

Определение толщины нанопленки с помощью резонансных частот

А.В.Латышев, А.А.Юшканов

Теоретически исследовано взаимодействие монохроматического лазерного излучения с тонкой металлической пленкой. Получены зависимости коэффициентов прохождения, отражения и поглощения электромагнитной волны от угла падения, толщины слоя и эффективной частоты столкновений электронов. В области резонансных частот проведен анализ этих коэффициентов. Полученные формулы для коэффициентов прохождения, отражения и поглощения справедливы для любых углов падения. Рассмотрен случай зеркальных граничных условий. Выведена формула для бесконтактного вычисления толщины пленки по наблюдаемым резонансным частотам.

Ключевые слова: нанопленки, резонансные частоты, коэффициенты прохождения, отражения и поглощения электромагнитной волны, толщина пленки.

1. Введение

Задача о взаимодействии электромагнитной волны с пространственно ограниченным веществом давно привлекает к себе внимание [1–9]. Это связано как с теоретическим интересом к этой проблеме, так и с многочисленными практическими приложениями (см. [8, 9]).

В работах [10, 11] была построена теория взаимодействия электромагнитного излучения со сферической частицей, а в [12, 13] эта теория обобщена на случай несферических частиц. В [14] показано, что электромагнитные свойства мелких частиц могут существенно отличаться от свойств частиц большого размера.

В работах [15, 16] рассмотрено взаимодействие Н- и Е-волн соответственно с тонкой металлической пленкой. Показано, что задача допускает аналитическое решение для пленок, толщина которых не превышает толщины скин-слоя. Проведен анализ коэффициентов прохождения, отражения и поглощения электромагнитной волны в зависимости от угла падения, толщины пленки, коэффициента зеркального отражения и частоты колебаний поля.

В работе [17] рассмотрены поверхностные плазмонные колебания в тонкой металлической пленке, в [18, 19] – взаимодействие электромагнитных Н- и Е-волн соответственно с металлической пленкой, находящейся между двумя диэлектрическими средами.

К настоящему времени имеется значительное число экспериментальных исследований различного рода вариантов электромагнитного излучения с веществом. Укажем на типичные работы [20, 21]. В [20] предложены два различных экспериментальных метода определения толщины и диэлектрических констант тонких пленок на сте-

клянной подложке. В работе [21] проведены эксперименты по определению оптических констант и оптической поглощательной способности для пленок различной толщины. Результаты этих экспериментов хорошо согласуются с теоретическим предсказанием.

Настоящая работа является продолжением нашей работы [15]. В ее развитие нами проведен анализ резонансов, которые наблюдаются у коэффициентов прохождения, отражения и поглощения при взаимодействии электромагнитного излучения с тонкой металлической пленкой. Эти резонансы чрезвычайно чувствительны к толщине пленки и достаточно узки. Для их экспериментального обнаружения необходимо использовать монохроматическое лазерное излучение УФ диапазона.

2. Постановка задачи

Рассмотрим тонкий слой проводящего материала, на который под углом θ падает электромагнитная волна. Будем полагать, что вектор магнитного поля электромагнитной волны параллелен поверхности слоя. Возьмем декартову систему координат с началом координат на одной из поверхностей слоя и с осью x , направленной в глубь слоя. Ось y направим параллельно вектору магнитного поля электромагнитной волны.

Векторы напряженностей электрического и магнитного полей имеют следующую структуру: $\mathbf{E} = \{E_x, 0, E_z\}$ и $\mathbf{H} = \{0, H_y, 0\}$. Компоненты этих векторов таковы:

$$E_x = E_x(x) \exp(-i\omega t + ik \sin \theta z),$$

$$E_z = E_z(x) \exp(-i\omega t + ik \sin \theta z),$$

$$H_y = H_y(x) \exp(-i\omega t + ik \sin \theta z).$$

Поведение электрического и магнитного полей волны внутри слоя описывается системой уравнений [3]

$$\frac{dE_x}{dx} - ikE_x \sin \theta + ikH_y = 0, \quad ikE_x - ikH_y \sin \theta = \frac{4\pi}{c} j_x,$$

А.В.Латышев, А.А.Юшканов. Московский государственный областной университет, Россия, 105005 Москва, ул. Радио, 10А; e-mail: avlatyshev@mail.ru

Поступила в редакцию 8 января 2014 г., после доработки – 10 ноября 2014 г.

$$\frac{dH_y}{dx} + ikE_z = \frac{4\pi}{c} j_z,$$

где c – скорость света; j – плотность тока; k – волновое число.

