейности атмосферного воздуха в спектральной области генерации CO₂-лазера с $\lambda_0 = 10.6$ мкм. Нас интересовал диапазон достаточно высоких интенсивностей воздействующего излучения, порядка десятков тераватт на квадратный сантиметр, при которых в воздухе реализуются нелинейно-оптические эффекты самофокусировки, плазмообразования и филаментации. Этим обусловлен и выбор конкретных моделируемых параметров воздуха, включающих в себя добавку к коэффициенту преломления за счет кубической и высших нелинейностей, а также комплексный коэффициент преломления, обусловленный ионизацией воздуха и образованием лазерной плазмы. Последнему параметру в работе уделено наибольшее внимание, поскольку, как было отмечено выше, именно в динамике плазмообразования заключены основные отличия самовоздействия излучения выбранного оптического диапазона от филаментации излучения в хорошо документированной ближней ИК области спектра.

2. Математическая формулировка задачи

Нелинейное распространение интенсивного оптического импульса в нелинейной среде моделируется на основе дифференциального уравнения для огибающей комплексного электрического поля оптической волны. Это соответствует скалярному приближению однонаправленного параксиального распространения светового пучка с медленно меняющейся (во времени) амплитудой импульса. В системе координат, изначально расположенной в центре временной огибающей светового импульса и движущейся вместе с ним с групповой скоростью

$$\frac{1}{k'_\omega} \equiv \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \right)^{-1},$$

где k – зависящее от частоты ω волновое число (ω_0 – центральная частота волнового пакета), будем использовать следующий вид данного уравнения [5]:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2n_0 k_0} \nabla_\perp^2 + i \frac{k''_\omega}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} U - ik_0 (\Delta n_2 + \Delta n_{2q} - \Delta n_p) U + \frac{1}{2} (\alpha_N + \alpha_{\text{lin}}) U = 0. \quad (1)$$

Здесь $U(x, y, z; t)$ – медленно меняющаяся амплитуда; ∇_\perp^2 – лапласиан по поперечным координатам; n_0, α_{lin} – линей-

ные коэффициенты преломления и поглощения среды; $k_0 = 2\pi/\lambda_0$; $k''_\omega = \partial^2 k / \partial \omega^2$ – дисперсия групповой скорости; Δn_2 – кубическая нелинейность показателя преломления воздуха; Δn_{2q} – коэффициенты при нелинейностях высших порядков; $\alpha_N, \Delta n_p$ – «плазменные» нелинейные коэффициенты поглощения и преломления света, связанные с процессами фотоионизации и плазмообразования в среде. В уравнении (1), кроме линейных эффектов дифракции пучка и частотной дисперсии групповой скорости волнового пакета в среде, учитывается также нелинейная поляризуемость среды в интенсивном оптическом поле, приводящая к амплитудно-фазовой самомодуляции световой волны. Мы не рассматриваем здесь дисперсионные поправки к представленной модели распространения, связанные с частотно-зависимой фокусировкой и самообострением временного фронта импульса излучения, что обычно учитывается введением дифференциального оператора $(1 + i\omega_0^{-1} \partial / \partial t)$ перед соответствующими слагаемыми в уравнении (1) [3]. Основанием для этого является малость величины $(\omega_0 t_p)^{-1}$ на временной шкале, соответствующей выбранному субпикосекундному диапазону длительностей t_p лазерного импульса.

3. Эффект Керра и высшие нелинейности

Оптический эффект Керра описывает светоиндуцированное изменение Δn_2 показателя преломления среды (нелинейной восприимчивости) под действием лазерного излучения [18], пропорциональное квадрату амплитуды электрического поля волны с коэффициентом пропорциональности n_2 : $\Delta n_2 = n_2 I$, где $I = |U|^2 \epsilon_0 c / 2$ – интенсивность (ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума). Данный коэффициент в общем случае не является константой, а имеет временную зависимость, связанную с конечностью времени установления кубической поляризации вещества в результате ориентации дипольных моментов молекул вдоль вектора поля. По своей физической природе инерционный эффект Керра является рамановским рассеянием спектральных компонент внутри светового импульса [19]. Для формализации временной зависимости $n_2(t)$ обычно используют модель среды как некоторого эффективного осциллятора с резонансной частотой ω_R и затуханием Γ_R [2], который возбуждается оптическим полем.

В результате полная функция кубического отклика среды на действие светового поля с учетом мгновенной (электронной) и инерционной (молекулярной) поляризуемостей представляется в виде

$$n_2(t) = n_2 \left[(1 - \beta_R) I(t) + \beta_R \int_{-\infty}^t \Lambda(t-t') I(t') dt' \right] \quad (2)$$

с функцией импульсного отклика

$$\Lambda(t) = \frac{\omega_R^2 + \Gamma_R^2}{\omega_R} \exp(-\Gamma_R t) \sin \omega_R t$$

и удельной долей инерционной части β_R . Подгоночные параметры ω_R и Γ_R в модели осциллятора выбираются исходя из типа среды и не зависят от ω_0 . Для атмосферных газов удельная доля β_R эффекта Рамана в кубической нелинейной поляризации в численных расчетах обычно составляет 0.5 [20], при этом $\omega_R = 20$ ТГц, а $\Gamma_R = 14$ ТГц [21]. Будем использовать данные значения и в десятимикронном спектральном диапазоне.

Табл.1. Параметры оптической модели воздуха для $\lambda_0 = 0.8$ и 10.6 мкм.

λ_0 (мкм)	$(n_0 - 1) \times 10^4$, расчет по (5)	k_ω^* (фс/см), расчет по (5)	n_2 (см ² /Вт), расчет по (3), (4)	n_4 (см ⁴ /Вт ²), расчет по (4)	n_6 (см ⁶ /Вт ³), расчет по (4)	n_8 (см ⁸ /Вт ⁴), расчет по (4)
0.8	2.704 (для N ₂)	0.15 (для N ₂)	3.0×10^{-19} [27] 4.0×10^{-19} [24]	-1.5×10^{-33} [25]	2.1×10^{-46} [25]	-0.8×10^{-59} [25]
10.6	2.679	0.014	2.89×10^{-19} 3.0×10^{-19} [24]	-1.44×10^{-33}	1.94×10^{-46}	-0.72×10^{-59}

При достаточно высокой интенсивности излучения нелинейная поляризация среды перестает быть преимущественно кубической, и в ее разложении по полю возникает необходимость учета последующих слагаемых с большими степенями. Фактически это приводит к насыщению эффективного коэффициента керровской нелинейности

$$n_{2\text{eff}} = n_2 + \sum_{q=2}^Q n_{2q} I^{q-1}$$

с ростом интенсивности или даже к его падению. Так, например, данные исследований, представленные в работе [22], показывают, что в атмосферных газах (азот, кислород) для излучения с $\lambda_0 = 0.8$ мкм уже при $I > 10$ ТВт/см² становятся существенными поправки к нелинейной кубической диэлектрической восприимчивости вплоть до 9-го порядка. Отметим, что здесь мы не рассматриваем случай взаимодействия среды с высокоинтенсивными предельно короткими лазерными импульсами (единицы фемтосекунд), когда само использование квантовой теории возмущений и, следовательно, стандартной модели представления нелинейного отклика среды в форме разложения поляризации по степеням приложенного оптического поля становится спорным [23].

