

## Асимптотический метод построения динамической частотной характеристики лазерного гироскопа

В.Ф.Судаков

*Рассмотрено уравнение, описывающее динамику фазы сигнала биений на выходе кольцевого лазерного гироскопа при наличии знакопеременной частотной подставки в виде суперпозиции двух меандров с различными амплитудами и периодами. Предполагается, что амплитуда одного из меандров много больше амплитуды другого, а также полуширины статической зоны захвата и измеряемой разности собственных частот кольцевого резонатора. Предложен метод, позволяющий приближенно вычислить частоту биений как функцию измеряемой разности собственных частот резонатора. Результат применения этого метода аналитически представляет собой рекуррентный алгоритм. Его реализация на компьютере позволила построить динамическую частотную (выходную) характеристику лазерного гироскопа с подставкой указанного вида.*

**Ключевые слова:** лазерный гироскоп, кольцевой резонатор, фазовое уравнение, собственные частоты кольцевого резонатора, частота биений, частотная характеристика.

### 1. Введение

Несмотря на значительные успехи лазерной гироскопии, до настоящего времени исследуются возможные пути преодоления одного из наиболее характерных (и принципиальных) недостатков лазерных гироскопов (ЛГ) на основе кольцевого лазера – возникновение зоны нечувствительности при измерении малых угловых скоростей, т.е. при малых разностях собственных частот кольцевого резонатора (КР). Фактически все предлагаемые для уменьшения этой зоны методы (не считая уменьшения тем или иным способом коэффициентов обратного рассеяния) сводятся к использованию частотной подставки, т.е. к известному (контролируемому) дополнительному расщеплению собственных частот КР, выводящему ЛГ из зоны нечувствительности. Обычно применяется знакопеременная периодическая частотная подставка [1, 2]. Форма подставки на ее периоде может быть различной: от простой гармоникой до частотно обогащенной кривой (например, типа меандра). Как правило, амплитуда такой подставки значительно превышает ширину зоны нечувствительности ЛГ в ее отсутствие (ширину статической зоны нечувствительности), и при теоретическом исследовании это обстоятельство часто используют для приближенных асимптотических вычислений [3]. Известные асимптотические подходы всегда адаптируются к конкретным видам подставки. В настоящей работе также будет предложен асимптотический метод, предназначенный для построения частотной характеристики (ЧХ) ЛГ с комбинированной подставкой, которая представляет собой суперпозицию двух меандров с сильно различающимися

амплитудами  $\Omega_r$ ,  $\Omega_s$  и периодами  $T_r = 2\pi/\nu_r$ ,  $T_s = 2\pi/\nu_s$ . При этом амплитуда  $\Omega_r$  одного из меандров много больше всех других параметров математической модели с размерностью частоты. Комбинированная подставка может быть создана, например, в зеemanовском ЛГ путем коммутации магнитного поля [1]. Именно специфика комбинированной подставки не только делает целесообразным применение асимптотического подхода, но и определяет его основные особенности.

В настоящей работе асимптотический метод разрабатывается теоретически и применяется для построения на персональном компьютере (ПК) динамической ЧХ ЛГ с комбинированной подставкой.

### 2. Фазовое уравнение ЛГ и эквивалентная система связанных уравнений с постоянными значениями подставки

Динамика одномодового (двухволнового) ЛГ с газовой смесью специального состава в качестве активного вещества описывается системой трех дифференциальных уравнений первого порядка (системой укороченных уравнений для медленно меняющихся интенсивностей и разности фаз встречно распространяющихся волн [4]). Эти уравнения связаны, но при определенных допущениях, в частности при пренебрежении незначительной амплитудной модуляцией указанных интенсивностей, допустимо считать фазовое уравнение независимым. Такое допущение вводится даже в том случае, когда знакопеременная подставка рассматриваемого ЛГ имеет большую амплитуду. Возможность использования данного приближения доказана, например, в [5] путем интегрирования связанной системы укороченных уравнений на аналоговой модели. В настоящей работе фазовое уравнение также рассматривается как независимое.

При использовании любой периодической частотной подставки фазовое уравнение есть нелинейное уравнение

В.Ф.Судаков. Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, Россия, 105005 Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1; e-mail: mr.vvffss@inbox.ru

Поступила в редакцию 25 октября 2015 г., после доработки – 28 августа 2016 г.