Коэффициенты прохождения, отражения и поглощения электромагнитной волны слоем описываются следующими выражениями [1, 22]:

$$T = \frac{1}{4} |P_1 - P_2|^2, \quad R = \frac{1}{4} |P_1 + P_2|^2, \quad A = I - T - R,$$

где

$$P_j = \frac{\cos \theta + Z_j}{\cos \theta - Z_j};$$

$j = 1, 2$.

Величина Z_1 соответствует импедансу на нижней поверхности слоя при симметричной по магнитному полю конфигурации внешнего поля. Это случай 1, для которого

$$H_y(0) = H_y(d), \quad E_x(0) = E_x(d), \quad E_z(0) = -E_z(d),$$

где d – толщина слоя. Величина Z_2 соответствует импедансу на нижней поверхности слоя при антисимметричной по магнитному полю конфигурации внешнего поля. Это случай 2, для которого

$$H_z(0) = -H_z(d), \quad E_x(0) = -E_x(d), \quad E_z(0) = E_z(d).$$

При этом импеданс

$$Z_j = \frac{E_z(-0)}{H_y(-0)}.$$

Рассмотрим случай, когда толщина слоя d меньше глубины скин-слоя δ . Отметим, что глубина скин-слоя существенно зависит от частоты излучения, монотонно уменьшаясь по мере роста последней. Наименьшее значение δ принимает в так называемом инфракрасном случае [23], и это $\delta_0 = c/\omega_p$, где ω_p – плазменная частота. Для типичных металлов [23] $\delta_0 \sim 100$ нм. Таким образом, для пленок с $d < \delta_0$ наше предположение справедливо в случае любых частот. Снизу толщина скин-слоя ограничена атомными размерами, т. е. толщина пленки должна быть существенно больше толщины моноатомного слоя, а следовательно, пленка должна состоять из достаточного числа атомных слоев. Из эксперимента [24] следует, что при толщине пленки меньше нескольких нанометров характер кинетических процессов в ней существенно меняется, в частности может нарушаться ее сплошность. В этом случае наша теория становится неприменимой. Таким образом, рассматриваемые в работе пленки имеют толщину от нескольких нанометров до ~ 100 нм.

3. Коэффициенты прохождения, отражения и поглощения

Предположим, что длина волны падающего излучения существенно превышает толщину слоя. Приведем выражения для коэффициентов прохождения (T) и отражения (R) [16]:

$$T = \cos^2 \theta \left| \frac{1 - ik(d/2)G \sin^2 \theta (2\pi d \sigma_d / c)}{[\cos \theta + ik(d/2)G \sin^2 \theta][1 + (2\pi d \sigma_d / c) \cos \theta]} \right|^2, \quad (1)$$

$$R = \left| \frac{ik(d/2)G \sin^2 \theta - (2\pi d \sigma_d / c) \cos^2 \theta}{[\cos \theta + ik(d/2)G \sin^2 \theta][1 + (2\pi d \sigma_d / c) \cos \theta]} \right|^2. \quad (2)$$

Для случая $kl \ll 1$ (l – длина свободного пробега электронов) величину G можно вычислить из задачи о поведении слоя плазмы в переменном электрическом поле, перпендикулярном поверхности слоя [25, 26]:

$$G = \frac{1}{2} \int_0^d e(x) dx,$$

где $e(x)$ – электрическое поле. При почти касательном падении, когда $\theta \rightarrow \pi/2$, получаем $T \rightarrow 0$, $R \rightarrow 1$, $A \rightarrow 0$.