Эмпирические данные по коэффициентам оптической нелинейности воздуха в спектральном диапазоне излучения СО₂-лазера в литературе отсутствуют. Более того, даже для широко используемого излучения титан-сапфирового лазера (800 нм) разброс экспериментальных значений n_2 составляет $(1.2 - 5.57) \times 10^{-19}$ см²/Вт [24]. Поэтому для выяснения поведения функции $n_2(\omega)$ необходимо идти путем построения приближенных дисперсионных формул на основе массива известных экспериментальных величин n_2 , измеренных для дискретного набора длин волн лазерного излучения, и теоретических моделей нелинейной поляризуемости газовой среды [24, 25].

Так, авторами [24] предложен квадратичный тип зависимости коэффициента кубической нелинейности воздуха от длины волны излучения λ :

$$n_2(\lambda) = A_2 + B_2/\lambda^2, \tag{3}$$

где $A_2 = 3.00585 \times 10^{-19}$ см²/Вт; $B_2 = 6.37078 \times 10^5$; λ измеряется в нанометрах.

Другой подход к построению дисперсионной зависимости n_2 применен в [25], где использована так называемая обобщенная формула Миллера:

$$\frac{n_{2q}(\omega_1)}{n_{2q}(\omega)} = \left[\frac{n_0^2(\omega_1) - 1}{n_0^2(\omega) - 1} \right]^{2q+2}. \tag{4}$$

Здесь $q = 1, \dots, Q$. Данное выражение является обобщением правила Миллера [26] для квадратичной нелинейной поляризуемости на нелинейную восприимчивость вещества произвольного порядка и позволяет по известному

нелинейному коэффициенту $n_{2q}(\omega_1)$ на некоторой частоте ω_1 и по известной дисперсии линейного коэффициента преломления среды $n_0(\omega)$ рассчитать значение соответствующего нелинейного коэффициента в интересующем спектральном диапазоне.

Дисперсия линейного показателя преломления $n_0(\omega)$ может быть рассчитана по соотношению, аналогичному формуле Селлмейера для воздуха. Так, например, для атмосферных газов N₂ и O₂ известны следующие дисперсионные зависимости [25]:

$$10^8(n_{0N_2} - 1) = 8736.28 = \frac{2398095.2}{128.7 - 1/\lambda^2}, \tag{5}$$

$$10^8(n_{0O_2} - 1) = 15532.45 = \frac{456402.97}{50.0 - 1/\lambda^2},$$

где λ измеряется в микрометрах. Таким образом, если взять за основу усредненные по известным экспериментальным данным значения коэффициентов n_{2q} , например для азота на $\omega_1 = (2\pi c/\lambda_1)$, где $\lambda_1 = 0.8$ мкм, то согласно приведенным выражениям получим искомые значения соответствующих нелинейных коэффициентов для $\lambda_0 = 10.6$ мкм. Рассчитанные таким образом величины приведены в табл. 1, из которой следует, что значения коэффициента n_2 на длине волны 10.6 мкм, даваемые формулами (3) и (4), оказываются достаточно близкими, а сама оптическая «сила» кубической нелинейности и нелинейностей среды высших порядков в среднем ИК диапазоне лишь незначительно слабее, чем в частотной области генерации титан-сапфирового лазера.

4. Ионизация и плазмообразование

В общем случае ионизация среды под действием достаточно короткого (сотни фемтосекунд – единицы пикосекунд) лазерного импульса может быть разделена на два основных типа: полевая, т. е. с непосредственным участием фотонов оптического поля, и столкновительная, или ударная, когда новые свободные электроны образуются в результате столкновений атомов или молекул с уже образованными ранее электронами плазмы (или друг с другом).

Полевая ионизация атомов газа характерна для достаточно высоких интенсивностей воздействующего на среду излучения и может носить характер многофотонной (МФИ) либо туннельной ионизации [28].

Граница между режимами многофотонной и туннельной ионизации дается так называемым адиабатическим параметром (параметр Келдыша) [2, 3]: $\gamma_i = \sqrt{E_i/2\varepsilon_p}$, где E_i – потенциал ионизации нейтральной частицы; $\varepsilon_p = e^2|U|^2(4m_e\omega_0^2)^{-1}$ – пондеромоторная энергия электрона в световом поле с напряженностью U (e, m_e – заряд и масса электрона соответственно). При $\gamma_i \gg 1$ фотоионизация атома происходит в многофотонном режиме, а при $\gamma_i \ll 1$ – в туннельном.

Энергия кванта излучения уменьшается пропорционально увеличению длины волны, и для осуществления МФИ в среднем ИК диапазоне излучением CO₂-лазера атомам, например, кислорода с потенциалом ионизации 12.1 эВ необходимо одновременно поглотить более сотни квантов света. Очевидно, что вероятность такого события стремится к нулю. Поэтому для $\lambda_0 = 10.6$ мкм ионизация воздуха оптическим полем будет носить туннельный характер, о чем также свидетельствует параметр Келдыша γ_i , который остается меньшим единицы вплоть до лазерных интенсивностей 10^{14} Вт/см².

При ударном типе ионизации атомов затравочные свободные электроны, всегда присутствующие в среде (с концентрацией $\sim 10^4$ см⁻³), набирают энергию в электромагнитном поле и при столкновении с нейтральными атомами могут их ионизовать. Очевидно, что такой тип ионизации требует, во-первых, наличия определенного количества свободных электронов в среде и, во-вторых, достаточно сильного взаимодействия свободного электрона с волной, чтобы за время между соударениями с атомами успеть набрать среднюю энергию

$$\varepsilon_e = \frac{e^2 |U|^2}{2m_e \varepsilon_0 (\omega_0^2 + \nu_c^2)}$$

(ν_c – эффективная частота столкновений), превышающую потенциал ионизации атома, т.е. должно выполняться условие $\varepsilon_e > E_i$ (многоквантовая ионизация здесь не рассматривается).

Скорость увеличения энергии свободного электрона определяется величиной сечения процесса тормозного поглощения σ_c :

$$\sigma_c = \frac{e^2 \nu_c}{m_e \varepsilon_0 (\omega^2 + \nu_c^2)}. \quad (6)$$

Видно, что при условии $\omega \gg \nu_c$, которое выполняется в воздухе для излучения вплоть до дальнего ИК диапазона, σ_c обратно пропорционально квадрату частоты лазерного излучения ω . Расчет параметра σ_c в случае эффективной частоты столкновений электронов в воздухе при нормальном давлении $\nu_c = 3 \times 10^{12}$ Гц [29] дает $\sigma_c = 5.5 \times 10^{-20}$ см² для $\lambda_0 = 0.8$ мкм и более чем на два порядка большее значение $\sigma_c = 9.7 \times 10^{-18}$ см² для $\lambda_0 = 10.6$ мкм. Следовательно, для излучения в среднем ИК диапазоне роль ударной ионизации среды возрастает, и, как будет показано, частота образования свободных электронов вследствие столкновений в ряде случаев может превышать скорость прибыли электронов за счет туннелирования, не говоря уже о механизме МФИ.