первого порядка, правая часть которого периодична как по времени, так и относительно искомой функции  $\Psi$ :

$$\frac{d\Psi}{dt} = \Omega_d(t) + \Omega + \Omega_L \cos \Psi. \quad (1)$$

Здесь  $\Psi(t)$  – разность фаз встречных волн (фаза сигнала биений); в частном случае комбинированной подставки закон ее изменения  $\Omega_d(t) = \Omega_r \text{sign}[\sin(v_r t)] + \Omega_s \text{sign}[\sin(v_s t)]$ ;  $\Omega_L$  – полуширина статической зоны нечувствительности;  $\Omega$  – разность собственных частот КР (пропорциональна измеряемой угловой скорости). Величины  $\Omega_r$ ,  $\Omega_s$ ,  $v_r$ ,  $v_s$ ,  $\Omega_L$  – параметры, определяющие конкретный вариант динамической ЧХ, а  $\Omega$  – независимая переменная для любого варианта характеристики. Под ЧХ (кривой измерительного преобразования) по определению будем понимать функцию переменной  $\Omega$

$$\Omega_{\text{beat}}(\Omega) = \frac{\Psi(T_s) - \Psi_0}{T_s}, \quad (2)$$

где  $\Psi_0 = \Psi(0)$  – фаза сигнала биений в начале периода подставки  $0 \leq t \leq T_s$ , а  $\Psi(T_s)$  – фаза в конце указанного интервала (ее зависимость от  $\Omega$  очевидна).

Предположим, что  $K_r = T_s/T_r$  – большое целое число. Тогда  $T_s$  – общий период комбинированной подставки. Кроме того, выполняются неравенства  $\Omega_s/\Omega_r$ ,  $\Omega/\Omega_r$ ,  $\Omega_L/\Omega_r \ll 1$ . Именно эти соотношения определяют возможность использования асимптотического подхода для построения ЧХ. Из (2) следует, что для расчета ЧХ достаточно решить задачу Коши для уравнения (1) на интервале  $0 \leq t \leq T_s$ . Непосредственное применение для этой цели ПК неэффективно, во всяком случае при использовании среды MathCad 15. Поэтому наиболее принципиальную часть работы целесообразно сначала проделать аналитически.

Заметим, что в пределах периода подставки  $0 \leq t \leq T_s$  существуют полуинтервалы длительностью  $T_r/2$ , на которых подставка принимает одно из четырех постоянных значений:  $\Omega_{dpq} = (-1)^{p-1}\Omega_r + (-1)^{q-1}\Omega_s$ , где  $p, q = 1, 2$ . На первом полупериоде подставки (при  $k = 1, \dots, K_r/2$ ) выделим нечетные полуинтервалы  $(2k-2)T_r/2 \leq t \leq (2k-1) \times T_r/2$ , где  $\Omega_{d11} = \Omega_r + \Omega_s$ , и четные полуинтервалы  $(2k-1) \times T_r/2 \leq t \leq 2k(T_r/2)$ , где  $\Omega_{d21} = -\Omega_r + \Omega_s$ . При  $k = (K_r/2 + 1), \dots, K_r$  (т.е. на втором полупериоде подставки) на нечетных полуинтервалах имеем  $\Omega_{d12} = \Omega_r - \Omega_s$ , а на четных полуинтервалах –  $\Omega_{d22} = -\Omega_r - \Omega_s$ . Следовательно, на каждом из приведенных полуинтервалов фазовое уравнение (1) имеет постоянную по времени правую часть и может быть представлено в виде

$$\frac{dt}{d\Psi} = \frac{1}{\Omega_{dpq} + \Omega + \Omega_L \cos \Psi}. \quad (3)$$

Уравнение (3) интегрируется при начальном условии  $t(\Psi_0) = 0$ . Очевидно, что каждому из указанных полуинтервалов на оси времени должна быть поставлена в соответствие пара граничных значений на оси фаз  $\Psi$ . Поясним смысл этого утверждения на примере первых трех полуинтервалов времени. На первом (нечетном) полуинтервале  $0 \leq t \leq T_r/2$  фазовое уравнение (3) имеет вид

$$\frac{dt}{d\Psi} = \frac{1}{\Omega_r + \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