Пусть выполняется соотношение $kl \ll 1$. Тогда для произвольных частот $l = v_F \tau / (1 - i\omega\tau)$, где τ – время свободного пробега электронов; v_F – скорость Ферми; $\sigma_d = \sigma_0 / (1 - i\omega\tau)$; $\sigma_0 = \omega_p^2 \tau / (4\pi)$ – статическая проводимость объемного образца. Плазменная частота ω_p калия, золота, алюминия и серебра составляет соответственно 6.5×10^{15} , 1.37×10^{16} , 3.82×10^{15} и 0.96×10^{15} с $^{-1}$.

4. Электрическое поле

При разложении решения исходной граничной задачи в [26] было построено безразмерное электрическое поле в слое металла:

$$e(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_\infty} + \frac{2\lambda_1 \eta_0 \cosh[z_0(2x-d)/\eta_0]}{(ac - \eta_0^2) \lambda'(\eta_0) \cosh(z_0/\eta_0)} + \frac{\lambda_1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\eta^2 \cosh[z_0(2x-d)/\eta]}{\lambda^+(\eta) \lambda^-(\eta) \cosh(z_0/\eta)} d\eta, \quad (3)$$

где

$$\lambda(z) = c^2 + \frac{z^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{\eta^2 - \tau^2}{\tau^2 - z^2} d\tau$$

– дисперсионная функция; η_0 – ее нуль; $\eta_1^2 = ac$; $a = dv/(2v_F \kappa)$; $\kappa^2 = 9a_0^2/r_D^2$; $r_D^2 = 3v_F^2/\omega_p^2$; $c = z_0/\kappa$; $z_0 = d(v - i\omega)/2v_F$; r_D – радиус Дебая; $v = 1/\tau$ – частота столкновений электронов. Безразмерное электрическое поле $e(x)$ связано с размерным полем $E(x)$ соотношением $e(x) = E(x)/E_0$ (E_0 – величина поля на границе $x = 0$). Тогда величина G имеет следующий вид (см. также [26]):

$$G = \frac{\lambda_1}{\lambda_\infty} + \frac{2\lambda_1 \eta_0^2 \tanh(z_0/\eta_0)}{z_0(ac - \eta_0^2) \lambda'(\eta_0)} + \frac{\lambda_1}{2z_0} \int_{-1}^1 \frac{\tanh(z_0/\eta) \eta^3}{\lambda^+(\eta) \lambda^-(\eta)} d\eta. \quad (4)$$

Здесь $\lambda_1 = \lambda(\eta_1) = c^2 - ac$; $\lambda^\pm(\eta) = \lambda(\eta) \pm i(\pi/2)\eta(\eta_1^2 - \eta^2)$.

Величина G хорошо аппроксимируется первыми двумя членами разложения (4):

$$G \approx G_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_\infty} + \frac{2\lambda_1 \eta_0^2 \tanh(z_0/\eta_0)}{z_0(ac - \eta_0^2) \lambda'(\eta_0)}, \quad (5)$$

т. е. мы заменили электрическое поле двумя первыми слагаемыми Друде и Дебая, отвечающими дискретному спектру.

Для вычисления G_2 требуется явное выражение для нуля дисперсионной функции $\eta_0 = \eta_0(\Omega, \varepsilon)$, где $\Omega = \omega/\omega_p$.

Приведем без доказательства формулу факторизации (см. [26]) дисперсионной функции

$$\lambda(z) = \lambda_\infty(\eta_0^2 - z^2)X(z)X(-z). \tag{6}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda_\infty &= \lambda(\infty) = \frac{1}{3} + ac - c^2 = \frac{1}{3}(1 - \Omega^2 - i\varepsilon\Omega); \\ X(z) &= \frac{1}{z} \exp V(z); \quad V(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\ln G(\tau) - 2\pi i}{\tau - z} d\tau; \\ G(\tau) &= \frac{\lambda^+(\tau)}{\lambda^-(\tau)}; \quad \lambda^\pm(\tau) = c^2 - ac - (\tau^2 - ac)\lambda_0^\pm(\tau); \\ \lambda_0^\pm(\tau) &= \lambda_0(\tau) \pm \frac{\pi}{2} \tau i; \\ \lambda_0(\tau) &= 1 + \frac{\tau}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\tau'}{\tau' - \tau} = 1 + \frac{\tau}{2} \ln \frac{1 - \tau}{1 + \tau}. \end{aligned}$$

