PACS 42.25.Bs

Об описании мощного лазерного излучения в параксиальном приближении

В.П.Милантьев, С.П.Карнилович, Я.Н.Шаар

Рассмотрена возможность адекватного описания лазерного импульса произвольной формы в рамках параксиального приближения. В этом приближении с помощью параболического уравнения разложением по малому параметру получены выражения для поля достаточно мощного лазерного излучения, представляемого в виде аксиально-симметричных эрмит-гауссовых пучков произвольной моды и с произвольной поляризацией. Показано, что в случае достаточно коротких импульсов поправки к поперечным компонентам поля излучения являются величинами не второго, а первого порядка в разложении по малому параметру. Отмечены особенности описания эрмит-гауссовых пучков высших мод.

Ключевые слова: *лазерный импульс, параксиальное приближение, эрмит-гауссовы пучки, высшие моды.*

1. Введение

Адекватное задание векторного поля лазерного излучения играет важную роль в различных задачах, в частности в исследованиях ускорения заряженных частиц. Наиболее разработанным является описание лазерного излучения в квазиоптическом параксиальном приближении в виде гауссовых (или эрмит-гауссовых) пучков, распространяющихся вдоль оси z [1–7]. В этом случае предполагается, что радиус пучка a в плоскости $z = 0$, соответствующей центру перетяжки гауссова пучка, намного превышает длину волны λ_0. Тогда угол раскрытия ϑ конуса, в котором волна распространяется вдоль оси z, в дальней зоне ($z \gg z_R$) достаточно мал: $\vartheta \approx \lambda_0(\pi a)^{-1} = a/z_R \ll 1$. Здесь $z_R = k_0 a^2/2$ – рэлеевская длина, определяющая дифракционное расплывание волнового пучка; $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega_0/c$ – волновое число; ω_0 – несущая частота волны; c – скорость света. Таким образом, в параксиальном приближении существует малый параметр

$$\mu = 2/(k_0 a) = a/z_R \ll 1. \tag{1}$$

Отметим, что в параксиальном приближении поперечная компонента волнового вектора мала по сравнению с длиной этого вектора [6]: $(k_x^2 + k_y^2)/k_0^2 \ll 1$.

Наличие малого параметра позволяет использовать теорию возмущений при решении волнового уравнения для векторов электромагнитного поля. В этом случае из волнового уравнения следует приближенное уравнение параболического типа. В нулевом приближении поля имеют лишь поперечные компоненты, и поправки к ним возникают обычно во втором приближении. Продольные компоненты векторов поля в направлении распространения волны оказываются величинами первого порядка. Отметим, что в ряде работ, в которых рассматривалось движение частиц в поле лазерного излучения, продольная составляющая поля вообще не учитывалась [8]. Это, естественно, приводило к ошибочным результатам.

В связи с созданием мощных лазеров, генерирующих ультракороткие импульсы [9], возникла задача описания такого излучения [10–12]. В частности, в работах [10, 11] рассматривалось остросфокусированное лазерное излучение с интенсивностью ~10^{22} Вт/см^2 и более, для которого размер фокального пятна может быть меньше длины волны. В этом случае параметр (1) не мал, так что параксиальное приближение становится неприменимым. Вместе с тем в работе [13] было показано, что в параксиальном приближении возможно описание фемтосекундных импульсов основной моды с интенсивностью около 10^{18} Вт/см^2.

В настоящей работе поле мощного лазерного излучения рассматривается в рамках параксиального приближения. В отличие от [13] обсуждаются случаи различного соотношения между длиной волны и протяженностью импульса $c\Delta t$ (Δt – длительность импульса), а кроме того, рассматриваются эрмит-гауссовы пучки произвольной моды и с произвольной поляризацией. Векторы поля находятся прямым решением параболического уравнения. Показано, что в случае достаточно коротких импульсов поправки к поперечным компонентам векторов поля возникают не во втором, а в первом порядке по параметру (1). Эти поправки вычислены в случае аксиально-симметричных эрмит-гауссовых пучков с произвольной формой импульса.

2. Поле лазерного излучения

Будем описывать лазерное излучение в вакууме с помощью напряженностей поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$. Электрическое поле $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{2a}$$

при условии

В.П.Милантьев, С.П.Карнилович, Я.Н.Шаар. Российский университет дружбы народов, Россия, 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6; e-mail: vmilant@mail.ru, skarnilovitch@mail.ru

Поступила в редакцию 9 марта 2015 г., после доработки – 24 июня 2015 г.