а его решение может быть представлено так:

$$\frac{T_r}{2} = \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} \frac{d\Psi}{\Omega_r + \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

где  $\Psi_0$  – произвольно заданная начальная фаза, а  $\Psi_1$  – неизвестная фаза. На втором (четном) полуинтервале  $T_r/2 \leq t \leq 2(T_r/2)$  фазовое уравнение имеет вид

$$\frac{dt}{d\Psi} = \frac{1}{-\Omega_r + \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

а его решение может быть представлено так:

$$\frac{T_r}{2} = \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \frac{d\Psi}{-\Omega_r + \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

где граничные фазы  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  неизвестны. На третьем (нечетном) полуинтервале  $2(T_r/2) \leq t \leq 3(T_r/2)$  фазовое уравнение снова имеет вид

$$\frac{dt}{d\Psi} = \frac{1}{\Omega_r + \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

а его решение может быть представлено так:

$$\frac{T_r}{2} = \int_{\Psi_2}^{\Psi_3} \frac{d\Psi}{\Omega_r + \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

где граничные фазы  $\Psi_2$  и  $\Psi_3$  неизвестны.

При  $k = 1, \dots, K_r/2$  распространим эти формулы на другие нечетные и четные полуинтервалы общего вида в пределах первого полупериода подставки длительностью  $T_s/2$  (общее число таких полуинтервалов равно  $K_r$ ). На нечетных полуинтервалах  $(2k-2)T_r/2 \leq t \leq (2k-1)T_r/2$  фазовое уравнение имеет вид

$$\frac{dt}{d\Psi} = \frac{1}{\Omega_r + \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

а его решение может быть представлено так:

$$\frac{T_r}{2} = \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \frac{d\Psi}{\Omega_r + \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi}, \quad (4)$$

где граничные фазы  $\Psi_{2k-2}$  и  $\Psi_{2k-1}$  неизвестны. Задана только начальная фаза  $\Psi_0$ . На четных полуинтервалах  $(2k-1)T_r/2 \leq t \leq 2k(T_r/2)$  фазовое уравнение имеет вид

$$\frac{dt}{d\Psi} = \frac{1}{-\Omega_r + \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

а его решение может быть представлено так:

$$\frac{T_r}{2} = \int_{\Psi_{2k-1}}^{\Psi_{2k}} \frac{d\Psi}{-\Omega_r + \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi}, \quad (5)$$

где граничные фазы  $\Psi_{2k-1}$  и  $\Psi_{2k}$  неизвестны.

Совершенно аналогично рассматриваются нечетные и четные полуинтервалы на втором полупериоде подставки  $T_s/2 \leq t \leq 2(T_s/2)$  при  $k = (K_r/2 + 1), \dots, K_r$ . На нечетных полуинтервалах  $(2k-2)T_r/2 \leq t \leq (2k-1)T_r/2$  фазовое уравнение имеет решение

$$\frac{T_r}{2} = \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \frac{d\Psi}{\Omega_r - \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi}, \quad (6)$$

где граничные фазы  $\Psi_{2k-2}$  и  $\Psi_{2k-1}$  неизвестны, но уже найдена (известна) фаза  $\Psi_{K_r}$ . На четных полуинтервалах  $(2k-1)T_r/2 \leq t \leq 2k(T_r/2)$  фазовое уравнение имеет решение

$$\frac{T_r}{2} = \int_{\Psi_{2k-1}}^{\Psi_{2k}} \frac{d\Psi}{-\Omega_r - \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi}, \quad (7)$$

где граничные фазы  $\Psi_{2k-1}$  и  $\Psi_{2k}$  неизвестны.

### 3. Рекуррентные соотношения между границами интервалов на оси фаз

Из фазового уравнения (1) следует выражение

$$\begin{aligned} T_s = & \sum_{k=1}^{K_r/2} \left( \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \frac{d\Psi}{\Omega_r + \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} \right. \\ & \left. + \int_{\Psi_{2k-1}}^{\Psi_{2k}} \frac{d\Psi}{-\Omega_r + \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} \right) \\ & + \sum_{k=K_r/2+1}^{K_r} \left( \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \frac{d\Psi}{\Omega_r - \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} \right. \\ & \left. + \int_{\Psi_{2k-1}}^{\Psi_{2k}} \frac{d\Psi}{-\Omega_r - \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Задача состоит в том, чтобы найти последнюю фазу  $\Psi_{2K_r}$  в зацепляющейся последовательности фаз

$$\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{K_r}, \Psi_{K_r+1}, \dots, \Psi_{2K_r-1}, \Psi_{2K_r}. \quad (9)$$

