

Терагерцевое излучение при лазерно-инициируемом разделении зарядов в облучаемой плазменной мишени

А.С.Куратов, А.В.Брантов, Ю.М.Алиев, В.Ю.Быченков

При воздействии интенсивного лазерного импульса на тонкую мишень возможно получение как объемных, так и поверхностных терагерцевых (ТГц) импульсов в результате их генерации покидающим мишень сгустком быстрых электронов и/или движущимся фронтом пространственного разделения заряда разлетающейся плазмы. Даны детализация и сопоставление этих механизмов генерации объемного и поверхностного ТГц излучений. Установлена зависимость параметров генерируемого ТГц излучения от энергии, размера пятна фокусировки и длительности лазерного импульса.

Ключевые слова: терагерцевое излучение, поверхностные волны, релятивистский короткий лазерный импульс.

1. Введение

Одно из быстро развивающихся в настоящее время направлений исследований взаимодействия лазерного излучения высокой интенсивности с веществом связано с проблемой создания источников мощного терагерцевого (ТГц) излучения для широкой области практических применений [1]. Источники ТГц импульсов, обладающие рядом уникальных свойств, которые обусловлены неразрушающим воздействием данного вида излучения, могут использоваться в медицине и биотехнологии, для диагностических (досмотровых) целей, а также в области информационных технологий. Однако применяемые в настоящее время компактные источники ТГц излучения имеют существенные ограничения по мощности и эффективности конверсии энергии лазерного импульса в энергию ТГц излучения, что сдерживает их практическое использование. В то же время сильные вторичные электромагнитные поля в малом объеме уже создаются рутинным образом при воздействии мощных фемто/пикосекундных лазерных импульсов на твердотельные мишени (например, тонкие металлические фольги). На этом пути следует ожидать появления гораздо более мощных, чем ранее, источников ТГц излучения.

Типичный механизм генерации ТГц излучения – когерентное переходное излучение, возникающее при прохождении электронного сгустка сквозь металлическую фольгу. Этот механизм положен в основу мощного ТГц

источника, использующего ультрарелятивистский электронный пучок с зарядом в несколько нанокулонов из большого линейного ускорителя [2]. Такой заряд могут иметь и релятивистские электроны, генерируемые мощным коротким лазерным импульсом в направлении его распространения при облучении фольги [3]. Пересекая тыльную поверхность фольги, покидающие мишень электроны могут генерировать когерентное переходное излучение в направлении вперед, а также поверхностное излучение, и то и другое – излучение ТГц диапазона. Вероятно, с этим связано наблюдавшееся ТГц излучение в экспериментах по облучению твердотельных мишеней лазерным излучением с высокой интенсивностью [4–8]. Отметим, что генерация ТГц излучения может происходить и при гораздо меньших интенсивностях лазерного излучения [9–11].

Покидающий мишень электронный сгусток включает в себя малую часть всех лазерно-ускоренных (нагретых) электронов: лишь тех, энергия которых достаточна для преодоления запирающего электростатического потенциала. В типичном случае – это сгусток движущихся релятивистских частиц. Большая же часть горячих электронов остается в мишени, формируя сильное электростатическое поле у ее задней поверхности, приводящее к ионизации мишени и последующему разлету плазмы. При таком разлете на фронте разлетающейся плазмы возникает движущийся нескомпенсированный электрический диполь [12], который по-существу эквивалентен отлетающему от мишени заряду и, значит, также может генерировать переходное излучение [5, 6]. Данный механизм излучения, в отличие от первого, связан с медленным движением заряда. Однако величина отлетающего заряда велика по сравнению с зарядом релятивистского сгустка, и его роль в излучении следует учитывать.

Говоря об этих двух механизмах излучения, следует отметить, что в обоих случаях возможна генерация как объемных, так и поверхностных ТГц импульсов. Именно детализации и сопоставлению механизмов генерации объемного и поверхностного излучений, обусловленных покидающим мишень релятивистским сгустком электронов и неквазинейтральным разлетом плазмы, посвящена

А.С.Куратов. Центр фундаментальных и прикладных исследований, ВНИИА им. Н.Л.Духова, Росатом, Россия, 127055 Москва, Сушевская ул., 22; e-mail: kuratov.andrew@gmail.com

А.В.Брантов, В.Ю.Быченков. Центр фундаментальных и прикладных исследований, ВНИИА им. Н.Л.Духова, Росатом, Россия, 127055 Москва, Сушевская ул., 22; Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: bychenk@lebedev.ru

Ю.М.Алиев. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53

Поступила в редакцию 16 августа 2016 г., после доработки – 5 октября 2016 г.

настоящая работа. При этом, используя модельную связь соответствующих электрических токов с параметрами греющего лазерного излучения, мы решаем задачу характеристики генерируемого ТГц излучения в зависимости от энергии, размера пятна фокусировки и длительности лазерного импульса.

2. Генерация электромагнитных полей при воздействии короткого лазерного импульса на плоскую мишень

Для изучения генерации электромагнитных полей заданными токами, обусловленными воздействием коротких лазерных импульсов на мишень, воспользуемся системой уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат. Проведем фурье-преобразование во времени

$$f(z, r_{\perp}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(z, r_{\perp}, t) \exp(i\omega t).$$

Предполагая аксиальную симметрию сторонних источников и генерируемых полей, будем использовать разложение по поперечному радиусу-вектору r_{\perp} в плоскости мишени

$$f(z, \mathbf{k}_{\perp}, \omega) = 2\pi \int_0^{\infty} r_{\perp} dr_{\perp} J_0(k_{\perp} r_{\perp}) f(z, r_{\perp}, \omega)$$

и соответственно разложение

$$f(z, r_{\perp}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} J_0(k_{\perp} r_{\perp}) f(z, \mathbf{k}_{\perp}, \omega),$$