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0. \quad (2б)$$

Будем считать, что излучение распространяется в направлении оси z, и вектор напряженности электрического поля зависит от «быстрого» времени $\tau = t - z/c$ и безразмерного параметра $\sigma = (t - z/c)/\Delta t$, определяющего импульсный характер излучения: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \tau, \sigma)$. Представим $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \tau, \sigma)$ в виде фурье-разложения по «быстрому» времени:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\tau,\sigma) = (2\pi)^{-1}\int \mathrm{d}\omega \boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{r},\sigma)\exp(-\mathrm{i}\omega\tau). \quad (3)$$

Вводя безразмерные пространственные координаты $X, Y, Z = x/a,\ y/a,\ z/z_{\mathrm{R}}$, с учетом соотношения (1) получаем уравнение для фурье-амплитуд напряженности $\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{r}, \sigma)$ в виде

$$\Delta_\perp \boldsymbol{E}_\omega + 4\mathrm{i}\frac{\omega}{\omega_0}\frac{\partial \boldsymbol{E}_\omega}{\partial Z} + \mu^2\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_\omega}{\partial Z^2} - \frac{2\lambda_0}{\pi c\Delta t}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_\omega}{\partial\sigma\partial Z} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\Delta_\perp$ – оператор Лапласа по поперечным координатам X, Y. Видно, что третий член в уравнении (4) имеет второй порядок малости и в нулевом приближении может быть опущен. Роль последнего члена в (4) существенно зависит от длительности рассматриваемого импульса. Обычно предполагается [13], что протяженность импульса значительно превышает длину волны $\lambda_0/(c\Delta t) \ll 1$, или что длительность импульса больше периода колебаний $\Delta t \gg T = 2\pi/\omega_0$. При этом порядок малости не конкретизируется. Рассмотрим подробнее возможное соотношение между длиной волны и протяженностью импульса. Если последний член в уравнении (4) порядка μ^2 или меньше, то это соответствует достаточно длинным импульсам с протяженностью $c\Delta t \geqslant 2z_{\mathrm{R}}$. Например, при длине волны $\lambda_0 = 1$ мкм и $a = 10$ мкм длительность импульса $\Delta t \geqslant 2$ пс. В этом случае последний член в уравнении (4) не влияет на эволюцию фурье-амплитуд в нулевом приближении. Тогда векторы поля можно представить в виде известных разложений [3] по четным степеням параметра μ:

$$\boldsymbol{E}_\omega = \boldsymbol{E}^0_\omega + \mu^2\boldsymbol{E}^2_\omega + \ldots\,.$$

Если последний член в уравнении (4) является малым, порядка μ, то в нулевом приближении он также может быть опущен. В этом случае импульсы могут быть более короткими: $c\Delta t \approx 2a$. Например, при $a = 10$ мкм длительность импульса $\Delta t \approx 60$ фс. Импульсы такой длительности легко генерируются современными мощными лазерами. Тогда векторы поля можно представить в виде последовательных разложений:

$$\boldsymbol{E}_\omega = \boldsymbol{E}^0_\omega + \mu\boldsymbol{E}^1_\omega + \mu^2\boldsymbol{E}^2_\omega\ldots\,.$$

В случае ультракоротких импульсов, когда $c\Delta t \approx 2\lambda_0/\pi$, последний член в уравнении (4) становится сравнимым с основными членами и уравнение в нулевом приближении существенно усложняется. Однако в этом случае, который здесь не рассматривается, само параксиальное приближение неприменимо.

Таким образом, как отмечалось в [13], параксиальное приближение может быть вполне адекватным при описании лазерного излучения фемтосекундной длительности.

В нулевом приближении поле лазерного излучения $\boldsymbol{E}^0_\omega$ можно рассматривать в виде поперечных электромагнитных волн. Поэтому вектор $\boldsymbol{E}^0_\omega$ имеет только поперечные компоненты $\boldsymbol{E}^0_\omega \equiv \boldsymbol{E}^0_{\omega\perp}$, так что в нулевом приближении продольная составляющая в направлении распространения волны отсутствует: $E^0_{\omega z} = 0$. Следует считать, что уравнение (4) описывает лишь поперечные составляющие вектора $\boldsymbol{E}_\omega$, причем не только в нулевом, но и во всех последующих приближениях. Это связано с тем, что компоненты поля должны удовлетворять уравнению (2б). Из этого уравнения при заданных поперечных компонентах, определяемых уравнением (4), последовательными приближениями можно найти продольную составляющую вектора $\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{r}, \sigma)$.

3. Поперечные компоненты электрического поля

Согласно (4) вектор $\boldsymbol{E}^0_{\omega\perp}$ в нулевом приближении описывается параболическим уравнением

$$\Delta_\perp \boldsymbol{E}^0_{\omega\perp} + 4\mathrm{i}\frac{\omega}{\omega_0}\frac{\partial \boldsymbol{E}^0_{\omega\perp}}{\partial Z} = 0. \quad (5а)$$

Формально это означает пренебрежение второй производной по продольной координате z.

Видно, что в уравнении (5а) импульсный параметр σ в явном виде не содержится, поэтому вектор $\boldsymbol{E}^0_{\omega\perp}(\boldsymbol{r},\sigma)$ можно представить в виде произведения:

$$\boldsymbol{E}^0_{\omega\perp}(\boldsymbol{r},\sigma) = \boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{r})f(\sigma), \quad (5б)$$

где функция $f(\sigma)$ определяет форму импульса. Функция $f(\sigma)$ может задаваться по-разному, но при этом она должна быть достаточно плавной. Например, в [13] принимается, что $f(\sigma) = \cos^2[\pi(t - z/c)/(2\Delta t)]$, в работе [14] $f(\sigma) = \exp\{-[(t - z/c - z_0/c)/\Delta t]^s\}$ и т.п. Заметим, что в работе [15] рассматривалось распространение двумерного импульса, ограниченного в пространстве и во времени.