Для ее решения сначала воспользуемся асимптотическим преобразованием интегралов в (4), например таким:

$$\begin{aligned} \frac{T_r}{2} &= \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \frac{d\Psi}{\Omega_r + \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} \\ &= \frac{1}{\Omega_r} \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \frac{d\Psi}{1 + (\Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi)/\Omega_r} \\ &\approx \frac{1}{\Omega_r} \left( 1 - \frac{\Omega_s + \Omega}{\Omega_r} \right) (\Psi_{2k-1} - \Psi_{2k-2}) - \frac{\Omega_L}{\Omega_r^2} \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \cos \Psi d\Psi. \end{aligned} \quad (10)$$

В нулевом приближении по  $\Omega_L/\Omega_r$  из (10) получим

$$\Psi_{2k-1} = \Psi_{2k-2} + \frac{\Omega_r}{1 - (\Omega_s + \Omega)/\Omega_r} \frac{T_r}{2}.$$

В первом приближении по  $\Omega_L/\Omega_r$  из (10) следует, что граничные фазы связаны рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} \Psi_{2k-1} = & \Psi_{2k-2} + \frac{1}{1 - (\Omega_s + \Omega)/\Omega_r} \left\{ \Omega_r \frac{T_r}{2} \right. \\ & \left. + \frac{\Omega_L}{\Omega_r} \left\{ \sin \left[ \Psi_{2k-2} + \frac{\Omega_r}{1 - (\Omega_s + \Omega)/\Omega_r} \frac{T_r}{2} \right] - \sin \Psi_{2k-2} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Воспользуемся асимптотическим преобразованием интегралов в (5):

$$\begin{aligned} \frac{T_r}{2} &= \int_{\Psi_{2k-1}}^{\Psi_{2k}} \frac{d\Psi}{-\Omega_r + \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} \\ &\approx -\frac{1}{\Omega_r} \left( 1 + \frac{\Omega_s + \Omega}{\Omega_r} \right) (\Psi_{2k} - \Psi_{2k-1}) - \frac{\Omega_L}{\Omega_r^2} \int_{\Psi_{2k-1}}^{\Psi_{2k}} \cos \Psi d\Psi. \end{aligned} \quad (12)$$

В нулевом приближении по  $\Omega_L/\Omega_r$  из (12) получим

$$\Psi_{2k} = \Psi_{2k-1} - \frac{\Omega_r}{1 + (\Omega_s + \Omega)/\Omega_r} \frac{T_r}{2}.$$

В первом приближении по  $\Omega_L/\Omega_r$  из (12) следует, что граничные фазы связаны рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} \Psi_{2k} = & \Psi_{2k-1} + \frac{1}{1 + (\Omega_s + \Omega)/\Omega_r} \left\{ -\Omega_r \frac{T_r}{2} \right. \\ & \left. - \frac{\Omega_L}{\Omega_r} \left\{ \sin \left[ \Psi_{2k-1} - \frac{\Omega_r}{1 - (\Omega_s + \Omega)/\Omega_r} \frac{T_r}{2} \right] - \sin \Psi_{2k-1} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее воспользуемся асимптотическим преобразованием интегралов в (6):

$$\begin{aligned} \frac{T_r}{2} &= \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \frac{d\Psi}{\Omega_r - \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} \\ &\approx \frac{1}{\Omega_r} \left( 1 - \frac{\Omega_s + \Omega}{\Omega_r} \right) (\Psi_{2k-1} - \Psi_{2k-2}) - \frac{\Omega_L}{\Omega_r^2} \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \cos \Psi d\Psi. \end{aligned} \quad (14)$$

В нулевом приближении по  $\Omega_L/\Omega_r$  из (14) получим

$$\Psi_{2k-1} = \Psi_{2k-2} + \frac{\Omega_r}{1 - (-\Omega_s + \Omega)/\Omega_r} \frac{T_r}{2}.$$