где J_0 – функция Бесселя нулевого порядка. Система уравнений Максвелла при этом принимает вид

$$i \frac{\omega}{c} B_{\varphi}(z, \mathbf{k}_{\perp}, \omega) = \frac{\partial E_r(z, \mathbf{k}_{\perp}, \omega)}{\partial z} - i k_{\perp} E_z(z, \mathbf{k}_{\perp}, \omega),$$

$$-\frac{\partial B_{\varphi}(z, \mathbf{k}_{\perp}, \omega)}{\partial z} = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega, z) E_r(z, \mathbf{k}_{\perp}, \omega) + \frac{4\pi}{c} j_r(z, \mathbf{k}_{\perp}, \omega), \quad (1)$$

$$i k_{\perp} B_{\varphi}(z, \mathbf{k}_{\perp}, \omega) = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega, z) E_z(z, \mathbf{k}_{\perp}, \omega) + \frac{4\pi}{c} j_z(z, \mathbf{k}_{\perp}, \omega).$$

Здесь $\varepsilon(\omega, z)$ – диэлектрическая проницаемость среды. Выражая аксиальную ($E_z(z, \mathbf{k}_{\perp}, \omega)$) и радиальную ($E_r(z, \mathbf{k}_{\perp}, \omega)$) компоненты электрического поля через азимутальную компоненту напряженности магнитного поля $B_{\varphi}(z, \mathbf{k}_{\perp}, \omega)$, для последней получаем уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial z} \right) - k^2 B_{\varphi} = \frac{4\pi \varepsilon}{c} \left[\text{rot} \left(\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon} \right) \right]_{\varphi}$$

$$= -\frac{4\pi \varepsilon}{c} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{j_r}{\varepsilon} \right) - i k_{\perp} \frac{j_z}{\varepsilon} \right] \equiv Q, \quad (2)$$

где $k^2 = k_{\perp}^2 - (\omega^2/c^2)\varepsilon$.

Из уравнения (2) следует, что генерация магнитного поля определяется источником $\text{rot}[\mathbf{j}/\varepsilon(z)]$. Если возбуждаемые в плазме токи \mathbf{j} являются потенциальными, например при генерации вихревых полей в результате термо-ЭДС или пондеромоторного воздействия лазерного им-

пульса на мишень, то такой источник имеет вид $\text{rot}[\mathbf{j}/\varepsilon(z)] = \nabla \varepsilon^{-1}(z) \times \mathbf{j}$ и действует только в приповерхностной области, где имеется сильная неоднородность электронной плотности. В настоящей работе рассматривается генерация объемного излучения и поверхностных электромагнитных волн (ПЭВ) токами, возникающими при отлете от поверхности сгустка горячей неквазинейтральной плазмы под действием короткого мощного лазерного импульса.

Решение уравнения (2) для магнитного поля внутри мишени ($z < 0$) имеет вид

$$B_{\varphi}^p(z, \omega, \mathbf{r}) = \left[B_{\varphi}(z = -0, \omega, \mathbf{k}_{\perp}) + \frac{1}{2k} \int_{-\infty}^0 dz \exp(kz) Q(z, \omega, \mathbf{k}_{\perp}) \right] \exp(kz) - \frac{1}{2k} \left[\exp(-kz) \int_{-\infty}^z dz \exp(kz) Q(z, \omega, \mathbf{k}_{\perp}) + \exp(kz) \int_z^0 dz \exp(-kz) Q(z, \omega, \mathbf{k}_{\perp}) \right], \quad (3)$$

где $B_{\varphi}(z = 0, \omega, \mathbf{k}_{\perp}) \equiv B_{\varphi}^0(\omega, \mathbf{k}_{\perp})$ – напряженность магнитного поля на границе мишени. Для магнитного поля в вакууме $B_{\varphi}^v(z, \omega, \mathbf{r})$ из (2) получаем выражение

$$B_{\varphi}^v(z, \omega, \mathbf{r}) = \left[B_{\varphi}(z = +0, \omega, \mathbf{k}_{\perp}) + \frac{1}{2k_0} \int_0^{\infty} dz \exp(-k_0 z) Q(z, \omega, \mathbf{k}_{\perp}) \right] \exp(-k_0 z) - \frac{1}{2k_0} \left[\exp(k_0 z) \int_z^{\infty} dz \exp(-k_0 z) Q(z, \omega, \mathbf{k}_{\perp}) + \exp(-k_0 z) \int_0^z dz \exp(k_0 z) Q(z, \omega, \mathbf{k}_{\perp}) \right], \quad (4)$$

где $k_0^2 = k_{\perp}^2 - \omega^2/c^2$.

Интегрируя уравнение (2) в окрестности $z = 0$, находим напряженность магнитного поля на границе мишени:

$$B_{\varphi}^0(\omega, \mathbf{k}_{\perp}) = -\frac{1}{D(\omega, \mathbf{k}_{\perp})} \left[\int_0^{\infty} dz \exp(-k_0 z) Q(z, \omega, \mathbf{k}_{\perp}) + \int_{-\infty}^0 dz \exp(kz) Q(z, \omega, \mathbf{k}_{\perp}) + \int_{-0}^{+0} dz \frac{Q(z, \omega, \mathbf{k}_{\perp})}{\varepsilon(z, \omega)} \right]$$

$$= \frac{4\pi}{c D(\omega, \mathbf{k}_{\perp})} \left\{ \int_0^{\infty} dz \exp(-k_0 z) [k_0 j_r(z, \omega, \mathbf{k}_{\perp}) - i k_{\perp} j_z] + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^0 dz \exp(kz) [k j_r(z, \omega, \mathbf{k}_{\perp}) + i k_{\perp} j_z] \right\}, \quad (5)$$