Если вычислить значения левой и правой частей уравнения (6) в точке $z = i$, то для квадрата нуля дисперсионной функции после некоторых преобразований получим следующее выражение:

$$\eta_0^2 = -1 + \frac{\lambda(i)}{\lambda_\infty X(i)X(-i)} = -1 + \frac{\lambda(i)}{\lambda_\infty} \exp[-V(i) - V(-i)].$$

Учитывая, что $\lambda_0(i) = 1 - \pi/4$, имеем

$$\begin{aligned} \lambda(i) &= c^2 - ac + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)(1 + ac) \\ &= -\frac{1}{3}(\Omega^2 + i\varepsilon\Omega) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + \frac{1}{3}(\varepsilon^2 - i\varepsilon\Omega)\right]. \end{aligned}$$

Функцию $X(z) = (1/z) \exp V(z)$ можно представить в виде

$$X(z) = \frac{1}{z - i} \exp V_0(z),$$

где

$$V_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Найдем сумму

$$\begin{aligned} V_0(i) + V_0(-i) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau - i} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau + i} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau - i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\tau \ln G(\tau) d\tau}{\tau^2 + 1}. \end{aligned}$$

С учетом этих формул мы преобразуем формулу для квадрата нуля дисперсионной функции к виду

$$\eta_0^2 = -1 + \frac{2\lambda(i)}{\lambda_\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\tau \ln G(\tau) d\tau}{\tau^2 + 1}\right]$$

или

$$\eta_0^2 = -1 + \frac{2\lambda(i)}{\lambda_\infty} \exp\left[\frac{i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tau \ln G(\tau) d\tau}{\tau^2 + 1}\right],$$

где

$$G_I(\tau) = \ln \frac{(3\tau^2 - \varepsilon^2 + i\varepsilon\Omega)(\lambda_0(\tau) + (\pi/2)\tau i) + \Omega^2 + i\varepsilon\Omega}{(3\tau^2 - \varepsilon^2 + i\varepsilon\Omega)(\lambda_0(\tau) - (\pi/2)\tau i) + \Omega^2 + i\varepsilon\Omega}.$$

Теперь относительная погрешность

$$O_2(\Omega, \varepsilon, d) = \left| \frac{G - G_2}{G} \right| \times 100\%$$

для пленок из калия толщиной 5 и 10 нм при $\omega = \omega_p$ и $\nu = 10^{-3}\omega_p$ соответственно равна 0.003% и 0.0004%.

Численные расчеты показывают, что в области $\omega > \omega_p$ вклад в электрическое поле, отвечающий непрерывному спектру, незначителен, и им можно пренебречь. Таким образом, функция G аппроксимируется двумя слагаемыми Друде и Дебая, отвечающими согласно (5) дискретному спектру.

5. Поведение коэффициентов и обсуждение результатов

Используя (1) и (2) и выражение (5) для функции G , проведем графическое исследование коэффициентов прохождения и поглощения.

Рассмотрим случай тонкой пленки из калия. Построим зависимости коэффициента прохождения от величины $\Omega = \omega/\omega_p$ при угле падения $\theta = 75^\circ$ (рис. 1). Именно это значение угла использовано в работах [1, 2].

Отметим, что вблизи плазменного резонанса ($\omega \sim \omega_p$) коэффициент прохождения имеет минимум, а коэффициенты отражения и поглощения – максимум. При толщине пленки 1.5 нм и $\nu = 0.05\omega_p$ в области сверхрезонансных частот ($\omega > \omega_p$) все коэффициенты имеют еще один максимум. С увеличением толщины пленки с 1.5 до 10 нм второй максимум пропадает.