Эволюция плотности свободных электронов ρ_e в каждой точке среды в лазерном пучке подчиняется следующему уравнению:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = W_I(I)(\rho_{nt} - \rho_e) + (\nu_i - \nu_{att} - \nu_r - \nu_d)\rho_e, \quad (7)$$

где $W_I(I)$ – скорость фотоионизации среды (полевой ионизации); $\nu_i, \nu_{att}, \nu_r, \nu_d$ – эффективные частоты ударной ионизации, присоединения, рекомбинации и диффузионного ухода соответственно; ρ_{nt} – плотность нейтральных атомов (молекул).

Для вычисления скорости полевой ионизации W_I атома в широком диапазоне интенсивностей излучения и

длин волн общепринятым является использование модели Переломова – Попова – Терентьева (ППТ) [30], формулировка которой в удобном для расчетов виде приведена, например, в [3]. Расчет скорости ионизации по модели ППТ, как правило, не вызывает затруднений, пока параметр адиабатичности $\gamma_i \geq 1$. В режиме туннельной ионизации, когда $\gamma_i \ll 1$, ряды по степеням $(\gamma_i)^{-1}$, которые присутствуют в выражении для вероятности процесса, становятся слабо сходящимися. Поэтому здесь целесообразно использовать формулы, развитые в теории туннельной ионизации вещества [31].

Ионизация атомов и молекул электронным ударом проходит по схеме $e + A \rightarrow 2e + A^*$ с образованием из одного «горячего» электрона пары более «холодных». Средняя по спектру скорость каскадной ионизации ν_i в общем виде выражается через сечение ионизации атома σ_i ударом электрона и тепловую скорость поступательного движения (скорость дрейфа) электрона v : $\nu_i = \rho_{nt}' = \langle v \sigma_i \rangle$, где угловые скобки обозначают усреднение по энергетическому спектру электронов; $\rho_{nt}' = (\rho_{nt} - \rho_e)$ – мгновенная плотность нейтральных атомов в среде.

Эмпирическая информация о зависимости частоты и сечения ударной ионизации атмосферных газов от энергии (энергетической температуры) электронов представлена в многочисленных источниках (см., напр., [29, 32, 33]), из которых явственно следует, что поведение функции $\nu_i(\varepsilon_e)$ немонотонно. Она имеет участок роста, связанный с увеличением скорости дрейфа электронов $v \sim \sqrt{\varepsilon_e}$, и участок спада, обусловленный уменьшением сечения столкновений σ_i высокоэнергетичных электронов с нейтральными атомами. По понятным причинам удобно иметь аналитическую зависимость $\nu_i(\varepsilon_e)$, которая бы «работала» в интересующем нас диапазоне энергий электронов, т.е. до $\varepsilon_e \approx 1$ кэВ, а следовательно, в определенном интервале интенсивностей и временных длительностей светового импульса. Для этого, как понятно из предыдущего анализа, необходимо знать точный вид энергетического спектра свободных электронов, находящихся в переменном электрическом поле, в каждый момент времени.

Расчет функции распределения электронов по скоростям $f(v, t)$ является нетривиальной задачей и требует решения кинетического уравнения Больцмана для энергетического спектра электронов плазмы с учетом всех источников и стоков энергии электронов [29]. В принципе, существуют специальные программные пакеты с публичным доступом, позволяющие провести подобные расчеты, такие, например, как в [34]. Однако в дальнейшем примем традиционную гипотезу о стационарном во времени максвелловском спектре энергии электронов $f(v, t)$. Такое приближение в рассматриваемой ситуации вполне оправданно, поскольку время установления стационарного распределения электронов по тепловым скоростям $\tau_e = 1/\nu_c$ определяется частотой ν_c актов столкновения без изменения энергии (упругие электрон-электронные и электрон-атомные столкновения) и в воздухе при атмосферном давлении составляет несколько сотен фемтосекунд [29, 35]. Это существенно меньше среднего времени, требуемого для изменения энергии электрона в неупругих столкновениях, в основном при ударной ионизации молекул и столкновительной рекомбинации ионов, которое, как будет показано ниже, находится на пикосекундной временной шкале [32, 36].

Таким образом, для лазерной плазмы, создаваемой импульсом с длительностью $t_p > \tau_e$, примем максвеллов-

ский закон распределения свободных электронов по скоростям,

$$f(v) = \rho_e \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T_e}\right), \quad (8)$$

с нормировкой

$$4\pi \int_0^\infty f(v) v^2 dv = \rho_e.$$

Здесь $T_e = 2\varepsilon_e/(3k_B)$ – электронная температура; k_B – постоянная Больцмана. Перейдя в (8) к энергетической переменной, получим

$$\langle v\sigma_i \rangle = \frac{8\pi}{m_e^2} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{3/2} \int_{\Delta E_i}^\infty \sigma_i(\varepsilon) \varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T_e}\right) d\varepsilon. \quad (9)$$

Далее воспользуемся эмпирической формулой Лотца [37] для энергетической зависимости $\sigma_i(\varepsilon)$ сечения ударной ионизации:

$$\sigma_i(\varepsilon) = C_1 \frac{\ln \varepsilon^*}{\varepsilon^*}, \quad (10)$$

где $\varepsilon^* = \varepsilon_e/E_i$, а C_1 – константа подгонки под экспериментальные данные. Подставив (10) в (9), получим

$$\langle v\sigma_i \rangle = \frac{4C_1 E_i}{\sqrt{m_e k_B T_e}} \text{Ei}\left(1, \frac{E_i}{k_B T_e}\right) = 2C_1 \sqrt{\frac{6E_i}{m_e \xi_c}} \text{Ei}\left(1, \frac{1}{\xi_c}\right),$$

где $\xi_c = 2\varepsilon_e/(3E_i) \propto \gamma_i^{-2}$ – приведенная энергия электрона; $\text{Ei}(1, x)$ – интегральная показательная функция [38]. Окончательно средняя по спектру скорость каскадной ионизации

$$\begin{aligned} v_i &= \rho_{nt}' \langle v\sigma_i \rangle = 2(\rho_{nt} - \rho_e) C_1 \sqrt{\frac{6E_i}{m_e \xi_c}} \text{Ei}\left(1, \frac{1}{\xi_c}\right) \\ &= R_i \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_{nt}}\right) g(\xi_c). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $g(\xi_c) \equiv \sqrt{1/\xi_c} \text{Ei}(1, 1/\xi_c)$; $R_i = 2\rho_{nt} C_1 \sqrt{6E_i/m_e}$ – пиковая скорость однократной ударной ионизации газа (в обратных секундах). Согласно доступным экспериментальным данным о сечениях ударной ионизации атмосферных газов [33] $C_1 = 1.43 \times 10^{-15} \text{ см}^2$ для азота и $0.98 \times 10^{-15} \text{ см}^2$ для кислорода. Соответственно предельная скорость ионизации $R_i \approx 1.46 \times 10^{13} \text{ с}^{-1}$ для азота ($\rho_{ntN_2} = 2 \times 10^{19} \text{ см}^{-3}$) и $R_i \approx 3.38 \times 10^{12} \text{ с}^{-1}$ для кислорода ($\rho_{ntO_2} = 0.5 \times 10^{19} \text{ см}^{-3}$).