В аксиально-симметричном случае с использованием цилиндрических координат $\rho \equiv r/a$ и Z, где r – расстояние от оси пучка, уравнение (5а) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_{\omega\perp}(\boldsymbol{r})}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \boldsymbol{E}_{\omega\perp}(\boldsymbol{r})}{\partial\rho} + 4\mathrm{i}\frac{\omega}{\omega_0}\frac{\partial \boldsymbol{E}_{\omega\perp}(\boldsymbol{r})}{\partial Z} = 0. \quad (6)$$

Здесь учтено соотношение (5б). Уравнение (6) имеет множество решений. Обычно рассматривается решение автомодельного вида [6]:

$$\boldsymbol{E}_{\omega\perp m}(r,z) = \frac{\boldsymbol{E}^0_{\omega m}(0)}{(1 + \mathrm{i}Z\omega_0/\omega)^{m+1}}g_m(\zeta). \quad (7)$$

Здесь $\boldsymbol{E}^0_{\omega\perp}$ – амплитуда поля в фокусе на оси пучка; m – целое положительное число, включая нуль; $\zeta = \rho^2/(1+\mathrm{i}Z\omega_0/\omega)$; $g_m(\zeta)$ – искомая функция, которая согласно (6) и (7) удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\zeta\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}\zeta^2} + (1 + \zeta)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\zeta} + (m + 1)g = 0. \quad (8)$$

Это уравнение имеет решение [6]

$$g_m(\zeta) = \mathrm{e}^{-\zeta}L_m(\zeta), \quad (9)$$

где $L_m(\zeta)$ – полином Лагерра m-го порядка. Полиномы $L_m(\zeta)$ образуют ортонормированную систему функций с весом $\exp(-\zeta)$ [16]. При этом, чтобы не выходить за рамки параболического приближения, число m не может быть слишком большим [6].

Таким образом, решение параболического уравнения (6) представляется в виде эрмит-гауссова пучка моды m-го порядка [6, 7]:

$$\boldsymbol{E}^0_{\omega\perp} \to \boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{r})f(\sigma) = \frac{\boldsymbol{E}^0_{\omega m}(0)f(\sigma)}{(1+\mathrm{i}Z\omega_0/\omega)^{m+1}}L_m(\zeta)\mathrm{e}^{-\zeta}. \quad (10)$$

В силу линейности уравнения (6) суперпозиция мод (10) также является его решением.

Если частотный спектр излучения $\Delta\omega$ достаточно узок ($\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$), то фурье-спектр амплитуды $\boldsymbol{E}^0_{\omega\perp}$ имеет острый максимум в окрестности несущей частоты ω_0. Тогда поперечные компоненты поля излучения (3) в нулевом приближении можно представить в виде

$$\boldsymbol{E}_{\perp m}(\boldsymbol{r},\tau,\sigma) \to \boldsymbol{E}^0_{\omega_0\perp m}(r,\tau,\sigma)\exp(-\mathrm{i}\omega_0\tau).$$

Запишем выражение для поперечных компонент электрического поля излучения в эквивалентной форме (считая $\omega_0 = \omega$):

$$\boldsymbol{E}^0_{\perp m}(\boldsymbol{r},\tau,\sigma) = f(\sigma)\boldsymbol{E}_m(r,z)\exp(\mathrm{i}\theta), \quad (11а)$$

где комплексная амплитуда моды m-го порядка

$$\boldsymbol{E}_m(r,z) = \frac{\boldsymbol{E}^0_m(0)}{(1+\mathrm{i}Z)^{m+1}}L_m(\zeta)\mathrm{e}^{-\zeta}, \quad (11б)$$

а фаза

$$\theta = \omega(z/c - t), \quad \zeta = \rho^2/(1+\mathrm{i}Z). \quad (11в)$$

Полином Лагерра порядка m, в общем, имеет разложение [16]:

$$L_m(\zeta) = \sum_{s=0}^{m}\frac{(-1)^s\Gamma^2(m+1)}{\Gamma^2(s+1)\Gamma(m-s+1)}\zeta^s,$$

где $\Gamma(m)$ – гамма-функция. Поскольку аргумент $\zeta = \rho^2/[(1+Z^2)^{1/2}[\exp(-\mathrm{i}\chi)$, где $\chi = \arctan Z$, является комплексным, то в каждом члене полинома Лагерра содержится свой фазовый множитель. Поэтому формула (11а) представима в виде

$$\boldsymbol{E}(r,z,\tau,\sigma) = f(\sigma)\sum_{s=0}^{m}\boldsymbol{E}_{ms}(r,z)\exp(\mathrm{i}\psi_{ms}). \quad (12а)$$

Здесь введены амплитуды, определяющие поляризацию волны,

$$\boldsymbol{E}_{ms}(r,z) = \frac{\boldsymbol{E}^0_m(0)}{(1+Z^2)^{(m+1)/2}}\frac{(-1)^s\Gamma^2(m+1)}{\Gamma^2(s+1)\Gamma(m-s+1)} \times\frac{\rho^{2s}}{(1+Z^2)^{s/2}}\exp\left(-\frac{\rho^2}{1+Z^2}\right), \quad (12б)$$

а также фазы

$$\psi_{ms} = \theta + \frac{\rho^2 Z}{1+Z^2} - (m+1+s)\chi. \quad (12в)$$

Отметим, что фазовая скорость рассматриваемого излучения превышает скорость света в вакууме.