Для пленки толщиной 5 нм и при $\nu = 0.02\omega_p$ в области сверхрезонансных частот поведение всех коэффициентов носит так называемый гребенчатый характер («частотокол»). При дальнейшем увеличении толщины пленки частота гребенки увеличивается, и мы можем видеть рост амплитуды ее зубьев. Если для пленки толщиной 5 нм величина $\varepsilon = \nu/\omega_p$ уменьшается, то амплитуда зубьев гребенки резко растет.

При дальнейшем увеличении толщины пленки увеличивается частота зубьев гребенки (число звеньев часто-

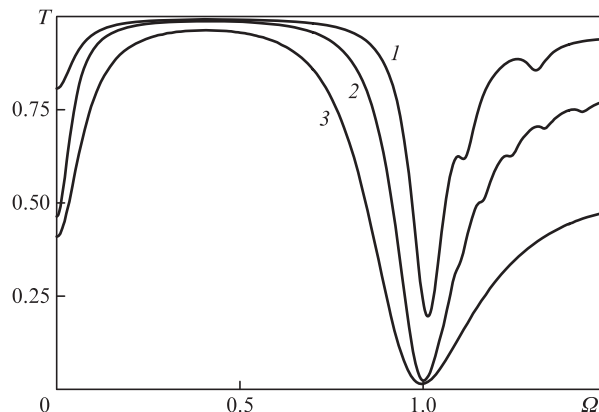


Рис.1. Зависимости коэффициента прохождения T от Ω в случае $d = 2$ нм, $\nu = 0.05\omega_p$ (1), $d = 5$ нм, $\nu = 0.03\omega_p$ (2) и $d = 10$ нм, $\nu = 0.05\omega_p$ (3) при $\theta = 75^\circ$.

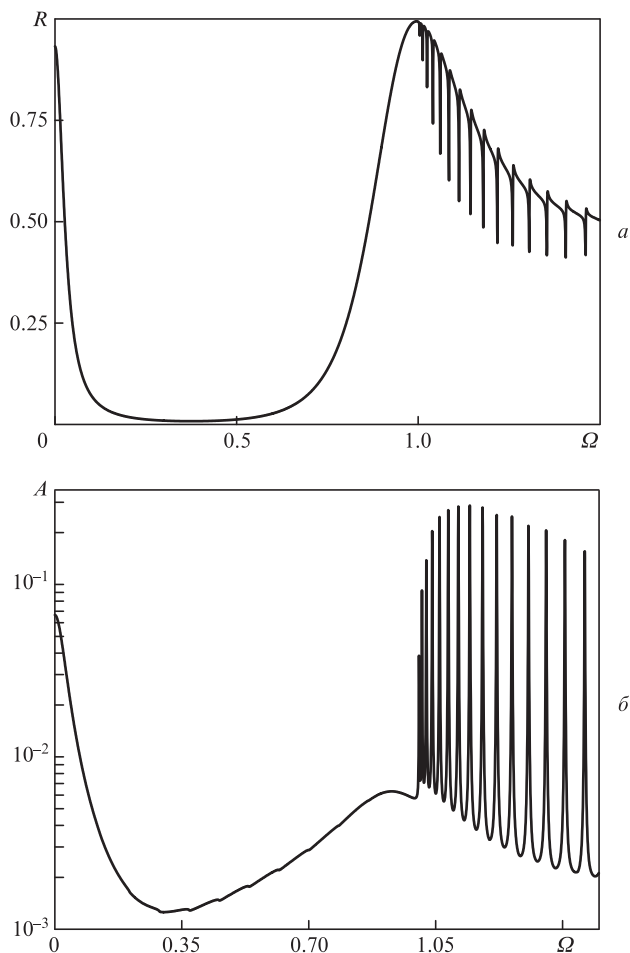


Рис.2. Зависимости коэффициентов отражения R (а) и поглощения A (б) от Ω при $d = 10$ нм, $\nu = 0.001\omega_p$ и $\theta = 75^\circ$.