где

$$D(\omega, \mathbf{k}_{\perp}) = k/\varepsilon + k_0. \quad (6)$$

Соотношение $D(\omega, \mathbf{k}_{\perp}) = 0$ является дисперсионным уравнением для ПЭВ. Исследуем генерацию электромагнитного излучения и ПЭВ составляющей тока j_z , нормальной к поверхности мишени. Это, например, имеет место на тыльной стороне мишени. Тогда выражение для магнитного поля в вакууме с учетом (4), (5) принимает вид

$$\begin{aligned}
B_{\varphi}^v(z, \omega, \mathbf{r}) = & -i \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp}^2 d\mathbf{k}_{\perp}}{ck_0} J_0(k_{\perp} r_{\perp}) \\
& \times \left\{ \left[\frac{2k_0}{D(\omega, \mathbf{k}_{\perp})} - 1 \right] \int_0^{\infty} dz' \exp(-k_0 z') j_z(z', \omega, \mathbf{k}_{\perp}) \exp(-k_0 z) \right. \\
& + \int_0^{\infty} dz' \exp[k_0(z - z')] j_z(z', \omega, \mathbf{k}_{\perp}) \\
& + \int_0^z dz' \exp[k_0(z' - z)] j_z(z', \omega, \mathbf{k}_{\perp}) + \frac{2k_0}{\varepsilon D(\omega, \mathbf{k}_{\perp})} \\
& \left. \times \int_{-\infty}^0 dz' \exp(kz') j_z(z', \omega, \mathbf{k}_{\perp}) \exp(-k_0 z) \right\}. \quad (7)
\end{aligned}$$

Данное выражение описывает электромагнитное поле, генерируемое током или полем движущегося заряда.

3. Выражения для токов

Рассмотрим токи, генерирующиеся на металлической поверхности тыльной стороны плоской мишени (граница мишень–вакуум) в результате воздействия коротких мощных лазерных импульсов на ее фронтальную поверхность. Они генерируются в пятне размером порядка размера пятна фокусировки лазерного излучения (обычно от нескольких до десятка микрометров), в котором вещество быстро ионизируется, превращаясь в плазму. Энергия лазерного импульса в основном переходит в энергию электронов, генерирующихся в направлении распространения лазерного пучка. Часть этих электронов с наибольшей энергией покидает мишень, а основная часть нагретых электронов, вылетая на расстояние порядка дебаевского радиуса, формирует поле разделения заряда, приводящее к разлету в вакуум плазмы, на фронте которой формируется тонкий (дебаевский) слой разделения заряда.

Обратимся к току, создаваемому сгустком наиболее быстрых электронов, преодолевших потенциальный барьер пристеночной плазмы. Сгусток таких электронов с концентрацией n_f , движущийся от поверхности мишени вдоль оси z со скоростью V_f , представим в виде однородного по z цилиндра длиной L . Считая, что распределение концентрации в радиальном направлении является гауссовым, пропорциональным $\exp(-r^2/R^2)$, где характерный размер R определяется размером пятна фокусировки лазерного импульса, запишем выражение для тока в виде

$$\begin{aligned}
j_z(z, \mathbf{r}_{\perp}, t) = & en_f V_f \Theta(t) \Theta(z - V_f t + L) \\
& \times \Theta(V_f t - z) \exp(-r_{\perp}^2/R^2), \quad (8)
\end{aligned}$$

где e – заряд электрона; $\Theta(x)$ – функция Хевисайда. Величина рассматриваемого тока определяется энергией (скоростью) быстрых электронов и их концентрацией n_f , которые можно связать с характеристиками падающего лазерного импульса. Для этого необходимо оценить эффективность нагрева мишени и найти величину запирающего потенциала. Для определения температуры T нагретых электронов будем использовать ее зависимость от интенсивности лазерного излучения I_0 в виде, задаваемом пондеромоторным потенциалом [13]:

$$T = mc^2 (\sqrt{1 + \eta a_0^2/2} - 1).$$

Здесь

$$a_0^2 = \frac{2I_0}{n_c mc^3} = 0.85 \sqrt{\frac{I_0}{10^{18} \lambda^2}};$$

m – масса электронов; n_c – критическая концентрация электронов; λ – длина волны лазерного излучения в микрометрах; η – коэффициент поглощения лазерного излучения; I_0 взято в Вт/см². Концентрация электронов может быть найдена из условия сохранения потока энергии. Так, приравнявая $n\langle\mathcal{E}\rangle v_h$ к ηI_0 , где $v_h = ca_0 \sqrt{\eta}/\sqrt{2} + \eta a_0^2$ – средняя скорость электронов, вычисляемая по их средней энергии $\langle\mathcal{E}\rangle$, которую определим как эффективную температуру T , получаем следующее выражение для концентрации нагретых электронов:

$$n = a_0 n_c \sqrt{\frac{\eta}{2}} \frac{\sqrt{1 + \eta a_0^2/2}}{\sqrt{1 + \eta a_0^2/2} - 1}. \quad (9)$$

Соотношение (9) будет использоваться в дальнейшем для оценки эффективности преобразования энергии лазерного импульса в энергию вторичного излучения.

Зная характеристики лазерно-нагретых электронов, можно найти характерную величину запирающего потенциала у границы мишени $e\Phi_{\min} = -2T \ln[R/(r_D \sqrt{2})]$, где $r_D = \sqrt{T/(4\pi e^2 n)}$ – дебаевский радиус горячих электронов, и оценить концентрацию быстрых электронов $n_f = n \times \exp(e\Phi_{\min}/T)$, способных преодолеть этот потенциал, в предположении максвелл-болцмановского распределения горячих электронов. Обычно концентрация n_f составляет доли процента от полной концентрации лазерно-нагретых электронов n .

Отметим, что задача о переходном излучении равномерно движущегося сгустка электронов решалась в разных постановках [14], в том числе применительно к лазерно-нагретым электронам [15, 16], однако вопрос о зависимости эффективности генерации электромагнитного излучения и ПЭВ от лазерных параметров детально не обсуждался.

Температура нагретых электронов и их плотность определяют эффективный ток, возникающий на фронте разлетающейся в вакуум плазмы за счет нарушения квазинейтральности [12]. Можно показать, что этот ток значителен только на дебаевском масштабе на фронте разлетающейся плазмы, где существует разделение заряда*. Скорость движения фронта плазмы V растет со временем сначала линейно,

$$V = 2c_s \ln(\tau + \sqrt{1 + \tau^2}), \quad (10)$$

а затем с логарифмической точностью выходит на постоянное значение в несколько ионно-звуковых скоростей $c_s = \sqrt{T/M}$. Здесь $\tau = \omega_{pl} t / \sqrt{2e} \equiv t/t_0$; $e = \exp(1)$; $\omega_{pl} = c_s/r_D$; M – масса ионов плазмы. При этом концентрация электронов на фронте уменьшается по закону [12]

$$n_c = \frac{n}{2.718(1 + \tau^2)}.$$

* Вообще говоря, существует еще ток внутри плазмы, связанный с волной разрежения. Однако, поскольку его излучение пренебрежимо мало, этот ток не представляет интереса для рассматриваемой задачи.