При рассмотрении конкретной моды удобнее использовать описание электрического поля гауссова пучка в нулевом приближении в виде (11а), а не (12а). Приведем примеры. Поле основной моды с произвольной поляризацией

$$\boldsymbol{E}^0_{\perp 0}(\rho,Z,\tau,\sigma) = \frac{f(\sigma)\boldsymbol{E}^0_0(0)}{2(1+Z^2)^{1/2}}\exp\left(-\frac{\rho^2}{1+Z^2}\right)\exp(\mathrm{i}\varphi_0). \quad (13а)$$

Поле первой моды

$$\boldsymbol{E}^0_{\perp 1}(\rho,Z,\tau,\sigma) = \frac{f(\sigma)\boldsymbol{E}^0_1(0)}{2(1+Z^2)^{3/2}}\sqrt{(1-\rho^2)^2+Z^2} \times\exp\left(-\frac{\rho^2}{1+Z^2}\right)\exp[\mathrm{i}(\varphi_1+\xi_1)]. \quad (13б)$$

Поле второй моды

$$\boldsymbol{E}^0_{\perp 2}(\rho,Z,\tau,\sigma) = \frac{f(\sigma)\boldsymbol{E}^0_2(0)}{2(1+Z^2)^{5/2}} \times\sqrt{[\rho^4-4\rho^2+2(1-Z^2)]^2+16Z^2(1-\rho^2)^2} \times\exp\left(-\frac{\rho^2}{1+Z^2}\right)\exp[\mathrm{i}(\varphi_2+\xi_2)]. \quad (13в)$$

В этих формулах $\varphi_m = \theta + Z\rho^2/(1+Z^2) - (2m+1)\chi$; $\xi_1 = \arctan[Z/(1-\rho^2)] + \pi\eta(1-\rho^2)$; $\xi_2 = \arctan 4Z(1-\rho^2)/[\rho^4 - 4\rho^2 + 2(1-Z^2)] + \pi\eta\{4Z(1-\rho^2)/[\rho^4-4\rho^2+2(1-Z^2)]\}$; $\eta(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда.

Из (13б) видно, что при $Z = 0$ электрическое поле первой моды исчезает на окружности с радиусом, равным радиусу a гауссова пучка.

В случае достаточно длинных импульсов последовательное решение параболического уравнения (6) представляется в виде разложений по четным степеням параметра μ [3, 17]. В отличие от длинных импульсов, поперечные компоненты электрического вектора достаточно коротких и плавных импульсов согласно уравнению (4) должны иметь поправки первого приближения. Эти поправки определяются уравнением

$$\Delta_\perp\boldsymbol{E}^1_{\perp\omega} + 4\mathrm{i}\frac{\partial\boldsymbol{E}^1_{\perp\omega}}{\partial Z} - \frac{2\lambda_0}{\pi c\Delta t}\frac{\partial\ln f(\sigma)}{\partial\sigma}\frac{\partial\boldsymbol{E}^0_{\perp\omega}}{\partial Z} = 0. \quad (14)$$

Если поле в нулевом приближении $\boldsymbol{E}^0_{\perp\omega}$ описывает пучок m-й моды по формуле (11а), то, используя рекуррентное соотношение для полиномов Лагерра [16]

$$\zeta\frac{\partial L_m(\zeta)}{\partial\zeta} = (\zeta - m - 1)L_m(\zeta) + L_{m+1}(\zeta), \quad (15)$$

получаем

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}^0_{\perp m}}{\partial Z} = -\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{E}^0_m(0)f(\sigma)}{(1+\mathrm{i}Z)^{m+2}}L_{m+1}(\zeta)\exp(-\zeta). \quad (16)$$

Видно, что дифференцирование (11а) по Z приводит к увеличению на единицу порядка полинома Лагерра. При этом функция (16), как и (11а), описывает эрмит-гауссов пучок и удовлетворяет параболическому уравнению (6). Учитывая указанные свойства таких пучков, получаем общее решение уравнения (14):

$$\boldsymbol{E}^1_{\perp m}(r,z,t) = -\frac{\lambda_0}{2\pi c\Delta t} Z \frac{\boldsymbol{E}^0_m(0) f'(\sigma)}{(1+\mathrm{i}Z)^{m+2}} \times L_{m+1}(\zeta)\exp(-\zeta+\mathrm{i}\theta). \quad (17)$$

Из формулы (17) видно, что для любой моды в плоскости перетяжки эрмит-гауссова пучка при $Z = 0$ поправки к поперечным компонентам поля отсутствуют. Отметим также, что поправки первого порядка целиком связаны с импульсным характером излучения. В случае гауссова пучка ($m = 0$) из (17) следует выражение для поправки:

$$\boldsymbol{E}^1_{\perp 0}(r,z,t) = -\frac{\lambda_0}{4\pi c\Delta t} Z \frac{\boldsymbol{E}^0_0(0) f'(\sigma)}{(1+Z^2)^{3/2}} \sqrt{(1-\rho^2)^2+Z^2} \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{1+Z^2}\right)\exp(\mathrm{i}\psi_0), \quad (18а)$$

где фаза

$$\psi_0 = \theta - 3\chi + \frac{Z\rho^2}{1+Z^2} + \arctan\frac{Z}{1-\rho^2} + \pi\eta(1-\rho^2);$$

$$f'(\sigma) \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma}.$$

В частном случае плавного импульса, задаваемого в виде $f(\sigma) = \cos^2[\pi(t - z/c)/(2\Delta t)]$, формула (18а) совпадает с результатами [13], полученными для излучения с линейной поляризацией.