кола). На рис.2 показано поведение коэффициентов отражения и поглощения в зависимости от величины Ω в случае $d = 10$ нм, $\nu = 0.001\omega_p$ и $\theta = 75^\circ$. Отметим, что рис.2,а фактически совпадает с рис.2 из [1], а рис.2,б – с рис.3 из этой же работы.

На рис.3 приведены зависимости коэффициентов прохождения, отражения и поглощения от толщины пленки d при $\nu = 0.001\omega_p$ и $\theta = 75^\circ$. В рассматриваемом диапазоне

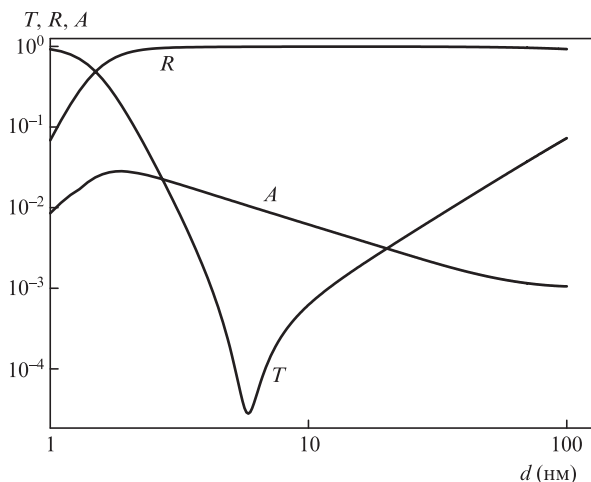


Рис.3. Зависимости коэффициентов прохождения, отражения и поглощения от толщины пленки d при $\omega = \omega_p$, $\nu = 0.001\omega_p$ и $\theta = 75^\circ$.

толщин коэффициент прохождения имеет один минимум, а коэффициент поглощения – один максимум.

Перейдем к выводу формулы для вычисления толщины пленки по тем точкам Ω_n , в которых коэффициенты прохождения, отражения и поглощения имеют экстремумы. Рассмотрим коэффициент отражения.

На рис.4 приведены зависимости коэффициента отражения от Ω для пленок из калия, золота и серебра толщиной 10 нм в случае $\nu = 0.001\omega_p$. При этом на рис.4,а рассмотрены первые звенья гребенки, изображенной ранее на рис.2,а.

На этих рисунках точечная кривая, отвечающая дискретному и непрерывному спектрам, совпадает со сплошной, отвечающей только дискретному спектру, что согласуется с приведенными выше оценками. При построении точечной кривой использована формула (4), а при построении сплошной кривой – формула (5).