В соответствии с этим будем моделировать ток разлета следующим выражением:

$$j_z(z, r_{\perp}, t) = enc_s r_D \Theta(t) \exp(-\alpha t / \tau_0) [\delta(z - c_s t) \tau \Theta(\tau_0 - t) + \delta(z - 2c_s t + c_s \tau_0) \Theta(t - \tau_0)] \exp(-r_{\perp}^2 / R^2). \quad (11)$$

Здесь также предполагается гауссово распределение тока в поперечном направлении. Первое слагаемое в (11) описывает ускоренно движущийся до момента времени τ_0 сгусток электронов, а второе слагаемое отвечает равномерному движению в последующие, $t > \tau_0$, моменты времени. Постоянная α определяет скорость уменьшения концентрации электронов вследствие уменьшения разделения зарядов при разлете плазмы. В рассматриваемой модели характерные времена рассасывания заряда оказываются порядка τ_0 ($\alpha \approx 1$). Отметим, что такие же времена исчезновения тока характерны и при адиабатическом остывании электронов после окончания действия лазерного импульса [17].

4. Генерация объемного излучения в вакууме

Рассмотрим возбуждение объемных электромагнитных волн в волновой зоне (вдали от источника), распространяющихся от поверхности мишени с $|\epsilon| \gg 1$. Учитывая, что для объемных волн $k_0 = -i\sqrt{\omega^2/c^2 - k_{\perp}^2}$ и $0 < k_{\perp} < \omega/c$, перепишем соотношение (7) с учетом асимптотического разложения функции Бесселя для $k_{\perp} r \gg 1$ в виде

$$B_{\varphi}^w(z, \omega, \mathbf{r}) = \int_0^{\omega/c} \frac{k_{\perp}^2 dk_{\perp}}{2c |k_0|} \sqrt{\frac{2}{\pi k_{\perp} r_{\perp}}} \times \exp\left[i\left(k_{\perp} r_{\perp} + |k_0| z - \frac{\pi}{4}\right)\right] K(|k_0|, \mathbf{k}_{\perp}), \quad (12)$$

где

$$K(|k_0|, \mathbf{k}_{\perp}) = \int_0^{\infty} dz' \exp(i|k_0|z') j_z(z', \omega, \mathbf{k}_{\perp}) + \exp(2i|k_0|z) \int_z^{\infty} dz' \exp(-i|k_0|z') j_z(z', \omega, \mathbf{k}_{\perp}) + \int_0^z dz' \exp(-i|k_0|z) j_z(z', \omega, \mathbf{k}_{\perp}). \quad (13)$$

В (12) сохраняется только слагаемое в асимптотическом разложении функции Бесселя, отвечающее волне, уходящей от поверхности мишени в вакуум. При вычислении $K(|k_0|, \mathbf{k}_{\perp})$ учитываются только слагаемые, не зависящие явно от z . Используя метод перевала [18], получаем

$$B_{\varphi}^w(z, \omega, \mathbf{r}) = \frac{\omega r_{\perp}}{c^2 r} \frac{\exp(i\omega r/c)}{r} K\left(\frac{\omega z}{cr}, \frac{\omega r_{\perp}}{cr}\right). \quad (14)$$

Зная магнитное поле (14), определяем энергию, излучаемую в элемент телесного угла $d\omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ и в интервал частот $d\omega$:

$$dW^w(\omega, \theta) = \frac{cr^2}{4\pi^2} |B_{\varphi}^w|^2 d\omega d\omega. \quad (15)$$

Как известно, излучение наиболее эффективно, если частицы сгустка излучают когерентно, т.е. сконцентрированы на масштабе, много меньшем длины излучаемой волны. Если сгусток состоит из частиц с зарядом одного знака, то имеет место сложение амплитуд полей и плотность излучаемой энергии оказывается значительно больше суммы плотностей энергии излучений отдельных электронов [19]. Так, для равномерно движущегося сгустка электронов с распределенной плотностью, пересекающего поверхность мишени (для тока (8)), выражение для магнитного поля излучения имеет вид

$$B_{\varphi}^w(z, \omega, \mathbf{r}) = B_{\varphi}^{w0}(z, \omega, \mathbf{r}) F(\omega, \theta),$$

где

$$B_{\varphi}^{w0}(z, \omega, \mathbf{r}) = \frac{2iq_f V_f \sin\theta}{rc^2 [1 - (V_f^2/c^2) \cos^2\theta]} \exp\left(\frac{i\omega r}{c}\right). \quad (16)$$

Форм-фактор $F(\omega, \theta)$ определяет частотно-угловую зависимость поля излучения и представляет собой пространственно-временной фурье-образ плотности тока $j_z(z, \omega, \mathbf{k}_{\perp})$ (8), нормированный на произведение полного заряда сгустка $q_f = en_f L \pi R^2$ и его скорости V_f :

$$F = \frac{2V_f}{\omega L} \sin\left(\frac{\omega L}{2V_f}\right) \exp\left(i\frac{\omega L}{2V_f}\right) \exp\left(-\frac{R^2 \omega^2 \sin^2\theta}{4c^2}\right). \quad (17)$$

Для низкочастотных волн $L\omega/c \ll 1$ и $R\omega/c \ll 1$ и форм-фактор $F \approx 1$. Выражение для спектральной плотности энергии переходного объемного излучения, которое генерируется сгустком, пересекающим поверхность мишени, может быть записано в виде [14]

$$\frac{dW^{w0}(\omega, \theta)}{d\omega d\omega} = \frac{dW^{w0}}{d\omega d\omega} |F(\omega, \theta)|^2, \quad (18)$$