В качестве иллюстрации на рис.1 приведены зависимости параметров σ_i и v_i/R_i для молекулярного азота (N_2) от энергии соударяющегося с ним электрона. Видно, что частота ударной ионизации испытывает квазилинейный рост в области $\xi_c \ll 1$, т. е. там же, где реализуется режим многофотонной ионизации атомов полем ($\gamma_i \gg 1$, $\gamma_i \sim \xi_c^{-1}$), и достигает максимума при примерно десятикратном превышении кинетической энергии электрона над порогом ионизации атома. В дальнейшем с ростом ε_e скорость ударной ионизации снижается, как и сечение ионизации σ_i .

Определенным неудобством практического использования полученной формулы (11) при моделировании временной динамики плотности электронов плазмы в канале

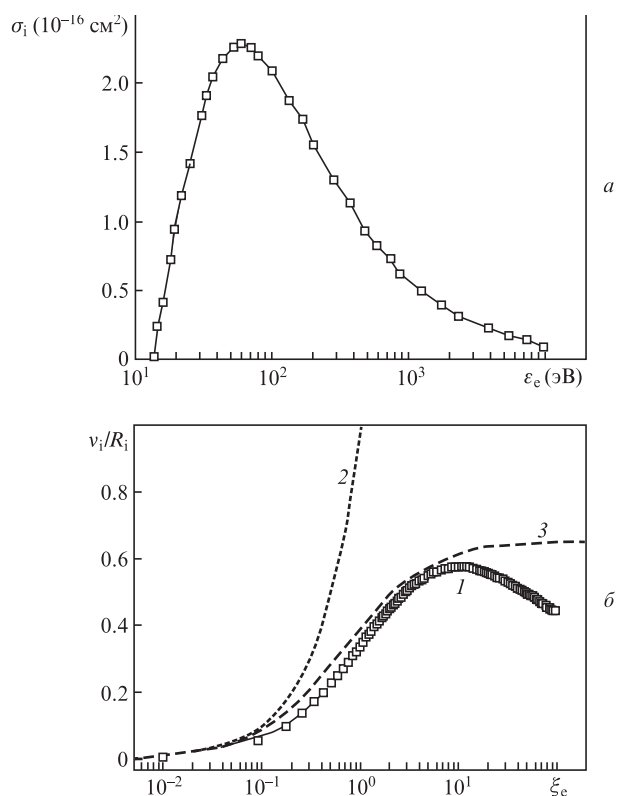


Рис.1. Зависимости сечения σ_i (по данным [30]) от энергии электрона ε_e (а) и нормированной частоты v_i/R_i ударной ионизации азота от приведенной энергии электрона ξ_c (1 – расчет по (11), 2 – модель Друде (12), 3 – модель Друде с коррекцией (13)) (б).

светового пучка является то, что для расчета частоты ионизации необходимо знать среднюю энергию электрона ε_e , которая сама изменяется во времени (см. ниже). Поэтому при описании филаментации ультракороткого лазерного излучения широко используется приближение плазмы Друде [2]. В этом приближении не учитывается распределение свободных электронов по скоростям, а рассматриваются некоторые «средние» по кинетической энергии электроны со средним постоянным временем пробега τ_c между столкновениями. При этом частота ионизации атома электронным ударом v_{id} здесь линейно зависит от интенсивности световой волны и сечения столкновений:

$$v_{id} = \frac{I(r, t) \sigma_c}{E_i}, \quad (12)$$

где параметр σ_c представлен выражением (6).

Аналогично по структуре выражение можно получить и из полуэмпирической формулы (11), если воспользоваться асимптотикой интегральной показательной функции для больших значений аргумента: $\text{Ei}(1, x) \propto \ln(1 + 1/x)$ при $x = 1/\xi_c \gg 1$. Это дает частоту ударной ионизации $v_{id} \approx R_i \varepsilon_e/E_i$. Следовательно, можно сказать, что приближение Друде адекватно описывает реальный процесс ионизации среды электронным ударом только в том случае, если средняя кинетическая энергия электронов мала по сравнению с потенциалом ионизации атома или молекулы. Этот парадоксальный вывод, как отмечено в [29], есть прямое следствие неучета разброса электронов по энергиям, когда вероятность ионизации атома ударом в среднем «холодного» электрона ($\varepsilon_e < E_i$) также будет ненуле-

вой за счет наличия «горячих» электронов ($\epsilon_e > E_i$) в хвосте реального энергетического спектра.

Приближенно поправку к вероятности ударной ионизации атома вследствие разброса электронов по скоростям можно учесть введением в (12) эффективного потенциала ионизации $E_i^* = E_i + \epsilon_e$ для электрона с кинетической энергией ϵ_e [31]. Тогда скорректированная на спектр электронов частота ударной ионизации ν_{idc} примет следующий вид:

$$\nu_{\text{idc}} = \frac{I(\mathbf{r}, t)\sigma_c}{E_i + \epsilon_e}, \quad (13)$$

где, напомним, частота упругих столкновений электрона $\nu_c = \tau_c^{-1}$ предполагается независимой от ϵ_e . Из данного выражения следует, что если свободный электрон обладает средней кинетической энергией, сравнимой или много большей потенциала ионизации атома, то частота ударной ионизации будет ограничена и приближенно равна частоте этих столкновений: $\nu_{\text{idc}} \propto \nu_c(1 + E_i/\epsilon_e)^{-1} \sim \nu_c$. В противоположной ситуации (низкоэнергетичные электроны) вероятность ударной ионизации существенно меньше и возрастает прямо пропорционально скорости набора энергии электроном за время между столкновениями, т. е. пропорционально интенсивности светового поля: $\nu_{\text{idc}} \propto I$.