В первом приближении по  $\Omega_L/\Omega_r$  из (14) следует, что граничные фазы связаны рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} \Psi_{2k-1} = & \Psi_{2k-2} + \frac{1}{1 - (-\Omega_s + \Omega)/\Omega_r} \left\{ \Omega_r \frac{T_r}{2} \right. \\ & \left. + \frac{\Omega_L}{\Omega_r} \left\{ \sin \left[ \Psi_{2k-2} + \frac{\Omega_r}{1 - (-\Omega_s + \Omega)/\Omega_r} \frac{T_r}{2} \right] - \sin \Psi_{2k-2} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Воспользуемся асимптотическим преобразованием интегралов в (7)

$$\begin{aligned} \frac{T_r}{2} &= \int_{\Psi_{2k-1}}^{\Psi_{2k}} \frac{d\Psi}{-\Omega_r - \Omega_s + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} \\ &\approx \frac{1}{\Omega_r} \left( 1 + \frac{-\Omega_s + \Omega}{\Omega_r} \right) (\Psi_{2k} - \Psi_{2k-1}) - \frac{\Omega_L}{\Omega_r^2} \int_{\Psi_{2k-1}}^{\Psi_{2k}} \cos \Psi d\Psi. \end{aligned} \quad (16)$$

В нулевом приближении по  $\Omega_L/\Omega_r$  из (16) получим

$$\Psi_{2k} = \Psi_{2k-1} - \frac{\Omega_r}{1 + (-\Omega_s + \Omega)/\Omega_r} \frac{T_r}{2}.$$

В первом приближении по  $\Omega_L/\Omega_r$  из (16) следует, что граничные фазы связаны рекуррентным соотношением

$$\Psi_{2k} = \Psi_{2k-1} + \frac{1}{1 + (-\Omega_s + \Omega)/\Omega_r} \left\{ -\Omega_r \frac{T_r}{2} - \frac{\Omega_L}{\Omega_r} \left\{ \sin \left[ \Psi_{2k-1} - \frac{\Omega_r}{1 - (-\Omega_s + \Omega)/\Omega_r} \frac{T_r}{2} \right] - \sin \Psi_{2k-1} \right\} \right\}. \quad (17)$$

#### 4. Построение динамической ЧХ

Как следует из выражений (11), (13), (15), (17), можно найти все граничные фазы в последовательности (9), начиная с заданной  $\Psi_0$  и заканчивая искомой  $\Psi_{2K_r} = \Psi_\Omega$ . Зависимость последней фазы  $\Psi_\Omega$  итерационного процесса от  $\Omega$  очевидна из приведенных выше рекуррентных соотношений. После этого определяется частота биений  $\Omega_{beat}(\Omega) = (\Psi_\Omega - \Psi_0)/T_s$  как функция переменной  $\Omega$  (разности частот КР), т. е. ЧХ по определению.

В рассматриваемом методе мы ограничились приближением первого порядка по  $\Omega_L/\Omega_r$ , т. е. точность метода ограничена. Однако при выполнении условий  $\Omega_r/\Omega$ ,  $\Omega_r/\Omega_s$ ,  $\Omega_r/\Omega_L \gg 1$ , достаточных для применения асимптотического метода, точность определения динамической ЧХ вполне удовлетворительна. Быстродействие реализации алгоритма на ПК является предельно высоким.

Приведем пример расчета динамической ЧХ  $\Omega_{beat}(\Omega)$  в диапазоне  $0 \leq \Omega \leq 3v_s$  при следующих параметрах:  $\Omega_s = 2\pi \cdot 154$ ,  $\Omega_r = 2\pi \cdot 60 \times 10^3$ ,  $v_s = 2\pi \cdot 4$ ,  $K_r = 126$ ,  $v_r = K_r v_s$ ,  $\Omega_L = 2\pi \cdot 600$ . Идеальная ЧХ соответствует  $\Omega_{beat}(\Omega) = \Omega$ . Как следует из рис.1, расчетная ЧХ (именно из-за наличия в знакопеременной подставке компоненты с большой амплитудой) практически не отличается от идеальной, поскольку искажения расчетной ЧХ чрезвычайно малы. Для иллюстрации характера и величины искажений на