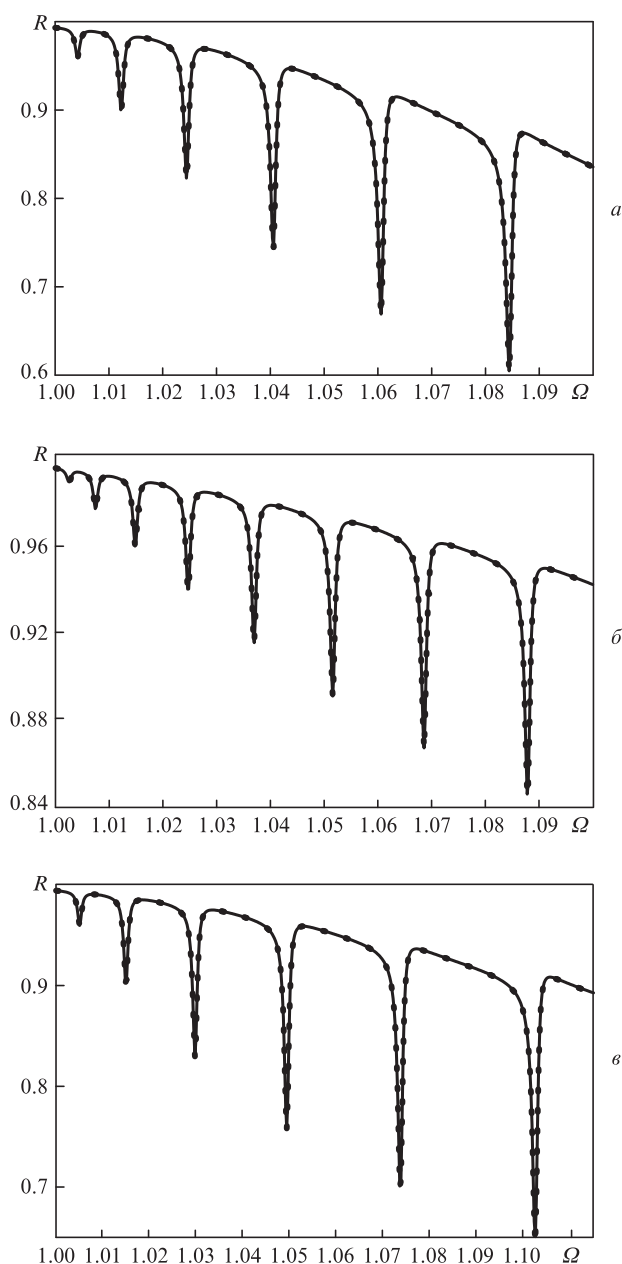


Рис.4. Зависимости коэффициента отражения R от Ω для пленки из калия (а), золота (б) и серебра (в) при $d = 10$ нм, $\nu = 0.001\omega_p$ и $\theta = 75^\circ$.

Анализ показывает, что коэффициенты прохождения, отражения и поглощения имеют экстремумы в одних и тех же точках Ω_n , независимо от величины угла падения электромагнитной волны. Эти соображения позволяют найти толщину пленки по тем точкам $\Omega_n = \omega_n/\omega_p$, в которых коэффициенты T , R и A имеют экстремум.

Во второе слагаемое (мода Дебая) формул (4) и (5) входит функция $\text{th}(z_0/\eta_0) = -i \sin(iz_0/\eta_0)/\cos i(z_0/\eta_0)$, ответственная за квазипериодический гребенчатый характер зависимостей. Точки Ω_n , в которых коэффициент отражения имеет минимум, в точности совпадают с точками, в которых функция $\cos \text{Re}(iz_0/\eta_0)$ обращается в нуль. Из уравнения $\cos \text{Re}(iz_0/\eta_0) = 0$ находим

$$\text{Re}\left(i \frac{z_0(\Omega_n, \varepsilon, d)}{\eta_0(\Omega_n, \varepsilon)}\right) + \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

или, в явном виде,

$$\text{Re}\left(i \frac{\omega_p 10^{-7}(\varepsilon - i\Omega_n)}{2v_F \eta_0(\Omega_n, \varepsilon)} d\right) = \frac{\pi}{2} + \pi n, \tag{7}$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$

В (7) величина d измеряется в нанометрах. Из этой формулы следует, что коэффициент отражения имеет локальные минимумы при

$$d_n = \frac{10^7 \pi v_F (1 + 2n)}{\omega_p \text{Re}[(\Omega_n + i\varepsilon)/\eta_0(\Omega_n, \varepsilon)]}. \tag{8}$$

В табл.1 приведены первые шесть резонансных частот, в которых коэффициент отражения имеет локальные минимумы. Взяты пленки из различных материалов

Табл.1. Результаты измерений толщины пленки.

Материал пленки	Номер экстремума	Частота (с ⁻¹)	Толщина пленки (нм)	Относительная погрешность (%)
Калий	1	1.0046	9.959	-0.4
	2	1.0127	9.997	-0.03
	3	1.0250	9.968	-0.3
	4	1.0406	10.046	0.04
	5	1.0608	10.017	0.17
	6	1.0847	10.008	0.08
Золото	1	1.0028	9.928	-0.7
	2	1.0077	10.009	-0.09
	3	1.0149	10.073	-0.73
	4	1.0249	10.012	0.12
	5	1.0370	10.003	0.03
	6	1.0518	10.006	0.06
Серебро	1	1.0056	9.975	-0.3
	2	1.0152	10.093	0.9
	3	1.0298	10.082	0.8
	4	1.0490	10.094	0.9
	5	1.0730	10.032	0.3
	6	1.1029	10.012	0.1

толщиной ~ 10 нм. Данные, приведенные в табл.1, позволяют заключить, что погрешность в определении толщины пленки по наблюдаемым частотам не превышает 1%.