Расчитанные по (12) и (13) зависимости для частот ударной ионизации молекулы азота также построены на рис. 1, б. Как следует из данного рисунка, при $\epsilon_e \ll E_i$ выражения (11)–(13) дают близкие результаты, что подтверждает справедливость приближения Друде для «холодных» электронов. Однако, начиная с энергий электрона $\epsilon_e \geq 0.1E_i$, модель Друде (12) дает существенное завышение частоты ионизации. В то же время скорректированная на энергию электрона модель (13) верно следует полуэмпирической скорости ионизации (11) вплоть до энергий $\epsilon_e \approx 10E_i$, что, например, для молекулы N_2 составляет около 150 эВ. Дальнейшее уменьшение частоты ударной ионизации при увеличении энергии сталкивающихся электронов не описывается ни одной из приближенных моделей. Вместе с тем, на практике «разогреть» свободные электроны до температур в сотни электронвольт способен не всякий лазерный импульс. Кроме того, сам темп спада зависимости $\nu_i(\epsilon_e)$ для «горячих» электронов невысок и пропорционален $\epsilon_e^{-1/2}$. Поэтому в большинстве практических ситуаций, реализующихся при расчетах эволюции плазменной области в канале лазерного пучка, оказывается вполне достаточным использование упрощенной модели ударной ионизации (13).

Для вычисления параметра ν_i необходимо знать динамику средней энергии свободного электрона. Электрон приобретает энергию, взаимодействуя с полем лазерного импульса, а теряет ее при столкновениях с тяжелыми частицами. Следуя данной логике, запишем уравнение для электронной температуры T_e [35]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_e}{\partial t} = & \frac{2}{3k_B}\sigma_c I(t) - \frac{2m_e}{M}\nu_c(T_e - T_n) - \nu_i \frac{2\delta\epsilon_i}{3k_B} \\ & - \sigma_{cV}(\rho_{nt} - \rho_c)\sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e}} \frac{2E_V}{3k_B T_e}(T_e - T_n). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\nu_c = \nu_{ci} + \nu_{en}$ – эффективная частота передачи энергии при упругих электрон-ионных (ν_{ci}) и электрон-нейтраль-

ных (ν_{en}) столкновениях; $\delta\epsilon_i = \min\{\epsilon_e, E_i\}$ – доля энергии электрона, затрачиваемая на ионизацию атома; M – масса молекулы; T_n – температура нейтральных частиц и ионов; E_V – энергия резонансного (низшего) колебательного уровня молекулы вещества (0.29 эВ – N_2 , 0.2 эВ – O_2 [29]); σ_{cV} – сечение возбуждения молекул ударом (зависит от энергии электрона). Первое слагаемое в правой части уравнения (14) описывает приобретение электронами энергии в оптическом поле за счет обратнотормозного поглощения, второе и последующие слагаемые дают потери энергии электронов в результате упругих столкновений с ионами и нейтральными частицами, а также за счет ионизации и возбуждения колебательных степеней свободы нейтральных атомов/молекул.

Оценим слагаемые в (14) по порядку величины. При типичном значении интенсивности в части светового пучка, испытавшей филаментацию, $I \approx 10$ ТВт/см², скорость $(\partial T_e/\partial t)_{\text{max}}$ увеличения температуры электронов равна 10^{17} и 10^{19} К/с в ближнем (0.8 мкм) и среднем (10.6 мкм) ИК диапазонах соответственно. При этом потери энергии электронов на ионизацию нейтральных частиц могут привести охлаждению электронов с максимальными скоростями 10^{16} – 10^{18} К/с, если выбрать модель (13) для частоты ионизации. Максимальная скорость охлаждения электронов за счет упругих столкновений составляет $\sim 10^{15}$ К/с, если следовать гипотезе $\nu_c(\epsilon_e) = \text{const}$ ($\nu_c = 3$ ТГц [29]), что соответствует приближению максвелловского спектра скоростей электронов. Охлаждение за счет возбуждения резонансных колебательных уровней молекул составляет 10^{13} – 10^{15} К/с в исследуемом диапазоне энергий электронов и при $\sigma_{cV} \sim 10^{-16}$ см² [32].

Из приведенных выше оценок можно сделать вывод о том, что охлаждение электронов за счет упругих столкновений с тяжелыми частицами и возбуждения молекулярных колебаний в (14) можно не учитывать, по крайней мере для пикосекундных времен и короче. Единственным действенным фактором, понижающим энергию электронов, являются потери на ударную ионизацию. Таким образом, уравнение энергетического баланса (14) упрощается до двух слагаемых в правой части:

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} \approx \frac{2}{3k_B}[\sigma_c I(t) - \nu_i(T_e)\delta\epsilon_i]. \quad (15)$$

Основными физическими процессами, приводящими к снижению числа электронов в газовой плазме, созданной лазерным пучком, являются рекомбинация, присоединение и диффузия электронов. В эволюционном уравнении (7) это учтено соответствующими скоростными коэффициентами. Однако на рассматриваемой здесь временной шкале взаимодействия излучения с веществом, охватываемой ~ 10 пс, данные процессы не успевают существенно проявиться.

Действительно, присоединение (прилипание) электронов к нейтральным молекулам и ионам атмосферных газов, прежде всего к кислороду и азоту, характеризуется скоростным коэффициентом $\sim 10^{-30}$ см⁶/с [29]. В соответствии с этим характерное время прилипания электронов в тройных столкновениях с молекулами, например по схеме $e + O_2 + N_2 \rightarrow O_2^- + N_2$, составляет $\sim 10^{-8}$ с. С увеличением энергии свободных электронов скорость процесса прилипания резко падает, поскольку быстрые электроны проскакивают опасную с точки зрения кулоновского взаимодействия с молекулой энергетическую зону.

Рекомбинация свободных электронов также уменьшает их число и, как правило, сопровождается высвечиванием кванта энергии. Основные механизмы рекомбинации для воздуха при атмосферном давлении и пикосекундной временной шкалы – это тройная (трехчастичная) и диссоциативная рекомбинации, протекающие по схемам $e + O_2^+ + e \rightarrow e + O_2$ и $e + O_2^+ \rightarrow O^* + O^*$ соответственно. Таким образом, эффективная частота рекомбинации ν_r в уравнении (7) является суммой частот тройной (ν_{r3}) и диссоциативной (ν_{rd}) рекомбинаций: $\nu_r = \nu_{r3} + \nu_{rd}$. Скорость электронной рекомбинации сильно зависит от электронной температуры плазмы.