где $W^{w0}(\omega, \theta)$ – спектральная плотность энергии переходного излучения заряда $q_f = en_f L \pi R^2$ [14];

$$\frac{dW^{w0}}{d\omega d\omega} = \frac{q_f^2 V_f^2 \sin^2\theta}{\pi^2 c^3 [1 - (V_f^2/c^2) \cos^2\theta]^2}. \quad (19)$$

Проанализируем полученное выражение в релятивистском пределе, когда кинетическая энергия электронов \mathcal{E}_0 превышает энергию покоя: $\mathcal{E}_0 > mc^2$ (рис.1). В этом случае выражение для полной энергии, излучаемой в интервал частот $0 - \omega$, может быть записано в виде

$$W^w(\omega) = \frac{2q_f^2}{\pi L} \int_0^{\frac{\omega L}{2c}} dy \frac{\sin^2 y}{y^2} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathcal{E}_0^4 \sin^3 x dx}{(\mathcal{E}_0^2 \sin^2 x + m^2 c^4 \cos^2 x)^2} \exp\left(-\frac{2R^2 y^2}{L^2} \sin^2 x\right). \quad (20)$$

В низкочастотном пределе ($\omega \ll 2c/L$) получаем стандартное выражение для энергии переходного излучения ультрарелятивистского заряда, линейно растущей с частотой:

$$W^w(\omega) = \frac{q_f^2 \omega}{\pi c} \left[2 \ln\left(\frac{2\mathcal{E}_0}{mc^2}\right) - 1 \right]. \quad (21)$$

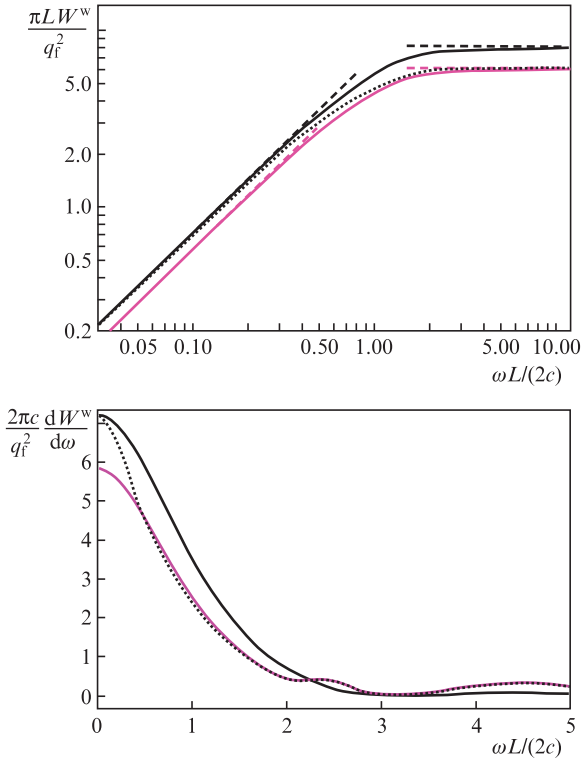


Рис.1. Энергия объемного излучения, генерируемого сгустком электронов (а), и соответствующие спектры излучения (б) в зависимости от частоты для $\mathcal{E}_0 = 30mc^2$, $R/L = 1$ (сплошная черная кривая), $\mathcal{E}_0 = 15mc^2$, $R/L = 1$ (сплошная серая кривая) и $\mathcal{E}_0 = 30mc^2$, $R/L = 2$ (пунктирная кривая). Штриховые линии отвечают предельным случаям $\omega \ll 2c/L$ и $\omega \gg 2c/L$.

В обратном пределе ($\omega \gg 2c/L$) имеем не зависящее от частоты, а определяемое параметрами пучка выражение, которое дает полную энергию переходного излучения (для всех частот):

$$W^w = \frac{2q_f^2}{\pi L} \int_0^\infty dy \frac{\sin^2 y}{y^2} \int_0^\infty \frac{x dx}{(1+x)^2} \exp\left(-\frac{2R^2 m^2 c^4 y^2}{\mathcal{E}_0^2 L^2} x\right). \quad (22)$$

Отметим, что при $\mathcal{E}_0 L/(mc^2 R) \gg 1$ двойной интеграл хорошо аппроксимируется следующим выражением:

$$W^w = \frac{q_f^2}{\pi L} \left[3 \ln\left(\frac{\mathcal{E}_0 L}{\sqrt{2} mc^2 R}\right) - 1 \right]. \quad (23)$$

В данном пределе максимальная частота (до которой частотный спектр излучения является практически постоянным и при превышении которой начинает спадать) определяется продольным размером пучка, т.е. длительностью лазерного импульса: $\omega_m \approx c/L$. Отметим слабую зависимость энергии излучения от размера пятна фокусировки лазерного импульса (поперечного размера электронного пучка).

Разлет плазмы в вакуум определяется скоростью звука, которая много меньше скорости света: $c_s \ll c$. Именно в таком нерелятивистском приближении вычислим магнитное поле объемного излучения для тока (11):

$$B_\phi^w(z, \omega, \mathbf{r}) = \frac{2iqc_s \sin \theta}{rc^2} \exp\left(i\frac{\omega r}{c}\right) G(\omega, \theta),$$

где

$$G(\omega, \theta) = \frac{i\omega\tau_0 [1 - \exp(-\alpha - i\omega\tau_0)]}{(\alpha + i\omega\tau_0)^2} \exp\left(-\frac{\omega^2 R^2 \sin^2 \theta}{4c^2}\right) \quad (24)$$

– форм-фактор, а полный заряд q определяется дебаевским радиусом горячих электронов: $q = enr_D \pi R^2$. Соответственно излучаемая энергия

$$\frac{dW^w}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2 c_s^2}{\pi^2 c^3} |G(\omega, \theta)|^2 \sin^2 \theta. \quad (25)$$

В пределе $\alpha = 0$ (движение без изменения плотности сгустка) форм-фактор (24) совпадает с результатом для форм-фактора (17) с $L/V_f = \tau_0$, полученным для переходного излучения цилиндра,

$$G(\omega, \theta) = \frac{2 \sin(\omega\tau_0/2)}{\omega\tau_0} \exp\left(-\frac{\omega^2 R^2 \sin^2 \theta}{4c^2} - \frac{i\omega\tau_0}{2}\right),$$