Поправка первого порядка в случае пучка с $m = 1$ согласно (17) определяется формулой

$$\boldsymbol{E}^1_{\perp 1}(r,z,t) = -\frac{\lambda_0}{2\pi c\Delta t} Z \frac{\boldsymbol{E}^0_1(0) f'(\sigma)}{(1+Z^2)^{5/2}} \times \sqrt{[2(1-Z^2)+\rho^2(\rho^2-4)]^2+16Z^2(1-\rho^2)^2} \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{1+Z^2}\right)\exp(\mathrm{i}\psi_1), \quad (18б)$$

где фаза

$$\psi_1 = \theta - 5\chi + \frac{Z\rho^2}{1+Z^2} + \arctan\frac{4Z(1-\rho^2)}{\rho^2(\rho^2-4)+2(1-Z^2)} + \pi\eta\left[\frac{1-\rho^2}{\rho^2(\rho^2-4)+2(1-Z^2)}\right].$$

Сравнивая формулы (13) и (18а), можно увидеть общую закономерность: поле в нулевом приближении для первой моды и поправка первого порядка к полю основной моды имеют одинаковую пространственную зависимость; кроме того, одинаковую пространственную зависимость имеют поле второй моды в нулевом приближении и поправка первого порядка к полю первой моды.

В случае мод более высоких порядков вид поправок первого порядка (17) становится более сложным. Поправки высших приближений порядка μ^q ($q \geqslant 2$) к поперечным компонентам электрического поля определяются согласно (4) уравнением

$$\Delta_\perp \boldsymbol{E}^q_{\omega m} + 4\mathrm{i}\frac{\partial \boldsymbol{E}^q_{\omega m}}{\partial Z} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}^{q-2}_{\omega m}}{\partial Z^2} - \frac{2\lambda_0}{\pi c\Delta t}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}^{q-1}_{\omega m}}{\partial\sigma\partial Z} = 0. \quad (19)$$

Из этого уравнения следует, что поправки высоких порядков можно вычислить, если импульсная функция дифференцируема необходимое число раз.

Найдем поправку второго порядка ($q = 2$) к поперечным компонентам напряженности электрического поля произвольной моды. Учитывая формулы (10), (16а) и (17), из (19) получаем общее выражение:

$$\boldsymbol{E}^2_{\perp m}(r,z,t) = \frac{\boldsymbol{E}^0_m(0)}{4\mathrm{i}(1+\mathrm{i}Z)^{m+3}} \times \left\{ Z\left[f(\sigma)L_{m+2}(\zeta) - \frac{\lambda_0^2 f''(\sigma)}{(\pi c\Delta t)^2}(1+\mathrm{i}Z)L_{m+1}(\zeta)\right] - \frac{Z^2\lambda_0^2 f''(\sigma)}{2(\pi c\Delta t)^2}L_{m+2}(\zeta)\right\}\exp(-\zeta+\mathrm{i}\theta). \quad (20)$$

Видно, что поправки второго порядка, как и первого, в плоскости перетяжки ($Z = 0$) пучка произвольной моды отсутствуют. В случае гауссова пучка поправка второго порядка согласно (20) описывается выражением

$$E^2_{\perp 0}(r,z,t) = \frac{E^0_0(0)}{4}\left\{\left[Z - \frac{Z^2\lambda_0^2 f''(\sigma)}{2(\pi c\Delta t)^2}\right] \times \frac{\sqrt{[\rho^2(\rho^2-4)+2(1-Z^2)]^2+16Z^2(1-\rho^2)^2}}{(1+Z^2)^{5/2}}\exp[-\mathrm{i}(5\chi-\xi_2)] - \frac{Z\lambda_0^2 f''(\sigma)}{(\pi c\Delta t)^2}\frac{\sqrt{(1-\rho^2)^2+Z^2}}{(1+Z^2)^{3/2}}\exp[-\mathrm{i}(3\chi-\xi_1)]\right\} \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{1+Z^2}\right)\exp\left[\mathrm{i}\left(\theta+\frac{Z\rho^2}{1+Z^2}-\frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (21)$$

Отсюда видно, что пространственная зависимость поправки к полю основной моды во втором приближении является комбинацией зависимостей поля в нулевом приближении для первой и второй мод. Поправки второго порядка для пучков первой и других мод согласно (20) имеют более сложный вид.

