НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

PACS 42.65.–k; 42.65.Tg; 42.25.Ja; 05.45.–a; 03.65.Ge

Взаимодействие перекрестно-вырожденных эллиптически поляризованных кноидальных волн в изотропной гиротропной среде с пространственной дисперсией кубической нелинейности

В.А.Макаров, В.М.Петникова, В.В.Шувалов

Найдены три необычных класса частных аналитических решений системы четырех нелинейных уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд циркулярно поляризованных компонент электрического поля, описывающей самовоздействие и взаимодействие двух плоских эллиптически поляризованных волн в процессе коллинеарного распространения в изотропной среде с частотной дисперсией второго порядка и пространственной дисперсией кубической нелинейности. Эти решения представляют собой согласованные комбинации из двух эллиптически поляризованных кноидальных волн, взаимно ортогональные поляризационные компоненты которых меняются в процессе распространения по попарно одинаковым законам. При этом амплитуды компонент с одинаковой циркулярной поляризацией пропорциональны двум разным эллиптическим функциям Якоби с одинаковыми периодами.

Ключевые слова: *кубическая нелинейность, пространственная и частотная дисперсия, эллиптически поляризованная кноидальная волна, перекрестное вырождение.*

1. Введение

К исследованиям особенностей многосолитонных комплексов, формирующихся в результате взаимодействия устойчивых одиночных солитоноподобных нелинейных волн, т.е. самосогласованных решений нелинейных задач самого разного типа (солитонов, бризеров и кноидальных волн [1–4]), в последние годы проявляется значительный интерес [2–6]. Он связан с перспективностью использования таких комплексов для задач быстрой передачи оптической информации и интересом к ним как к структурам электромагнитного поля, формирующимся за счет процессов самоорганизации в нелинейных системах с большим числом степеней свободы. Решаемые задачи распространения при этом всегда являются многопараметрическими и в большинстве случаев описываются неинтегрируемыми системами нелинейных дифференциальных уравнений [7–10]. Примером таких задач является взаимодействие двух взаимно ортогональных циркулярно поляризованных компонент электромагнитной волны, распространяющейся через нелинейную среду с частотной дисперсией и пространственной дисперсией кубической нелинейности [11–19]. Особенности их возможного взаимодействия ранее анализировались на основе найденных точных частных [11–13] и приближенных решений [14–19], полученных путем реализации различных подходов (теория возмущений [14,15], адиабатическое приближение [16–19]).

В настоящей работе приводятся впервые найденные необычные частные аналитические решения системы четырех нелинейных уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд циркулярно поляризованных компонент электрического поля, описывающей самовоздействие и взаимодействие двух плоских эллиптически поляризованных волн в процессе коллинеарного распространения в изотропной среде с частотной дисперсией второго порядка и пространственной дисперсией кубической нелинейности. Эти удивительные решения представляют собой самосогласованные комбинации двух кноидальных волн, для которых зависящие от времени модули медленно меняющихся амплитуд циркулярно поляризованных компонент двух различных эллиптически поляризованных плоских волн $A_\pm$ и $B_\pm$ меняются в процессе распространения по попарно одинаковым законам ($|A_\pm|$ соответственно пропорционален $|B_\mp|$), задаваемым разными эллиптическим функциям Якоби [20]. Решения такого перекрестно-вырожденного типа не являются какой-то экзотикой, а образуют три класса аналитических решений, существующих в достаточно обширной области значений материальных параметров нелинейной среды.

В.А.Макаров, В.М.Петникова, В.В.Шувалов. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы, 1; e-mail: vamakarov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 8 мая 2015 г., после доработки – 16 июля 2015 г.

2. Исходная система уравнений и использованные приближения

Система уравнений, описывающая эволюцию медленно меняющихся комплексных амплитуд $A_\pm(z,\tau)$ и $B_\pm(z,\tau)$ циркулярно поляризованных ортогональных компонент (индексы $\pm$) двух эллиптически поляризованных волн, имеющих одну и ту же несущую частоту ω и распространяющихся практически коллинеарно оси z в изотропной гиротропной среде с пространственной дисперсией кубической нелинейности и дисперсией групповых скоростей второго порядка, может быть легко получена как обобщение (дополнительный учет частотной дисперсии в случае распространения волн в одном направлении) системы уравнений, приведенной в [21,22]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \mathrm{i}\frac{k_2}{2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)A_\pm = \mathrm{i}\Big[\pm\rho_0 - \Big(\frac{\sigma_1}{2} \mp \rho_1\Big)(|A_\pm|^2 + 2\,|B_\pm|^2) -$$