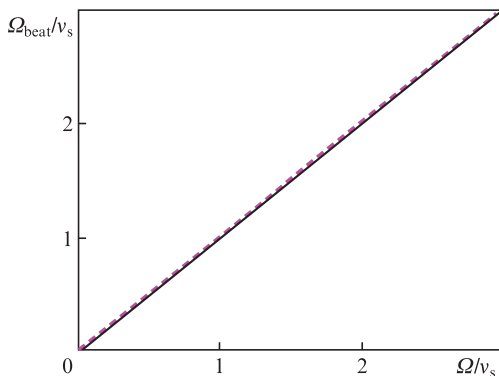


Рис.1. Расчетная динамическая ЧХ ЛГ с комбинированной подставкой (штриховая линия) и идеальная ЧХ (сплошная линия). Параметры, используемые при расчете, приведены в тексте.

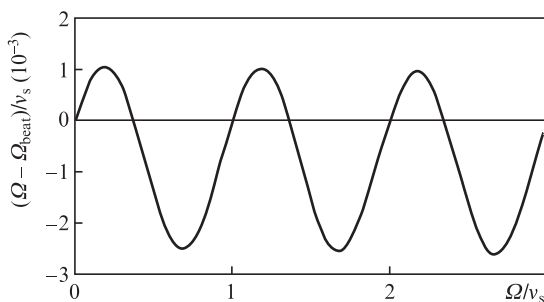


Рис.2. Отклонение расчетной динамической ЧХ ЛГ с комбинированной подставкой от идеальной при тех же параметрах, что и для рис.1.

рис.2 приведена зависимость отклонения расчетной ЧХ от идеальной.

#### 5. Расчет динамической ЧХ ЛГ с подставкой в виде меандра асимптотическим методом и по теории Флоке

Опубликованные результаты расчетов динамических ЧХ ЛГ с комбинированной подставкой нам неизвестны. Поэтому не представляется возможным проверить результаты, полученные здесь асимптотическим методом, путем сравнения их с результатами, полученными другими методами. Однако можно оценить достоверность асимптотического метода, сопоставив результаты расчета динамической ЧХ ЛГ с подставкой в виде меандра этим методом и методом теории Флоке [6].

В ряде работ влияние подставки в виде меандра с амплитудой  $\Omega_r$  и частотой  $v$  на формирование динамической ЧХ исследовалось достаточно подробно. Так, в [6] с использованием теории Флоке построена такая ЧХ во всей области изменения  $\Omega$  (постоянная составляющая частотной подставки), т. е. как в пределах зон синхронизации (низших порядков), так и между ними. В [6] отмечается, что полученные результаты подтверждаются сравнением их с аналогичными результатами работ [7–9], в которых ЧХ исследовалась только для локальных областей изменения  $\Omega$  вблизи зон синхронизации и между зонами вдали от их границ. Поэтому обратимся к [6], как к наиболее общему и достоверному источнику информации о динамической ЧХ в случае подставки в виде меандра. В этой работе теоретически получена ЧХ для случая, когда  $\Omega_r \gg \Omega_L \gg v$  (рис.3). Согласно [6] зоны синхронизации в границах  $\Omega_n \pm S_n/2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) имеют центры при

$$\Omega_n = nv \sqrt{1 - \frac{\Omega_L^2}{\Omega_r^2 - n^2 v^2}}. \quad (18)$$

Ширины соответствующих зон

$$S_n = 2(2n - 1) \frac{v^2}{\Omega_L}. \quad (19)$$

Из (18) следует, что центры зон синхронизации расположены неэквидистантно и всегда смещены влево относи-

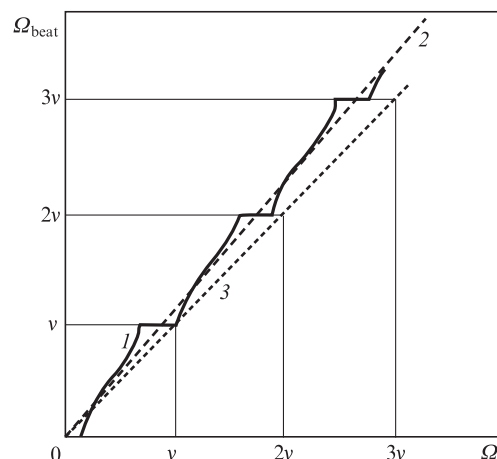


Рис.3. Динамическая (1), квазистатическая (2) и идеальная (3) ЧХ ЛГ при малых скоростях вращения [6].