хотя излучение формируется при равномерном ускорении заряда до момента времени τ_0 , а не в момент пересечения им поверхности, как в случае равномерно движущегося заряда. В общем случае выражение для полной энергии, излучаемой в интервал частот $0 - \omega$ имеет вид

$$W^w(\omega) = \frac{q^2 c_s^2 \tau_0^2}{\pi R^3} \int_0^{\omega\tau_0} dx \frac{1 + \exp(-2\alpha) - 2 \exp(-\alpha) \cos x}{x(\alpha^2 + x^2)^2} \times \left[\sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{x^2 R^2}{c^2 \tau_0^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2 R^2}{2c^2 \tau_0^2}\right) \operatorname{Erf}\left(\frac{xR}{c\tau_0 \sqrt{2}}\right) - \frac{2xR}{c\tau_0} \right]. \quad (26)$$

В области малых частот ($\omega\tau_0 \ll 1$) поведение энергии (26) определяется величиной α :

$$W^w(\omega) = \frac{2q^2 c_s^2}{3\pi c^3 \tau_0} \left\{ \frac{\arctan(\omega\tau_0/\alpha)}{\alpha} - \frac{\omega\tau_0}{\alpha^2 + \omega^2 \tau_0^2} \right\} \times \left\{ [1 - \exp(-\alpha)]^2 - 3\alpha^2 \exp(-\alpha) \right\} + \frac{2\omega^3 \tau_0^3 \exp(-\alpha)}{\alpha^2 + \omega^2 \tau_0^2} \right\}.$$

При $\alpha \ll \omega\tau_0 \ll 1$ энергия линейно растет с частотой:

$$W^w(\omega) = \frac{4q^2 c_s^2 \omega}{3\pi c^3} (1 - \alpha),$$

в то время как при $\omega\tau_0 \ll \alpha$ она является кубической функцией частоты:

$$W^w(\omega) = \frac{4q^2 c_s^2 \omega^3 \tau_0^2}{9\pi c^3 \alpha^4} [1 - \exp(-\alpha)]^2.$$

В обратном предельном случае ($\omega\tau_0 \gg 1$) полная энергия определяется параметрами электронного тока. Максимально достижимая полная энергия отвечает $\alpha = 0$:

$$W^w = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{q^2 c_s^2}{4c^2 R} \quad \text{при } R \gg c\tau_0 \quad \text{и}$$

$$W^w = \frac{2q^2 c_s^2}{3c^3 \tau_0} \quad \text{при } R \ll c\tau_0.$$

Таким образом, изменение плотности заряда в разлетающейся плазме во времени приводит к нарушению когерентности излучения, что проявляется в значительном

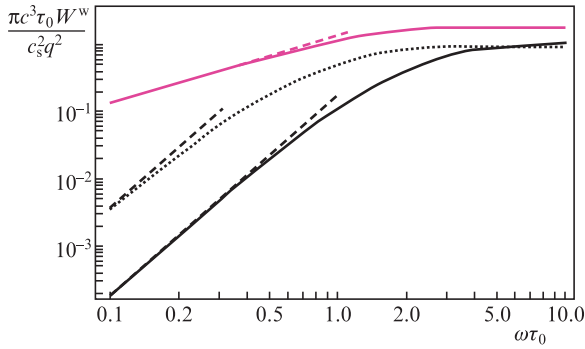


Рис.2. Энергия объемного излучения, генерируемого при разлете плазмы в вакуум, в зависимости от частоты для $\alpha = 1$, $R/(c\tau_0) = 0.1$ (сплошная черная кривая), $\alpha = 0$, $R/(c\tau_0) = 1$ (сплошная серая кривая) и $\alpha = 0.3$, $R/(c\tau_0) = 1$ (пунктирная кривая). Штриховые линии отвечают предельному случаю $\omega\tau_0 \ll 1$.

снижению энергии излучения (рис.2). Это особенно существенно для низких частот. В области $\omega \ll 1/\tau_0$ уменьшение частоты на порядок приводит к снижению энергии излучения на три порядка.

5. Возбуждение ПЭВ

Магнитное поле ПЭВ определяется выражением (7) и в волновой зоне с учетом асимптотического разложения функции Бесселя имеет вид

$$B_\varphi^v(z, \omega, r) = \frac{2\varepsilon^2 k_\parallel^s k_\perp^s}{c(\varepsilon^2 - 1)} \sqrt{\frac{2\pi}{k_\perp^s r_\perp}} \exp\left[i\left(k_\perp^s r_\perp - \frac{\pi}{4}\right) - k_\parallel^s z\right] \times \int_0^\infty dz' \exp(-k_\parallel^s z') j_z(z', \omega, k_\perp^s), \tag{27}$$

где $k_\perp^s = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon/(1+\varepsilon)}$; $k_\parallel^s = \omega/(c\sqrt{-1-\varepsilon})$ [20]. Поскольку основной вклад в энергию поверхностной волны дает поле в вакууме, можно оценить спектральную плотность энергии ПЭВ как ($|\varepsilon| \gg 1$)

$$\frac{dW^s}{d\omega} = \frac{r_\perp c}{2\pi} \int_0^\infty dz |B_\varphi^v(z)|^2 = \frac{2\omega |k_\parallel^s|^2}{c^2 \operatorname{Re} k_\parallel^s} \left| \int_0^\infty \exp(-k_\parallel^s z) j_z(z, \omega, \omega/c) dz \right|^2. \tag{28}$$

С использованием (28) в случае тока (8) выражение для излученной энергии ПЭВ принимает вид

$$\frac{dW^s}{d\omega} = \frac{dW^{s0}}{d\omega} |F(\omega, \pi/2)|^2,$$

где $W^{s0}(\omega)$ – спектральная плотность энергии поверхностной волны, генерируемой при пересечении поверхности зарядом q ;

$$\frac{dW^{s0}}{d\omega} = \frac{2q_f^2 V_f^2}{c^3 |\varepsilon|^{1/2} \cos[\arctan(\varepsilon''/\varepsilon')/2]}, \tag{29}$$

причем $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$.