$$-\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)(|A_\mp|^2+|B_\mp|^2)\Big]A_\pm - \mathrm{i}\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)A_\mp B_\mp^* B_\pm, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\mathrm{i}\frac{k_2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)B_\pm = \mathrm{i}\Big[\pm\rho_0-\left(\frac{\sigma_1}{2}\mp\rho_1\right)(|B_\pm|^2+2|A_\pm|^2)$$

$$-\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)(|B_\mp|^2+|A_\mp|^2)\Big]B_\pm - \mathrm{i}\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)B_\mp A_\mp^* A_\pm. \quad (2)$$

В правой части системы присутствуют члены, описывающие как само-, так и кросс-модуляцию всех компонент, а также их параметрическое четырехволновое взаимодействие. Здесь τ – время в бегущей системе координат; $k_2 = \partial^2 k/\partial\omega^2 = \mathrm{const}$ характеризует частотную дисперсию; k – волновое число. Значения параметров $\sigma_1 = 4\pi\omega^2\chi^{(3)}_{xyxy}\times(kc^2)^{-1}$ и $\sigma_2 = 2\pi\omega^2\chi^{(3)}_{xxyy}/(kc^2)$ заданы двумя независимыми компонентами тензора локальной кубической нелинейности $\chi^{(3)}(\omega\colon -\omega,\omega,\omega)$, а $\rho_{0,1} = 2\pi\omega^2\gamma_{0,1}/c^2$ – псевдоскалярными константами $\gamma_{0,1}$ линейной и нелинейной гирации. Легко убедиться в полной симметрии системы (1), (2): уравнения для «+» и «–» компонент поля переходят друг в друга при одновременной перестановке $\rho_{0,1}\leftrightarrow-\rho_{0,1}$ и $+\leftrightarrow-$, а уравнения для волн $A_\pm$ и $B_\pm$ переходят друг в друга при перестановке $A_\pm\leftrightarrow B_\pm$.

Будем искать частные решения системы (1), (2) в следующем виде:

$$A_\pm(z,\tau) = \rho_{a\pm}(\tau)\exp[\mathrm{i}\varphi_{a\pm}+\mathrm{i}(k_\pm^{(a)}\pm\rho_0)z], \quad (3)$$

$$B_\pm(z,\tau) = \rho_{b\pm}(\tau)\exp[\mathrm{i}\varphi_{b\pm}+\mathrm{i}(k_\pm^{(b)}\pm\rho_0)z]. \quad (4)$$

Здесь обеспечивающие разделение переменных константы $k_\pm^{(a,b)}$ и постоянные фазы $\varphi_{a\pm}$ и $\varphi_{b\pm}$ соответственно удовлетворяют условиям $k_\pm^{(a)}-k_\mp^{(a)} = k_\pm^{(b)}-k_\mp^{(b)}$, $\varphi_{a+}-\varphi_{a-}-\varphi_{b+}+\varphi_{b-} = l\pi$ $(l = 0,\pm1,\pm2,\ldots,)$, возникающим из-за параметрического взаимодействия циркулярно поляризованных компонент поля в системе (1), (2). Подставляя (3), (4) в (1), (2), получаем следующую систему дифференциальных уравнений второго порядка для $\rho_{a\pm}(\tau)$ и $\rho_{b\pm}(\tau)$:

$$\ddot\rho_{a+}(\tau)-\frac{2}{k_2}\Big\{k_+^{(a)}\rho_{a+}(\tau)+\left(\frac{\sigma_1}{2}-\rho_1\right)\rho_{a+}(\tau)$$

$$\times[\rho_{a+}^2(\tau)+2\rho_{b+}^2(\tau)]+\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)\rho_{a+}(\tau)$$

$$\times[\rho_{a-}^2(\tau)+\rho_{b-}^2(\tau)]\pm\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)\rho_{a-}(\tau)\rho_{b+}(\tau)\rho_{b-}(\tau)\Big\} = 0, \quad (5)$$