Получение поправок высших приближений ($q > 2$) из уравнения (19) связано с очень громоздкими вычислениями. Однако можно видеть, что поправки любого порядка обращаются в нуль в плоскости перетяжки пучка любой моды. Отметим, что поправки высоких порядков по параметру μ для основной моды гауссова излучения линейной поляризации рассматривались в работе [17]. Однако при этом не учитывался импульсный характер излучения, в связи с чем были получены поправки лишь четных порядков ($\mu^2, \mu^4, \mu^6,\ldots$). Кроме того, разложения предполагались справедливыми при довольно большом значении параметра $\mu = 0.8$, что нельзя считать корректным. Отметим также, что рассчитанные в [17] поправки не исчезают в фокальной плоскости, как в найденном нами выражении (21). Возможно, это связано с тем, что полученные в [17] поправки являются некоторым частным решением параболического уравнения вида (19) (без последнего члена), тогда как при выводе (20) и (21) использовались общие свойства эрмит-гауссовых пучков.

Отметим, что в [17] параболическое уравнение рассматривалось не для вектора напряженности электрического поля, а для потенциалов гауссова пучка с линейной поляризацией.

4. Продольная компонента электрического поля эрмит-гауссова пучка

Рассмотрим уравнение (2б), полагая, что продольная составляющая напряженности электрического поля для любой моды имеет вид

$$E_{zm}(X,Y,Z,\tau,\sigma,) = E_z(X,Y,Z,\sigma)\exp(\mathrm{i}\theta).$$

В этом случае получаем

$$E_z = \frac{\mathrm{i}}{ka}\left(\frac{\partial E_{mx}}{\partial X} + \frac{\partial E_{my}}{\partial Y} + \frac{a}{z_R}\frac{\partial E_z}{\partial Z}\right). \tag{22}$$

Отсюда следует, что продольная составляющая $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \tau, \sigma)$ является величиной первого порядка малости, которую с использованием формул (11) можно представить в виде

$$E^1_{zm}(X,Y,Z,t) = \frac{2\mathrm{i}f(\sigma)}{ka(1+Z^2)^{(m+2)/2}}[XE^0_{xm}(0) + YE^0_{ym}(0)]$$

$$\times\frac{1}{m+1}\frac{\mathrm{d}L_{m+1}}{\mathrm{d}\zeta}\exp(-\zeta+\mathrm{i}\varphi_m), \tag{23а}$$

где фаза

$$\varphi_m \equiv \theta - (m+2)\chi. \tag{23б}$$

При выводе (23а) использована формула [16]

$$\frac{\mathrm{d}L_m}{\mathrm{d}\zeta} - L_m = \frac{1}{m+1}\frac{\mathrm{d}L_{m+1}}{\mathrm{d}\zeta}.$$

Отметим, что формула (23а) описывает продольное поле в первом приближении при произвольной поляризации излучения. Из этой формулы видно, что на оси эрмит-гауссова пучка любой моды продольное электрическое поле отсутствует. Для основной моды из (23а) получаем

$$E^1_{z0}(X,Y,Z,\sigma,t) = -\frac{2\mathrm{i}f(\sigma)}{ka(1+Z^2)}[XE^0_{0x}(0) + YE^0_{0y}(0)]$$

$$\times\exp\left[-\frac{\rho^2}{1+Z^2} + \mathrm{i}\left(\varphi_0 + \frac{Z\rho^2}{1+Z^2}\right)\right]. \tag{24а}$$

Для первой моды

$$E^1_{z1}(X,Y,Z,\sigma,t) = -\frac{2\mathrm{i}f(\sigma)\sqrt{(2-\rho^2)^2+4Z^2}}{ka(1+Z^2)^2}$$

$$\times[XE^0_{1x}(0) + YE^0_{1y}(0)]\exp\left[-\frac{\rho^2}{1+Z^2} + \mathrm{i}(\varphi_2+\xi)\right]. \tag{24б}$$

Здесь

$$\xi = \frac{Z\rho^2}{1+Z^2} + \arctan\frac{2Z}{2-\rho^2} + \pi\eta(2-\rho^2).$$

Из (24б) видно, что в плоскости перетяжки пучка продольное электрическое поле первой моды зануляется на окружности радиусом $\rho = \sqrt{2}$.

В пренебрежении импульсным характером излучения следующая поправка к продольному электрическому полю возникает в третьем приближении по параметру μ [17]. В рассматриваемом случае достаточно плавного и короткого импульса следующий поправочный член является величиной второго порядка малости. Найти его можно из уравнения (22) с учетом формулы (17):

$$E^2_{zm}(X,Y,Z,t) = -\frac{\mathrm{i}\lambda_0 Zf'(\sigma)}{ka\pi c\Delta t(m+2)(1+Z^2)^{(m+3)/2}}$$

$$\times[XE^0_{mx}(0) + YE^0_{my}(0)]\frac{\mathrm{d}L_{m+2}}{\mathrm{d}\zeta}\exp(-\zeta+\mathrm{i}\varphi_{m+1}). \tag{25}$$

Видно, что продольное электрическое поле во втором приближении отсутствует не только на оси пучка, но и на всей фокальной плоскости.