Для тока, задаваемого выражением (11), получаем

$$\frac{dW^s}{d\omega} = \frac{dW^{s0}}{d\omega} |G(\omega, \pi/2)|^2,$$

где $W^{s0}(\omega)$ определяется выражением (29) с заменой V_f на c_s и q_f на q . Здесь частотная зависимость плотности энергии излучения определяется не только форм-фактором ($F(\omega)$ или $G(\omega)$), но и зависимостью от частоты диэлектрической проницаемости плазмы. Это приводит к тому, что для металлов ($\varepsilon \approx 4\pi\sigma/\omega$) полная энергия поверхностной волны, генерируемой пучком релятивистских электронов, в области низких частот ($\omega \ll 2c/L$) растет с частотой быстрее ($\propto \omega^{3/2}$), чем энергия переходного излучения ($\propto \omega$) (рис.3):

$$W^s(\omega) = \frac{2\sqrt{2} q_f^2 \omega^{3/2}}{3c\sqrt{\pi\sigma}}.$$

Отметим, что при этом энергия ПЭВ не зависит от энергии электронов пучка. В обратном пределе ($\omega \gg 2c/L$) полная энергия ПЭВ при $L \gg R$ может быть представлена в виде

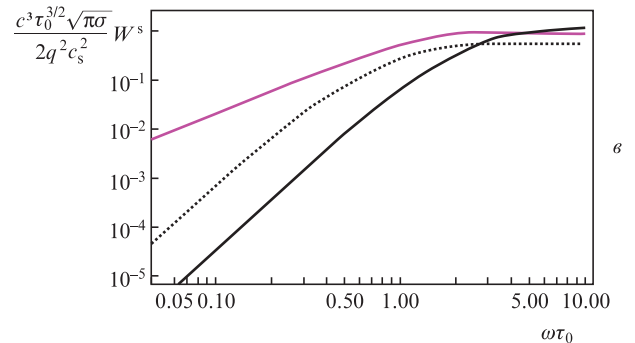
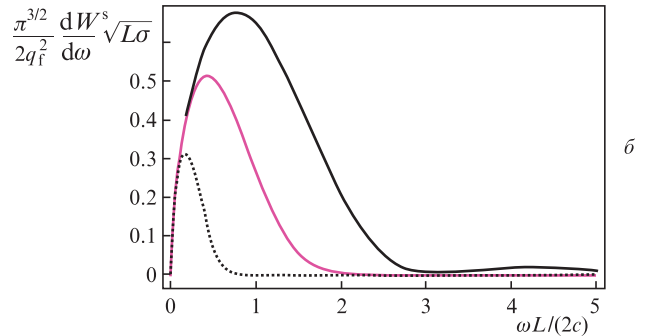
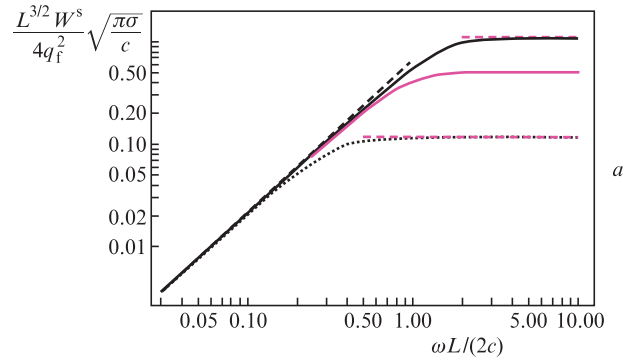


Рис.3. Зависимости от частоты энергии поверхностных волн, генерируемых сгустком электронов (а), и соответствующие спектры излучения (б) для $R/L = 3$ (сплошная черная кривая), 1 (сплошная серая кривая) и 3 (пунктирная кривая), а также зависимости от частоты энергии поверхностных волн, генерируемых при разлете плазмы в вакуум, для параметров, отвечающих рис.2 (в). Штриховые линии на рис.3,а соответствуют предельным случаям $\omega \ll 2c/L$ и $\omega \gg 2cL$.

$$W^s(\omega) = \frac{4q_f^2}{L} \sqrt{\frac{c}{\sigma L}}.$$

Как и в случае генерации объемных волн, максимальная частота определяется продольным размером пучка быстрых электронов (длительностью лазерного импульса): $\omega_m \approx c/L$.

Резкая зависимость от частоты для ПЭВ, генерируемых при разлете плазмы в вакуум, при $\omega < 1/\tau_0$ приводит к очень малой эффективности возбуждения низкочастотных поверхностных волн в результате действия рассматриваемого механизма (рис.3).

6. Обсуждение результатов

Оценим сначала полную энергию, излучаемую при ускорении малой части быстрых электронов, покидающих мишень. В релятивистском пределе, $a_0 \gg 1$, горячие электроны ускоряются в направлении распространения лазерного импульса, проходят сквозь мишень и вылетают с ее тыльной стороны. При этом электроны с наибольшей энергией, способные преодолеть потенциальный барьер, покидают мишень. Число таких быстрых электронов мало по сравнению с общим числом горячих электронов, однако они имеют релятивистские скорости, что значительно увеличивает энергию их излучения. Оценим полный заряд q_f быстрых электронов, покидающих мишень в предположении, что продольный размер пучка L определяется длительностью τ_L лазерного импульса ($L = c\tau_L$): $q_f = ea_0 n_c \lambda^2 c \tau_L \sqrt{\eta/(8\pi^2)}$. Считая, что характерная энергия быстрых электронов $\mathcal{E}_0 \approx -e\Phi_{\min} = 2T \ln[R/(r_D \sqrt{2})]$, энергия излучения определяется максимальной частотой ω_m следующим образом (см. формулу (21)):

$$W^w = \frac{m^2 c^4 a_0^2 \eta}{4\pi e^2} \omega_m c \tau_L^2 \left\{ \ln \left[4a_0 \sqrt{\frac{\eta}{2}} \ln \left(\frac{\pi \sqrt{2} R}{\lambda} \right) \right] - \frac{1}{2} \right\}.$$