$$\ddot\rho_{a-}(\tau)-\frac{2}{k_2}\Big\{k_-^{(a)}\rho_{a-}(\tau)+\left(\frac{\sigma_1}{2}+\rho_1\right)\rho_{a-}(\tau)$$

$$\times[\rho_{a-}^2(\tau)+2\rho_{b-}^2(\tau)]+\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)\rho_{a-}(\tau)$$

$$\times[\rho_{a+}^2(\tau)+\rho_{b+}^2(\tau)]\pm\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)\rho_{a+}(\tau)\rho_{b+}(\tau)\rho_{b-}(\tau)\Big\} = 0, \quad (6)$$

$$\ddot\rho_{b+}(\tau)-\frac{2}{k_2}\Big\{k_+^{(b)}\rho_{b+}(\tau)+\left(\frac{\sigma_1}{2}-\rho_1\right)\rho_{b+}(\tau)$$

$$\times[2\rho_{a+}^2(\tau)+\rho_{b+}^2(\tau)]+\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)\rho_{b+}(\tau)$$

$$\times[\rho_{a-}^2(\tau)+\rho_{b-}^2(\tau)]\pm\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)\rho_{a+}(\tau)\rho_{a-}(\tau)\rho_{b-}(\tau)\Big\} = 0, \quad (7)$$

$$\ddot\rho_{b-}(\tau)-\frac{2}{k_2}\Big\{k_-^{(b)}\rho_{b-}(\tau)+\left(\frac{\sigma_1}{2}+\rho_1\right)\rho_{b-}(\tau)$$

$$\times[2\rho_{a-}^2(\tau)+2\rho_{b-}^2(\tau)]+\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)\rho_{b-}(\tau)$$

$$\times[\rho_{a+}^2(\tau)+\rho_{b+}^2(\tau)]\pm\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)\rho_{a+}(\tau)\rho_{a-}(\tau)\rho_{b+}(\tau)\Big\} = 0. \quad (8)$$

Знаки «+» и «–» в ней соответствуют четным и нечетным l. Подчеркнем, что система (5)–(8) с точностью до перечисленных выше упрощений полностью эквивалентна (1), (2).

3. Перекрестно-вырожденные решения

Рассмотрим случай перекрестного вырождения, при котором $\rho_{a+}(\tau) = \alpha\rho_{b-}(\tau)$ и $\rho_{b+}(\tau) = \beta\rho_{a-}(\tau)$. Подставляя последние соотношения в (5)–(8), получаем, что константы α, β и функции $\rho_{a-}(\tau)$ и $\rho_{b-}(\tau)$ в этом случае должны удовлетворять системе уравнений

$$\alpha\ddot\rho_{b-}(\tau)-\frac{2}{k_2}\Big\{k_+^{(a)}\alpha+\left(\frac{\sigma_1}{2}-\rho_1\right)$$

$$\times\alpha[\alpha^2\rho_{b-}^2(\tau)+2\beta^2\rho_{a-}^2(\tau)]+\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)$$

$$\times\alpha[\rho_{a-}^2(\tau)+\rho_{b-}^2(\tau)]\pm\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)\beta\rho_{a-}^2(\tau)\Big\}\rho_{b-}(\tau) = 0, \quad (9)$$

$$\ddot\rho_{a-}(\tau)-\frac{2}{k_2}\Big\{k_-^{(a)}+\left(\frac{\sigma_1}{2}+\rho_1\right)$$

$$\times[\rho_{a-}^2(\tau)+2\rho_{b-}^2(\tau)]+\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)$$

$$\times[\alpha^2\rho_{b-}^2(\tau)+\beta^2\rho_{a-}^2(\tau)]\pm\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)\alpha\beta\rho_{b-}^2(\tau)\Big\}\rho_{a-}(\tau) = 0, \quad (10)$$

$$\beta\ddot\rho_{a-}(\tau)-\frac{2}{k_2}\Big\{k_+^{(b)}\beta+\left(\frac{\sigma_1}{2}-\rho_1\right)$$

$$\times\beta[2\alpha^2\rho_{b-}^2(\tau)+\beta^2\rho_{a-}^2(\tau)]+\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)$$

$$\times\beta[\rho_{a-}^2(\tau)+\rho_{b-}^2(\tau)]\pm\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)\alpha\rho_{b-}^2(\tau)\Big\}\rho_{a-}(\tau) = 0, \quad (11)$$