5. Магнитное поле эрмит-гауссова пучка

Компоненты вектора индукции магнитного поля $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ можно найти с помощью уравнения Максвелла: $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -1/c(\partial\boldsymbol{B}/\partial t)$. Представляя поля в виде разложения Фурье (3), получаем

$$\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}_\omega - \frac{1}{\Delta t}\frac{\partial\boldsymbol{B}_\omega}{\partial\sigma} = c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_\omega - \frac{1}{\Delta t}\frac{\partial[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{E}_\omega]}{\partial\sigma} + \mathrm{i}ck[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{E}_\omega]. \tag{26}$$

Здесь $\boldsymbol{e}_1$ – единичный вектор в направлении распространения волны – оси z. Из уравнения (26) следует, что в нулевом приближении поперечные компоненты поля излучения m-й моды связаны соотношениями, характерными для электромагнитной волны в вакууме:

$$B^0_{xm}(r,z,\sigma,t) = -E^0_{ym}(r,z,\sigma,t),$$
$$B^0_{ym}(r,z,\sigma,t) = E^0_{xm}(r,z,\sigma,t). \tag{27}$$

Такие же соотношения сохраняются и в первом приближении. Во втором приближении получаем

$$B^2_{xm}(r,z,\sigma,t) = -E^2_{ym}(r,z,\sigma,t) + \frac{1}{\mathrm{i}ka}\left(\frac{\partial E^1_{zm}}{\partial Y} - \frac{a}{z_R}\frac{\partial E^0_{ym}}{\partial Z}\right),$$
$$B^2_{ym}(r,z,\sigma,t) = E^2_{xm}(r,z,\sigma,t) - \frac{1}{\mathrm{i}ka}\left(\frac{\partial E^1_{zm}}{\partial X} - \frac{a}{z_R}\frac{\partial E^0_{xm}}{\partial Z}\right). \tag{28}$$

Здесь компоненты электрического поля $\boldsymbol{E}^2_{\perp m}(r,z,\sigma,t)$ определяются по общей формуле (20). Используя формулы (16) и (23а), получаем общие выражения для поперечных компонент магнитного поля во втором приближении:

$$B^2_{xm}(r,z,\sigma,t) = -E^2_{ym}(r,z,\sigma,t) + \frac{2f(\sigma)}{(ka)^2(m+1)(1+\mathrm{i}Z)^{m+2}}$$

$$\times\left\{E^0_{ym}(0)\frac{\mathrm{d}L_{m+1}}{\mathrm{d}\zeta} + \frac{2Y}{(m+2)(1+\mathrm{i}Z)}[XE^0_{xm}(0) + YE^0_{ym}(0)]\right.$$

$$\left.\times\frac{\mathrm{d}^2L_{m+2}}{\mathrm{d}\zeta^2}\right\}\exp(-\zeta+\mathrm{i}\theta) + \frac{f(\sigma)E^0_{ym}(0)L_{m+1}(\zeta)}{kz_R(1+\mathrm{i}Z)^{m+2}}\exp(-\zeta+\mathrm{i}\theta),$$

$$B_{ym}^{2}(r,z,\sigma,t) = E_{xm}^{2}(r,z,\sigma,t) - \frac{2f(\sigma)}{(ka)^{2}(m+1)(1+\mathrm{i}Z)^{m+2}}$$

$$\times\left\{E_{xm}^{0}(0)\frac{\mathrm{d}L_{m+1}}{\mathrm{d}\zeta} + \frac{2X}{(m+2)(1+\mathrm{i}Z)}[XE_{xm}^{0}(0) + YE_{ym}^{0}(0)]\right.$$

$$\left.\times\frac{\mathrm{d}^{2}L_{m+2}}{\mathrm{d}\zeta^{2}}\right\}\exp(-\zeta+\mathrm{i}\theta) + \frac{f(\sigma)E_{xm}^{0}(0)L_{m+1}(\zeta)}{kz_{R}(1+\mathrm{i}Z)^{m+2}}\exp(-\zeta+\mathrm{i}\theta).$$

Отсюда следует, что даже для основной моды гауссова пучка с произвольной поляризацией магнитное поле во втором приближении описывается очень сложными формулами. Они упрощаются в случае линейной поляризации.

Продольная составляющая магнитного поля, как и электрического поля, возникает лишь в первом приближении:

$$B_{zm}^{1} = \frac{1}{\mathrm{i}ka}\left(\frac{\partial E_{ym}^{0}}{\partial X} - \frac{\partial E_{xm}^{0}}{\partial Y}\right) = \frac{2f(\sigma)[XE_{ym}^{0}(0) - YE_{xm}^{0}(0)]}{\mathrm{i}ka(m+1)(1+\mathrm{i}Z)^{m+2}}$$

$$\times\frac{\mathrm{d}L_{m+1}}{\mathrm{d}\zeta}\exp(-\zeta+\mathrm{i}\theta). \qquad (29а)$$

Легко видеть, что формула (29а) аналогична формуле (23а) для продольного электрического поля. Как и в случае электрического поля, на оси эрмит-гауссова пучка любой моды продольная составляющая магнитного поля отсутствует. Для основной моды из (29а) следует

$$B_{z0}^{1} = \frac{2\mathrm{i}f(\sigma)[XE_{ym}^{0}(0) - YE_{xm}^{0}(0)]}{ka(1+Z^{2})}$$

$$\times\exp\left[-\frac{\rho^{2}}{1+Z^{2}} + \mathrm{i}\left(\varphi_{0} + \frac{Z\rho^{2}}{1+Z^{2}}\right)\right], \qquad (29б)$$

где φ_0 определяется формулой (23б).