6. Заключение

Таким образом, в настоящей работе рассмотрены пленки, толщины которых составляют единицы-десятки нанометров и не превышают толщины скин-слоя. Получены формулы для вычисления коэффициентов прохождения, отражения и поглощения таких пленок и проведен анализ этих коэффициентов. Отмечено существование резонансных частот, связанных с резонансами в продольных плазмонных колебаниях. Выявлена большая чувствительность этих частот к толщине пленки, что в принципе позволяет по значению этих частот определять ее толщину. Выведена формула для нахождения толщины пленки по положению резонансных частот.

1. Jones W.E., Kliewer K.L., Fuchs R. *Phys. Rev.*, **178** (3), 1201 (1969).
2. Kliewer K.L., Fuchs R. *Phys. Rev.*, **185** (3), 813 (1969).
3. Кондратенко А.Н. *Проникновение волн в плазму* (М.: Атомиздат, 1979).
4. Паредес-Хуарес А., Диас-Монхе С., Макаров М.Н., Перес-Родригес Ф. *Письма в ЖЭТФ*, **90** (9), 687 (2009).
5. Кононенко В.В., Заведеев Е.В., Латушко М.И., Пашинин В.П., Конов В.И., Дианов Е.М. *Квантовая электроника*, **42** (10), 925 (2005).
6. Sondheimer E.H. *Adv. Phys.*, **50** (6), 499 (2001).
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1992).
8. Антонец И.В., Котов Л.Н., Некипелов С.В., Карпушов Е.Н. *ЖТФ*, **74** (11), 102 (2004).
9. Antonets I.V., Kotov L.N., Shavrov V.G., Shcheglov V.I. *J. Commun. Technol. Electron.*, **52** (12), 1394 (2006).
10. Лесскис А.Г., Пастернак В.Е., Юшканов А.А. *ЖЭТФ*, **83**, 310 (1982).
11. Лесскис А.Г., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. *Поверхность*, №11, 115 (1987).
12. Томчук П.М., Томчук Б.П. *ЖЭТФ*, **112** (2), 661 (1997).
13. Завитаев Э.В., Юшканов А.А. *Квантовая электроника*, **35** (6), 547 (2005).
14. Петров Ю.И. *Физика малых частиц* (М.: Наука, 1984, гл. 7).
15. Латышев А.В., Юшканов А.А. *Микроэлектроника*, **41** (1), 30 (2012).
16. Латышев А.В., Юшканов А.А. *Оптика и спектроскопия*, **110** (5), 796 (2011).
17. Латышев А.В., Юшканов А.А. *Оптика и спектроскопия*, **112** (1), 140 (2012).
18. Латышев А.В., Юшканов А.А. *Оптический журн.*, **79** (6), 3 (2012).
19. Латышев А.В., Юшканов А.А. *Оптика и спектроскопия*, **114** (2), 124 (2013).
20. Rokrowsky P. *Appl. Opt.*, **30** (22), 3228 (1991).
21. Xu J., Tang J. *Appl. Opt.*, **28** (14), 2925 (1989).
22. Fuchs R., Kliewer K.L., Pardee W.J. *Phys. Rev.*, **150** (2), 589 (1966).
23. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Физическая кинетика* (М.: Физматлит, 2001).
24. Brandt T., Hovel M., Gompf B., Dressel M. *Phys. Rev. B*, **78**, 205409 (2008).
25. Латышев А.В., Лесскис А.Г., Юшканов А.А. *ТМФ*, **92** (1), 127 (1992).
26. Латышев А.В., Юшканов А.А. *ЖТФ*, **78** (5), 29 (2008).