$$\ddot\rho_{b-}(\tau)-\frac{2}{k_2}\Big\{k_-^{(b)}+\left(\frac{\sigma_1}{2}+\rho_1\right)$$

$$\times[2\rho_{a-}^2(\tau)+\rho_{b-}^2(\tau)]+\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)$$

$$\times[\alpha^2\rho_{b-}^2(\tau)+\beta^2\rho_{a-}^2(\tau)]\pm\left(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\right)\alpha\beta\rho_{a-}^2(\tau)\Big\}\rho_{b-}(\tau) = 0. \quad (12)$$

Будем искать ее решения в следующем виде:

$$\rho_{a+}(\tau) = \alpha G\,\mathrm{cn}(\gamma\tau,\mu),\quad \rho_{a-}(\tau) = F\,\mathrm{dn}(\gamma\tau,\mu),$$
$$\rho_{b+}(\tau) = \beta F\,\mathrm{dn}(\gamma\tau,\mu),\quad \rho_{b-}(\tau) = G\,\mathrm{cn}(\gamma\tau,\mu), \quad (13)$$

где γ – масштабный коэффициент; μ – модуль эллиптических функций Якоби [20]. Подстановка (13) в уравнения (9)–(12) превращает последние в полиномы относительно одной из функций Якоби (в нашем случае $\mathrm{sn}(\gamma\tau,\mu)$). Приравненные нулю коэффициенты этих полиномов совместно с условием $k_\pm^{(a)}-k_\mp^{(a)} = k_\pm^{(b)}-k_\mp^{(b)}$ образуют систему из девяти алгебраических уравнений для $\gamma,\mu,F,\alpha,\beta,G$, $k_\pm^{(a)}$, $k_\pm^{(b)}$. Ее нетривиальные решения определяют связи, ограничивающие допустимые значения введенных констант, при которых действительно существуют перекрестно-вырожденные решения (13). Из пяти уравнений этой системы удобно выразить $k_{\pm}^{(a)}$, $k_{\pm}^{(b)}$ и γ через μ, F, α, β, G и материальные параметры среды:

$$k_{+}^{(a)} = -\frac{1}{2\mu^2}\Big\{\Big(\frac{\sigma_1}{2}-\rho_1\Big)[2\beta^2F^2\mu^2+\alpha^2G^2(2\mu^2-1)] + \Big(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\Big)\Big[\Big(1\pm\frac{\beta}{\alpha}\Big)F^2\mu^2+G^2(2\mu^2-1)\Big]\Big\}, \tag{14}$$

$$k_{-}^{(a)} = \frac{1}{2}\Big\{\Big(\frac{\sigma_1}{2}+\rho_1\Big)[2F^2(\mu^2-1)-3G^2]+\Big(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\Big) \times\Big[\beta^2\Big(1\pm\frac{\alpha}{\beta}\Big)F^2\mu^2-2\beta^2F^2-\alpha^2\Big(1\pm2\frac{\beta}{\alpha}\Big)G^2\Big]\Big\}, \tag{15}$$

$$k_{+}^{(b)} = \frac{1}{2}\Big\{\Big(\frac{\sigma_1}{2}-\rho_1\Big)[2\beta^2F^2(\mu^2-1)-3\alpha^2G^2]+\Big(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\Big) \times\Big[\Big(1\pm\frac{\beta}{\alpha}\Big)F^2\mu^2-2F^2-\Big(1\pm2\frac{\alpha}{\beta}\Big)G^2\Big]\Big\}, \tag{16}$$

$$k_{-}^{(b)} = -\frac{1}{2\mu^2}\Big\{\Big(\frac{\sigma_1}{2}+\rho_1\Big)[2F^2\mu^2+G^2(2\mu^2-1)] + \Big(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\Big)\Big[\beta^2\Big(1\pm\frac{\alpha}{\beta}\Big)F^2\mu^2+\alpha^2G^2(2\mu^2-1)\Big]\Big\}, \tag{17}$$

$$\gamma^2 = -\frac{1}{\mu^2k_2}\Big\{\Big(\frac{\sigma_1}{2}+\rho_1\Big)(2F^2\mu^2+G^2) + \Big(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\Big)[(\beta^2\pm\alpha\beta)F^2\mu^2+\alpha^2G^2]\Big\}. \tag{18}$$