Продольная составляющая магнитного поля первой моды

$$B_{z1}^{1} = \frac{2\mathrm{i}f(\sigma)[XE_{ym}^{0}(0) - YE_{xm}^{0}(0)]}{ka(1+Z^{2})^{2}}\sqrt{(2-\rho^{2})^{2} + 4Z^{2}}$$

$$\times\exp\left[-\frac{\rho^{2}}{1+Z^{2}} + \mathrm{i}(\varphi_{2} + \xi)\right], \qquad (29в)$$

и во втором приближении она вычисляется аналогично (25).

6. Заключение

Рассмотрено поле мощного лазерного излучения в параксиальном приближении с помощью разложения волнового уравнения по параметру (1). Импульсный характер излучения учитывается с помощью параметра σ как дополнительного аргумента поля. При этом заранее не предполагается существование импульсной функции, на которую умножаются векторы поля. Такая функция достаточно общего вида естественно возникает при последовательном рассмотрении соотношений между протяженностью импульса и длиной волны излучения в параболическом уравнении. Показано, в согласии с [13], что параксиальное приближение вполне применимо для описания импульсов фемтосекундной длительности, но при этом, в отличие от более длинных импульсов, поперечные компоненты поля имеют поправки первого, а не второго порядка малости по параметру (1). В аксиально-симметричном случае получены общие выражения для поля излучения в нулевом, первом и втором приближениях разложений по параметру μ в виде эрмит-гауссовых пучков произвольной моды и произвольной поляризации. Приведены конкретные формулы для основной и первой мод.

Обычно лазерное излучение рассматривают в виде гауссова пучка. Однако более высокие моды изменяют пространственную структуру импульсного излучения, что, естественно, влияет на характер его распространения. Показано, что для вычисления поправок высокого порядка требуется, чтобы импульсная функция была дифференцируема необходимое число раз. Подчеркнем, что полученные выражения ограничены рамками применимости параксиального приближения в случае достаточно коротких импульсов. Спектральная ширина импульса, малая по сравнению с несущей частотой ($\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$), связана с длительностью спектрально-ограниченного импульса общим соотношением: $\Delta\omega\,\Delta t \approx 2\pi$.

Отметим, что найденные в настоящей работе поправки второго порядка к поперечным компонентам напряженности электрического поля основной моды не совпадают с поправками, приведенными в работе [17]. Основное отличие заключается в том, что поправки [17] не исчезают в фокальной плоскости излучения, т. е. согласно [17] мощность излучения в фокальной плоскости определяется полем не нулевого приближения, а полем с заранее заданной точностью. В качестве возможной причины расхождений указывается, что полученные в [17] поправки являются одним из частных решений параболического уравнения во втором приближении.

Полученные выражения для векторов поля предполагается использовать при анализе пондеромоторного ускорения релятивистских электронов, а также ускорения в режиме циклотронного авторезонанса [5].

Авторы благодарны рецензентам за ценные замечания.

1. Маркузе Д. *Оптические волноводы* (М.: Мир, 1974).
2. Lax M., Louisell W.H., McKnight W.B. *Phys. Rev. A*, **11**, 1365 (1975).
3. Cicchitelli L., Hora H., Postle R. *Phys. Rev. A*, **41**, 3727 (1990).
4. Нарожный Н.Б., Фофанов М.С. *ЖЭТФ*, **117**, 867 (2000).
5. Милантьев В.П., Шаар Я.Н. *ЖТФ*, **70**, 100 (2000).
6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. *Теория волн* (М.: Наука, 1990).
7. Кастильо А.Х., Милантьев В.П. *ЖТФ*, **84**, 1 (2014).
8. Hartemann F.V., Fochs S.N., LeSage G.P., et al. *Phys. Rev. E*, **51**, 4833 (1995).
9. Mourou G., Tajima T. *Opt. Photon. News*, **22**, 47 (2011); http://www.eli-laser.eu/
10. Бочкарев С.Г., Быченков В.Ю. *Квантовая электроника*, **37**, 273 (2007).
11. Popov K.I., Bychenkov V.Yu.., Rozmus W., Sydora R.D. *Phys. Plasmas*, **15**, 013108 (2008).
12. Воляр А.В., Шведов В.Г., Фадеева Т.А. *ЖТФ*, **71**, 134 (2001).
13. Quesnel B., Mora P. *Phys. Rev. E*, **58**, 3719 (1998).
14. Galkin A.L., Korobkin V.V., Romanovsky M.Yu., Shiryaev O.B. *Phys. Plasmas*, **15**, 023104 (2008).
15. Бельский А.М., Хапалюк А.П. *ЖПС*, **17**, 150 (1972).
16. Кузнецов Д.С. *Специальные функции* (М.: Высшая школа, 1965).
17. Salamin Y.I. *Appl. Phys. B*, **86**, 319 (2007).