В случае тройной рекомбинации частота ν_{r3} имеет следующую эмпирическую зависимость от электронной температуры T_e [29] (при условии квазинейтральности плазмы):

$$\nu_{r3} = \rho_e^2 \times 1.17 \times 10^{-20} (300/T_e)^{9/2},$$

где плотность электронов берется в см^{-3} , а температура – в градусах Кельвина. Диссоциативный тип рекомбинации молекулярного иона и свободного электрона приводит к распаду иона при поглощении свободного электрона и к появлению двух нейтральных возбужденных атомов. Эмпирические выражения для этого типа рекомбинации имеют вид [39]

$$\nu_{rd}(O_2^+) = \rho_e \times 2 \times 10^{-7} (300/T_e),$$

$$\nu_{rd}(N_2^+) = \rho_e \times 2 \times 10^{-7} (300/T_e)^{0.5}.$$

На рис.2 построены зависимости коэффициентов рекомбинации $\beta_{r3} = \nu_{r3}/\rho_e$ и $\beta_{rd} = \nu_{rd}/\rho_e$ для азота и кислорода при атмосферном давлении от электронной температуры. Видно, что характерное время рекомбинации плазмы с типичной плотностью электронов $\rho_e = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ составляет $\tau_r = 1/\nu_r \sim 10^{-12} \text{ с}$ в ближнем ИК диапазоне длин волн при средней энергии электронов $\epsilon_e \approx 0.1 \text{ эВ}$ и обусловлено преимущественно тройными столкновениями частиц. В среднем ИК диапазоне для быстрых электронов ($\epsilon_e \approx 100 \text{ эВ}$) превалирует диссоциативный тип рекомбинации с ионами азота, что дает характерное время $\tau_r \sim 10^{-8} \text{ с}$. Другими словами, в интересующей нас области

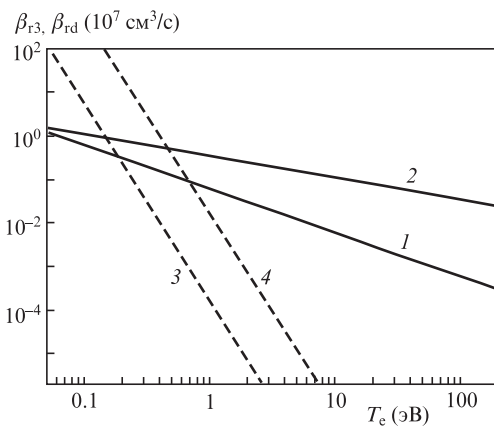


Рис.2. Зависимости скоростных коэффициентов диссоциативной (1 – кислород, 2 – азот) и тройной (3, 4) рекомбинации электронов в воздухе от электронной температуры при $\rho_e = 10^{16}$ (3) и 10^{18} см^{-3} (4).

спектра рекомбинационные потери свободных электронов из плазменной колонки можно не учитывать.

Последний канал убыли числа электронов связан с их диффузией из области, занятой лазерным пучком. Диффузионный уход свободных электронов в балансном уравнении (7) учтен средней скоростью диффузионных потерь ν_d . Как правило, хорошим приближением для лазерной плазмы является $\nu_d \approx D_e/\Lambda^2$, где D_e – коэффициент диффузии электронов (свободной, или амбиполярной), а Λ – характерная диффузионная длина. Этот масштаб в случае цилиндрической геометрии плазменной колонки записывается в следующем виде [29]:

$$1/\Lambda^2 = (2.4/R_p)^2 + (\pi/L_p)^2,$$

где R_p и L_p – радиус и длина «плазменного цилиндра». Поскольку обычно в плазменной колонке, сопровождающей филамент, выполняется условие $L_p \gg R_p$, то можно считать, что характерное время жизни электрона в выделенном объеме среды $\tau_d = 1/\nu_d \approx (R_p^2/5.76D_e)$. Оценивая данное время для плазменной колонки со средним размером $R_p = 1 \text{ мм}$ и считая диффузию электронов свободной, т. е. $D_e = 10^3 \text{ см}^2/\text{с}$, получаем $\tau_d \approx 2 \times 10^{-10} \text{ с}$, что находится за пределами рассматриваемого диапазона времен.

Таким образом, вместо (7) можно использовать укороченное уравнение для плотности свободных электронов, справедливое для существующей в интервале $\sim 10 \text{ пс}$ воздушной плазмы атмосферного давления:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = W_I(I)(\rho_{nt} - \rho_e) + \nu_i \rho_e, \quad (16)$$

где ν_i дается выражением (11), (12) или (13). Здесь первое слагаемое в правой части учитывает полевой тип ионизации среды, а второе – ионизацию электронным ударом. Относительный вес каждого из типов ионизации зависит от ряда факторов, среди которых основными являются энергия кванта излучения $\hbar\omega$, его интенсивность I и сечение ударной ионизации σ_i .

На рис.3 приведены результаты решения уравнений (7) и (15) в приближении заданного поля при воздействии на атмосферный азот ($\rho_{nt} = 2 \times 10^{19} \text{ см}^{-3}$, $E_i = 15.6 \text{ эВ}$) модельного гауссова импульса излучения с длительностью (по уровню $1/e$) $t_p = 1 \text{ пс}$ (центр импульса соответствует $t = 3t_p$) и пиковой интенсивностью $I_0 = 30 \text{ ТВт/см}^2$. На рис.4 демонстрируются результаты сравнения динамики концентрации и температуры электронов в поле УКИ лазерного излучения в ближнем и среднем ИК диапазонах при различных длительностях импульсов.

Различие в рассмотренных моделях ударной ионизации молекул газа наглядно прослеживается на рис.3,а, где приведены скорости рождения свободных электронов $Q \equiv \partial \rho_e / \partial t$ под действием только полевой ($Q_W = W_I(I)(\rho_{nt} - \rho_e)$) или только столкновительной ($Q_i = \nu_i \rho_e$) ионизации. Аналогично введена и скорость убыли электронов в результате рекомбинации: $Q_r = \nu_r \rho_e$. Видно, что в модели «холодных» электронов (12) существенно переоценивается скорость роста электронной концентрации; это приводит к быстрой ионизации практически всех нейтральных молекул газа еще на переднем фронте лазерного импульса (см. рис.3,б). Здесь пик Q_i при $t \approx 2.1 \text{ пс}$, как и снижение скорости ионизации согласно полуэмпирической модели (11) при $t \approx 5.5 \text{ пс}$, связан с процессом рекомбинации электронов.

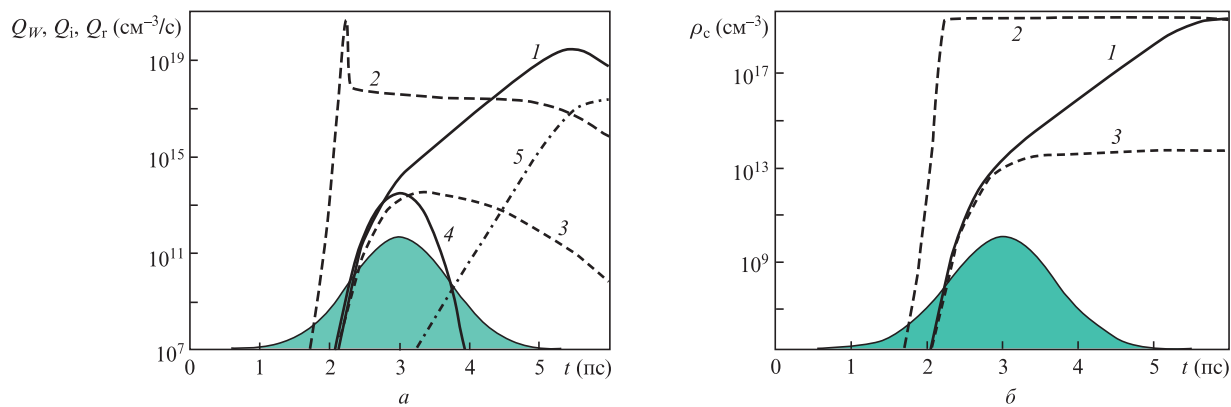


Рис.3. Временная динамика скоростей ударной ионизации Q_i (1–3), полевой ионизации Q_W (4) и суммарных рекомбинационных потерь Q_r (5) (а), а также электронной концентрации для различных моделей ионизации (1 – расчет по (11), 2 – модель Друде (12), 3 – модель Друде с коррекцией (13)) (б). Серые области – профили лазерного импульса.