Оставшиеся четыре алгебраических уравнения системы,

$$\Big[\Big(\frac{\sigma_1}{2}+\rho_1\Big)\pm\Big(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\Big)\alpha\beta\Big](F^2\mu^2-G^2)=0, \tag{19}$$

$$\Big[\Big(\frac{\sigma_1}{2}-\rho_1\Big)\alpha\beta\pm\Big(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\Big)\Big](\beta^2F^2\mu^2-\alpha^2G^2)=0, \tag{20}$$

$$\Big(\frac{\sigma_1}{2}-\rho_1\Big)(2\beta^2F^2\mu^2+\alpha^2G^2)-\Big(\frac{\sigma_1}{2}+\rho_1\Big)(2F^2\mu^2+G^2) + \Big(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\Big)\Big[\Big(1\pm\frac{\beta}{\alpha}\mp\alpha\beta-\beta^2\Big)F^2\mu^2+(1-\alpha^2)G^2\Big]=0, \tag{21}$$

$$\Big(\frac{\sigma_1}{2}-\rho_1\Big)[2\beta^2F^2\mu^4-\alpha^2G^2(\mu^2+1)]+\Big(\frac{\sigma_1}{2}+\rho_1\Big) \times[2F^2\mu^4-G^2(\mu^2+1)]+\Big(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\Big)\Big[\Big(1\pm\frac{\beta}{\alpha}\Big)F^2\mu^2(\mu^2+1) +\beta^2\Big(1\pm\frac{\alpha}{\beta}\Big)F^2\mu^2(\mu^2+1)-2(1+\beta^2)F^2\mu^2-\alpha^2\Big(1\pm2\frac{\beta}{\alpha}\Big)G^2\mu^2 -\Big(1\pm2\frac{\alpha}{\beta}\Big)G^2\mu^2+(1+\alpha^2)G^2(2\mu^2-1)\Big]=0, \tag{22}$$

связывают величины μ, F, α, β и G и должны иметь нетривиальные решения. Это оказывается возможным при наличии определенных ограничений и связей между константами, определяющими задачу (1), (2). Удобно начать с имеющих наиболее простой вид уравнений (19), (20), а затем найденные при их решении величины подставить в (21), (22) для проверки их на совместимость и определения дополнительных ограничений на значения параметров задачи. В конце необходимо убедиться в том, что определяемое (15) значение γ^2 положительно, т.е. перекрестно-вырожденные решения (13) действительно существуют. Отметим, что значения $\mu=1$ и $\mu=0$ не представляют интереса, т.к. при $\mu\to1$ решения (13) становятся полностью вырожденными светлыми солитонами, а при $\mu\to0$ одна из волн не меняется во времени [20].

Описанная процедура позволила найти три семейства решений. Первое (при свободных параметрах $\sigma_{1,2}$, μ и F) имеет вид

$$G^2=F^2\mu^2,\quad \gamma^2=\frac{4}{k_2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_1\sigma_2-2\sigma_2^2}{\sigma_1-\sigma_2-3\rho_1}F^2, \qquad \alpha=(-1)^{l+1}\beta,\quad \alpha^2=\beta^2=\frac{\sigma_1^2-\sigma_2+3\rho_1}{\sigma_1-\sigma_2-3\rho_1} \tag{23}$$

и существует при

$$\rho_1^2=\frac{2\sigma_1^2+\sigma_1\sigma_2-3\sigma_2^2}{3},\quad \beta^2\neq(-1)^l\frac{\sigma_1+2\sigma_2}{\sigma_1-2\rho_1}, \qquad \beta^2\neq(-1)^l\frac{\sigma_1+2\sigma_2}{\sigma_1+2\rho_1}. \tag{24}$$

В (23), (24) и далее все выписываемые выражения не равны нулю и не обращаются в бесконечность. Соотношения, обеспечивающие эти тривиальные ограничения на параметры среды, дополнительно не выписываются. Второе семейство решений (при свободных параметрах $\sigma_{1,2}$, $\rho_1\neq0$, μ и F) задается формулами

$$G^2=F^2\mu^2,\quad \gamma^2=-\frac{4}{k_2}\frac{\sigma_2^2+\sigma_1\sigma_2+\rho_1^2}{\sigma_1+2\sigma_2}F^2, \tag{25}$$