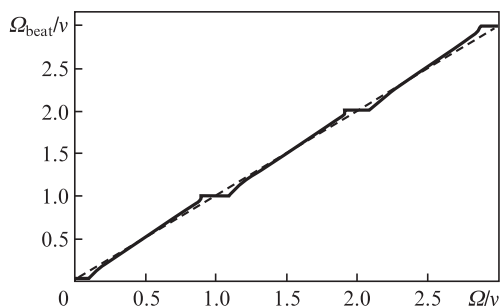


Рис.4. Динамическая ЧХ ЛГ с подставкой в виде меандра, рассчитанная асимптотическим методом при  $\Omega_r = 2\pi \cdot 2 \times 10^3$ ,  $\nu = 2\pi \cdot 50$ ,  $\Omega_L = 2\pi \cdot 600$  (сплошная линия), и идеальная ЧХ (штриховая линия).

тельно частот  $n\nu$  (смещение увеличивается с ростом  $\Omega_L$ ). Из рис.3 видно, что это проявляется в том, что центры зон синхронизации лежат не на идеальной ЧХ, а на квазистатической ЧХ (условной прямой). По данным [6] ширины зон имеют осциллирующую зависимость от их номера  $n$ , а амплитуды осцилляций увеличиваются по мере приближения к области сильных линейных искажений ( $\Omega \approx \Omega_r$ ) до величины, сравнимой с  $\nu$ . Выражение (19) является лишь приближением для ширин зон низшего порядка и указанную закономерность не отражает.

Применим для расчета динамической ЧХ ЛГ с подставкой в виде меандра асимптотический метод. Результаты расчета представлены на рис.4. Из сравнения зависимостей на рис.3 и 4 следует, что асимптотический метод расчета дает тот же результат, что и метод (теория Флоке), использованный в [6]. В силу замечания, сделанного выше, достоверность результатов, полученных асимптотическим методом, подтверждается также и результатами расчетов [7–9].

Зависимости на рис.1, 2 и 4 позволяют сделать следующий вывод: по сравнению с подставкой в виде меандра

комбинированная подставка в значительной степени «спрямляет» динамическую ЧХ за счет уменьшения ширины зон синхронизации (приближает ее к идеальной ЧХ).

## 6. Заключение

Предложенный в статье метод расчета динамической ЧХ ЛГ позволил построить ее на ПК с помощью транслятора MathCad 15. Особенностью применения метода является возможность (при условии  $\Omega_L/\Omega_r, \Omega_s/\Omega_r \ll 1$ ) представления решения фазового уравнения в виде рекуррентной последовательности, обрабатываемой на ПК. Алгоритм для ПК, использующий этот метод, позволяет построить ЧХ в течение нескольких секунд, т. е. может применяться в процессе разработки или испытания прибора в режиме реального времени. Тем самым доказана возможность оперативно провести сравнительный анализ различных вариантов ЧХ.

Автор выражает искреннюю благодарность В.В.Азаровой, И.И.Савельеву и Е.А.Петрухину за постановку задачи и очень полезное, плодотворное обсуждение ее решения.

1. Азарова В.В., Голяев Ю.Д., Дмитриев В.Г. *Квантовая электроника*, **30** (2), 96 (2000).
2. Хошев И.М. *Квантовая электроника*, **7** (5), 953 (1980).
3. Судаков В.Ф. *ЖПС*, **25**, 362; 946 (1976).
4. *Волновые и флуктуационные процессы в лазерах*. Под ред. Ю.Л.Климонтовича (М.: Наука, 1974).
5. Ланда П.С., Ларионцев Е.Г., Чернобровкин Г.А. *Радиотехника и электроника*, **13**, 2026 (1968).
6. Бирман А.Я., Наумов П.Б., Савушкин А.Ф., Тропкин Е.Н. *Квантовая электроника*, **13** (8), 1638 (1986).
7. Ланда П.С., Таранкова Н.Д. *Радиотехника и электроника*, **21**, 260 (1976).
8. Хошев И.М. *Радиотехника и электроника*, **22**, 135 (1977).
9. Хошев И.М. *Радиотехника и электроника*, **22**, 313 (1977).