Модель Друде с коррекцией на среднюю энергию электронов (13) дает верную динамику процесса развития плазмы, т. е. динамику, совпадающую с моделью (11) фактически на всем переднем фронте импульса излучения. Затем, согласно этой модели, при «нагреве» электронов до температур порядка потенциала ионизации азота, $T_e \geq (2/3k_B) E_i$ (рис.4,а), продуктивность ионизации газа падает ($Q_i \sim \epsilon^{-1}$), а электронная концентрация выходит на насыщение (см. рис.3,б). В то же время в рамках полуэмпирической модели (11) скорость рождения электронов продолжает возрастать пропорционально росту плотности плазмы ρ_e несмотря на наблюдающееся на рис.1,а уменьшение сечения ударной ионизации с ростом энергии электронов.

Основное отличие динамики ионизации молекул «холодными» и «горячими» электронами заключается в том, что в первом случае свободный электрон за время между соударениями с атомами τ_c успевает набрать энергию по-

рядка потенциала ионизации нейтральной частицы E_i , чтобы освободить новый электрон. Образующаяся пара электронов имеет почти нулевую температуру и вынуждена снова набирать энергию и «нагреваться» в поле оптической волны. Поэтому в такой ситуации вероятность (частота) ударной ионизации следует за интенсивностью лазерного импульса, повторяя его профиль.

В случае, когда свободные электроны между столкновениями способны набрать большую, существенно превышающую E_i , кинетическую энергию, развитие электронной лавины уже не связано с конкретным профилем интенсивности лазерного импульса, и в принципе ударная ионизация газа уже «горячими» электронами может идти и без наличия оптического поля. Эта ситуация хорошо видна на рис.3,б из сравнения динамики концентрации свободных электронов, рассчитанной по моделям (11) и (13). Первоначальная электронная «затравка» обе-

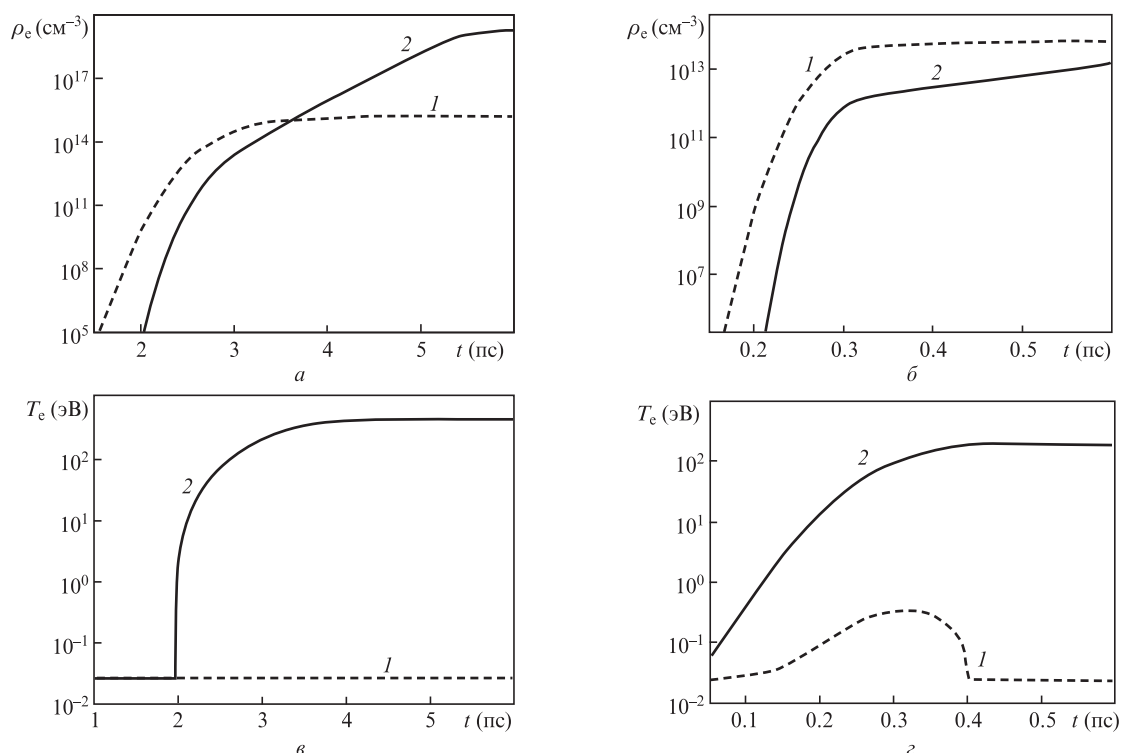


Рис.4. Зависимости концентрации плазменных электронов (а, б) и электронной температуры (в, г) от времени при воздействии лазерного импульса на длинах волн $\lambda_0 = 0.8$ (1) и 10.6 мкм (2) с $t_p = 1$ (а, в) и 0.1 пс (б, г).

спечивается прямой полевой (туннельной) ионизацией молекул азота и затем дает старт развитию лавины свободных электронов в результате соударений даже при экспоненциально спадающем поле внешнего импульса.

Очевидно, что результирующий вклад ударной ионизации в общее число свободных электронов, появившихся за время действия лазерного импульса, зависит как от частоты лазерного излучения ω (квадратично, через сечение тормозного поглощения σ_c), так и от длительности самого импульса t_p . Формально говоря, для развития электронной лавины необходимо обеспечить рождение хотя бы нескольких (для оптического пробоя среды – порядка 30 [29]) поколений электронов за время импульса. Следовательно, чем длинней импульс излучения, тем дольше он будет поддерживать ионизационный каскад и тем выше шансы достичь высокой плотности плазмы в канале пучка.

Как видно из рис.4,а и б, где представлена динамика электронной концентрации для излучения ближнего и среднего ИК диапазонов различной длительности, пикосекундный импульс CO₂-лазера приводит к полной (однократной) ионизации молекулярного азота за время $t \approx 6t_p$. При той же пиковой интенсивности более короткий импульс за тот же относительный промежуток времени, порядка шести длительностей импульса, не способен дать столь же большой плотности электронов, несмотря на их достаточно высокую температуру (рис.4,в и г). Для сравнения, импульсы титан-сапфирового лазера (800 нм) значительно хуже «греют» электроны, и электронный каскад здесь вообще не развивается, а весь прирост плотности плазмы обеспечивается механизмом МФИ.