а коэффициенты α и β являются решениями системы уравнений

$$\alpha^2+\beta^2=-2\frac{\sigma_1+2\rho_1}{\sigma_1+2\sigma_2},\quad (-1)^{l+1}\alpha\beta=\frac{\sigma_1+2\sigma_2}{\sigma_1-2\rho_1}. \tag{26}$$

Третье семейство решений определяется соотношениями

$$\alpha^2G^2=\beta^2F^2\mu^2,\quad \gamma^2=\frac{2}{k_2}\frac{\sigma_1+2\rho_1}{\alpha^2} \times\frac{\sigma_2^2+\sigma_1\sigma_2+\rho_1^2}{(\frac{3}{2}\sigma_1+2\sigma_2-\rho_1)(\sigma_2-\rho_1)-(\frac{1}{2}\sigma_1-2\sigma_2-3\rho_1)(\sigma_1+\sigma_2+\rho_1)}F^2, \tag{27}$$

а коэффициенты α и β являются решениями системы уравнений

$$\alpha^2+\beta^2 =\frac{\sigma_1^2-4\rho_1^2}{(\frac{3}{2}\sigma_1+2\sigma_2-\rho_1)(\sigma_2-\rho_1)-(\frac{1}{2}\sigma_1-2\sigma_2-3\rho_1)(\sigma_1+\sigma_2+\rho_1)}, \tag{28}$$

$$(-1)^{l+1}\alpha\beta=\frac{\sigma_1+2\rho_1}{\sigma_1+2\sigma_2}. \tag{29}$$

Параметры $\sigma_{1,2}$, ρ_1, μ и F при этом являются свободными.

Проверка показала, что перекрестно-вырожденные решения не могут быть построены как на основе двух других пар разных эллиптических функций Якоби ($\mathrm{dn}(\gamma\tau,\mu)$, $\mathrm{sn}(\gamma\tau,\mu)$ и $\mathrm{cn}(\gamma\tau,\mu)$ и $\mathrm{sn}(\gamma\tau,\mu)$), что было возможно для одной пары волн [11, 13], так и на базе фундаментальных решений уравнения Ламэ второго порядка [6, 20]. Поэтому приведенные выше решения (13) являются единственными и формируют три различных класса перекрестно-вырожденных решений для всех допустимых значений материальных параметров $\sigma_{1,2}$ и ρ_1.

Отметим здесь, что хотя на первый взгляд проведенный выше анализ относится только к тем ситуациям, в которых μ вещественно и меняется в интервале [0, 1], при $\mu > 1$ и мнимых значениях μ эллиптические функции Якоби переходят в различные комбинации тех же эллиптических функций $\mathrm{sn}(\gamma\tau', \mu')$, $\mathrm{cn}(\gamma\tau', \mu')$ и $\mathrm{dn}(\gamma\tau', \mu')$ с перенормированными значениями аргумента $\gamma\tau'$ и модуля μ', находящегося в интервале [0, 1] (см. таблицы 8.151 и 8.152 в [20]). Поэтому с учетом возможности такой перенормировки полученные нами выше выражения и выводы охватывают и те ситуации, когда $\mu > 1$ либо является мнимым.

Подчеркнем, что периодические перекрестно-вырожденные решения (13) при выполнении условий (25)–(29), определенные на множестве точек $\alpha^2 \neq \beta^2$, перестают существовать в точках $\alpha = \pm\beta$, поскольку γ^2 обращается в ноль. Поэтому все точки, в которых $\alpha^2 = \beta^2$, являются для этих решений особыми. Довольно неожиданно, что первое из полученных нами периодических перекрестно-вырожденных решений, существующее при $\gamma^2 \neq 0$, не является асимптотикой двух остальных решений. В известных нам случаях существования нескольких ветвей решений последние обычно «сшиваются», т. е. при определенных условиях асимптотически переходят друг в друга.