5. Заключение

Таким образом, представленная выше модель оптического отклика воздушной среды на распространяющееся импульсное излучение CO₂-лазера свидетельствует о том, что в этом спектральном диапазоне кубическая и высшая оптические нелинейности имеют «силу», близкую по величине к отклику среды на излучение ближнего ИК диапазона. Хроматическая дисперсия воздуха для десятимикронного излучения, наоборот, должна проявляться значительно слабее.

Что касается процессов ионизации и плазмообразования в канале лазерного пучка, то при расчете плотности свободных электронов кроме механизма полевой ионизации критически важен учет ионизации молекул среды электронным ударом, особенно для импульсов излучения пикосекундной длительности. В данном случае средняя энергия свободных электронов растет под действием поля лазерного импульса и может достигать сотен электрон-вольт, что приводит к существенному снижению реальной скорости ударной ионизации в сравнении с ее оценкой по традиционной модели Друде (модель «холодных» электронов).

В случае более коротких импульсов (сотни фемтосекунд) и меньшей температуры свободных электронов для вычисления параметра ν_i с достаточной для практики точностью можно пользоваться скорректированной моделью (13) или даже простой моделью Друде (12). Рекомбинационные и диффузионные потери числа свободных электронов из плазменной колонки за время действия лазерного импульса пикосекундной длительности в численной модели можно не учитывать.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 13 и гранта РФФИ № 12-05-00716-а.

- Shen Y.R., Boyd R.W., Lukishova S.G. (Eds). *Selffocusing: Past and Present* (New York: Springer, 2009).
- Couairon A., Myzyrowicz A. *Phys. Reports*, **441** (2–4), 47 (2007).
- Berge L., Skupin S., Nuter R., Kasparian J., Wolf J.-P. *Rep. Prog. Phys.*, **70**, 1633 (2007).
- Кандидов В.П., Шлёнов С.А., Косарева О.Г. *Квантовая электроника*, **39** (3), 205 (2009).
- Гейнц Ю.Э., Землянов А.А., Кабанов А.М., Матвиенко Г.Г. *Нелинейная фемтосекундная оптика атмосферы* (Томск: Изд-во Института оптики атмосферы СО РАН, 2010).
- Fuji T., Suzuki T. *Opt. Lett.*, **32** (22), 3330 (2007).
- Andriukaitis G., Balčiūnas T., Ališauskas S., Pugžlys A., Baltuška A., Popmintchev T., Chen M.-C., Murnane M.M., Kapteyn H.C. *Opt. Lett.*, **36** (15), 2755 (2011).
- Sorokin E., Sorokina I. T., Mandon J., Guelachvili G., Picqué N. *Opt. Express*, **15**, 16540 (2007).
- Berge L., Rolle J., Kohler C. *Phys. Rev. A*, **88**, 023816 (2013).
- Аполлонов В.В., Плетнев Н.В. *Квантовая электроника*, **42** (2), 130 (2012).
- Гордиенко В.М., Платоненко В.Т., Стержантов А.Ф. *Квантовая электроника*, **39** (7), 663 (2009).
- Зуев В.Е., Землянов А.А., Копытин Ю.Д. *Нелинейная оптика атмосферы* (Л.: Гидрометеоздат, 1989).
- Bravy V.G., Chernyshev Yu.A., Gordienko V.M., Makarov E.F., Panchenko V.Ya., Platonenko V.T., Vasil'ev G.K. *Opt. Express*, **20** (23), 25536 (2012).
- Polyanskiy M.N., Babzien M., in *CO₂ Laser – Optimization and Application* (InTech, ISBN 978-953-51-0351-6, 2012. pp 139–162).
- Haberberger D., Tochitsky S., Joshi C. *Opt. Express*, **18** (17), 17865 (2010).
- Polyanskiy M.N., Babzien M., Pogorelsky I., Yakimenko V. *Proc. Int. Soc. Opt. Eng.*, **8677**, 86770G (2012).
- Гейнц Ю.Э., Землянов А.А. *Оптика атмосферы и океана*, **26** (9), 716 (2013).
- Шен И.Р. *Принципы нелинейной оптики* (М.: Наука, 1989).
- Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. *Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов* (М.: Физматлит, 2005).
- Nibbering E.T.J., Grillon G., Franco M.A., Prade B.S., Mysyrowicz A. *J. Opt. Soc. Am. B*, **14**, 650 (1997).
- Oleinikov P.A., Platonenko V.T. *Laser Phys.*, **3**, 618 (1993).
- Loriot V., Hertz E., Faucher O., Lavorel B. *Opt. Express*, **18** (3), 3011 (2010).
- Волкова Е.А., Попов А.М., Тихонова О.В. *ЖЭТФ*, **143** (3), 433 (2013).
- Федоров В.Ю., Кандидов В.П. *Оптика и спектроскопия*, **105**, 306 (2008).
- Etoumi W., Petit Y., Kasparian J., Wolf J.-P. *Opt. Express*, **18** (7), 6613 (2010).
- Wang C.C. *Phys. Rev. B*, **2** (6), 2045 (1970).
- Geints Yu.E., Kabanov A.M., Zemlyanov A.A., Vykova E.E., Bukin O.A., Golik S.S. *Appl. Phys. Lett.*, **99**, 18 (2011).
- Делоне Н.Б., Крайнов В.П. *Нелинейная ионизация атомов лазерным излучением* (М.: Физматлит, 2001).
- Райзер Ю.П. *Физика газового разряда* (М.: Наука, 1987).
- Переломов А.М., Попов В.С., Терентьев М.В. *ЖЭТФ*, **50**, 1393 (1966).
- Келдыш Л.В. *ЖЭТФ*, **47**, 1945 (1964).
- Itikawa Y. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **35** (1), 31 (2006).
- Talukder M.R., Bose S., Patoary M.A.R., Haque A.K.F., Uddin M.A., Basak A.K., Kando M. *Eur. Phys. J. D*, **46**, 281 (2008).
- Dyatko N.A., Kochetov I.V., Napartovich A.P. Sukharev A.G. <http://www.lxcat.laplace.univ-tlse.fr/software/EEDF/>.
- Sun Z., Chen J., Rudolph W. *Phys. Rev. E*, **83**, 046408 (2011).
- Bodrov S., Aleksandrov N., Tsarev M., Murzanev A., Kochetov I., Stepanov A. *Phys. Rev. E*, **87**, 053101 (2013).
- Romanov D. A., Compton R., Filin A., Levis R.J. *Phys. Rev. A*, **81**, 033403 (2010).
- Справочник по специальным функциям*. Под ред. М.Абрамовица и И.М.Стиган (М.: Наука, 1979).
- Aleksandrov N.L., Kindysheva S.V., Nudnova M.M., Starikovskiy A.Yu. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **43**, 255201 (2010).