4. Заключение

Нами найдены три необычных класса частных аналитических решений системы четырех нелинейных уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд циркулярно поляризованных компонент электрического поля, описывающей самовоздействие и взаимодействие двух плоских эллиптически поляризованных волн в процессе коллинеарного распространения в изотропной среде с частотной дисперсией второго порядка и пространственной дисперсией кубической нелинейности. Эти решения представляют собой самосогласованные комбинации компонент двух эллиптически поляризованных плоских кноидальных волн, у которых две пары взаимно ортогональных циркулярно поляризационных компонент в процессе распространения меняются по одинаковым для каждой пары законам. При этом амплитуды компонент с одинаковой циркулярной поляризацией пропорциональны двум разным эллиптическим функциям Якоби с одинаковыми периодами изменения во времени: $\mathrm{dn}(\gamma\tau,\mu)$ и $\mathrm{cn}(\gamma\tau,\mu)$. Установлено, что такие решения образуют три различных класса, поскольку существуют в некоторой области изменений значений материальных параметров и не переходят друг в друга даже асимптотически.

Полученные перекрестно-вырожденные решения с разделяющимися переменными τ и z, фазы которых линейно меняются по z и не зависят от τ, построены на основе собственных функций уравнения Ламе первого порядка [6, 20]. Поэтому характер эволюции эллиптической поляризации каждой из двух согласованно распространяющихся и взаимодействующих кноидальных волн задается формулами, сходными с выражениями, которые описывают эволюцию эллипса поляризации одной кноидальной волны и приведены нами ранее в работе [11]. Для решения (23) в случае $\alpha = \mp\beta$ состояния поляризации двух волн, определяемые нормированными векторами Стокса [11, 12], различаются только знаком их z-х компонент, а другие компоненты этих векторов просто равны друг другу (см. характер эволюции состояния поляризации одиночной эллиптически поляризованной кноидальной волны на сфере Пуанкаре, показанный на рис.2 в [12]). Для перекрестно-вырожденных решений (24)–(29), если $\alpha \neq \mp\beta$, различия между состояниями поляризации двух распространяющихся волн более существенны (все компоненты их векторов Стокса различны).

1. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи* (М.: Мир, 1987).
2. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. Солитоны. *Нелинейные импульсы и пучки* (М.: Физматлит, 2003).
3. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. *Оптические солитоны. От световодов к фотонным кристаллам* (М.: Физматлит, 2005).
4. Chen Zhigang, Segev M., Christodoulides D.N. *Rep. Progr. Phys.*, **75**, 086401 (2012).
5. Kutuzov V., Petnikova V.M., Shuvalov V.V., Vysloukh V.A. *Phys. Rev. E*, **57**, 6056 (1998).
6. Petnikova V.M., Shuvalov V.V., Vysloukh V.A. *Phys. Rev. E*, **60**, 1009 (1999).
7. Boyd J.P. *Phys. D: Nonlin. Phenomena*, **21**, 227 (1986).
8. Christiansen P.L., Eilbeck J.C., Enolskii V.Z., Kostov N.A. *Proc. Royal Soc. Ldn A*, **456**, 2263 (2000).
9. Chow K.W., Nakkeeran K., Malomed B.A. *Opt.Commun.*, **219**, 251 (2003).
10. Tsang S.C., Nakkeeran K., Malomed B.A., Chow K.W. *Opt. Commun.*, **249**, 117 (2005).
11. Макаров В.А., Пережогин И.А., Петникова В.М., Потравкин Н.Н., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **42**, 117 (2012).
12. Макаров В.А., Петникова В.М., Потравкин Н.Н., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **42**, 1118 (2012).
13. Makarov V.A., Petnikova V.M., Potravkin N.N., Shuvalov V.V. *Phys. Wave Phenomena*, **21**, 264 (2013).
14. Makarov V.A., Petnikova V.M., Potravkin N.N., Shuvalov V.V. *Laser Phys. Lett.*, **10**, 075404 (2013).
15. Макаров В.А., Петникова В.М., Потравкин Н.Н., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **44**, 130 (2014).
16. Makarov V.A., Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Laser Phys.*, **24**, 085405 (2014).
17. Makarov V.A., Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Laser Phys. Lett.*, **11**, 115402 (2014).
18. Makarov V.A., Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Opt.Express*, **22**, 26607 (2014).
19. Макаров В.А., Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **45**, 35 (2015).
20. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971).
21. Голубков А.А., Макаров В.А. *Квантовая электроника*, **16**, 1437 (1989).
22. Голубков А.А., Макаров В.А. *Изв. РАН. Сер. физич.*, **56** (4), 41 (1992).