Или, выражая энергию в джоулях, имеем

$$W^w \approx 2 \times 10^{-7} \left(\frac{\omega_m}{10^{12} \text{ c}^{-1}} \right) \left(\frac{\tau_L}{30} \right)^2 a_0^2 (1 + \ln a_0).$$

Для оценок здесь и ниже используется $\eta = 0.3$. Можно оценить эффективность преобразования энергии лазерного импульса $W_L = \pi R^2 \tau_L I_0$ в энергию вторичного переходного излучения в интервале частот до ω_m :

$$\frac{W^w}{W_L} = \frac{\eta}{2\pi^3} \omega_m \tau_L \frac{\lambda^2}{R^2} \left\{ \ln \left[4a_0 \sqrt{\frac{\eta}{2}} \ln \left(\frac{\pi \sqrt{2} R}{\lambda} \right) \right] - \frac{1}{2} \right\}.$$

Эта величина слабо зависит от интенсивности лазерного излучения и достигает максимума для остросфокусированных импульсов ($R \approx \lambda$):

$$\frac{W^w}{W_L} \approx 9 \times 10^{-6} \left(\frac{\omega_m}{10^{12} \text{ c}^{-1}} \right) \left(\frac{\tau_L}{30 \text{ фс}} \right)^2 \left(\frac{4\lambda}{R} \right)^2 (1 + \ln a_0).$$

Характерная максимальная частота переходного излучения определяется продольным или поперечным размером пучка быстрых электронов (см. формулы (22), (23)). Для релятивистских лазерных импульсов продольный размер лазерного импульса, определяемый его длительностью, больше его поперечного размера, что приводит к формированию пучка горячих электронов с $L > R$. В этом

случае максимальная частота не зависит от диаметра пятна фокусировки, а полностью определяется длительностью лазерного импульса: $\omega_m \approx 1/\tau_L$. Для коротких ($\tau_L \approx 30$ фс) остросфокусированных ($R \approx (2-10)\lambda$) лазерных импульсов эти характерные частоты составляют ~ 30 ТГц. Таким образом, до 30% энергии всего объемного излучения находится в ТГц области частот (до 10 ТГц). Например, для лазерного импульса с энергией 2 Дж ($R = 4\lambda$, $\tau_L = 30$ фс, $a_0 = 10$) энергия объемного излучения в ТГц области достигает 0.6 мДж, что соответствует конверсии $\sim 0.03\%$. Увеличение длительности импульса приводит к смещению спектра переходного излучения в область низких частот. Так, при длительности импульса $\tau_L > 100$ фс практически весь спектр объемного излучения будет лежать в ТГц области.

В случае разлета плазмы в вакуум полное число горячих электронов, участвующих в формировании разделения заряда, несколько больше числа быстрых электронов: $q = ea_0 n_c \sqrt{\eta/8} R^2 \lambda$, тогда как характерная скорость разлета (равная нескольким ионно-звуковым скоростям) много меньше скорости быстрых электронов:

$$\frac{c_s}{c} = \sqrt{\sqrt{\frac{\eta a_0^2}{2}} \frac{Zm}{M}} \ll 1,$$

где Z – заряд ионов. Ниже для оценок будем считать, что $Zm/M = m/(2m_p) \approx 0.00027$ (m_p – масса протона). Малость скорости разлета приводит к значительно более низкой (примерно на три-четыре порядка) полной энергии вторичного излучения по сравнению со случаем вылета пучка быстрых электронов. Практически, энергия излучения еще меньше из-за быстрого исчезновения поля разделения заряда (и токов) на характерном масштабе порядка дебаевской длины, которая для мощных лазерных импульсов оказывается порядка длины волны самого лазерного излучения. Кроме того, как показано выше, рассасывание заряда в процессе разлета ($\alpha = 1$) приводит к «разрезанию» низкочастотной области излучения. Можно оценить полную энергию для низкочастотного диапазона как

$$W^w(\omega) = 9.6 \times 10^{-3} \frac{\eta a_0^2 \omega_m^3 R^4 m^2 c}{e^2}.$$

Так, для рассматриваемого выше лазерного импульса энергия излучения в ТГц области составляет только 0.08 мкДж, а коэффициент конверсии

$$\frac{W^w}{W_L} = 1.95 \times 10^{-3} \eta \frac{\lambda^2 R^2 \omega_m^3}{c^4 \tau_L} \approx 4 \times 10^{-8}.$$

Таким образом, эффективность генерации вторичного излучения в результате разлета плазмы в вакуум всегда много меньше эффективности генерации излучения вследствие вылета пучков быстрых электронов. При этом стоит отметить различную угловую направленность генерируемого переходного излучения. Если пучок быстрых электронов обуславливает возникновение излучения, направленного вдоль оси пучка (практически по нормали к мишени или по направлению падения на мишень лазерного импульса), то излучение, связанное с разлетом плазмы в вакуум, направлено в основном вдоль поверхности мишени.

Эффективность генерации ПЭВ ниже эффективности генерации объемного излучения. Это связано как с боль-

шой диэлектрической проницаемостью металлов (плазмы), так и с ее дополнительной зависимостью от частоты. Последнее приводит к уменьшению в области низких частот энергии ПЭВ

$$W^s = \frac{m^2 c^4 a_0^2 \eta}{6e^2 \sqrt{2\pi\sigma}} \omega_m^{3/2} c \tau_L^2,$$

или

$$W^s \approx 1.6 \times 10^{-8} \left(\frac{\omega_m}{10^{13} \text{ с}^{-1}} \right)^{3/2} \left(\frac{\tau_L}{30 \text{ фс}} \right)^2 a_0^2.$$

Здесь для оценок использовалась характерная для металлов величина $\sigma \approx 10^{17} \text{ с}^{-1}$ и рассматривалась только ПЭВ, генерируемая релятивистским пучком электронов. Для приведенного выше примера энергия поверхностной волны в ТГц диапазоне частот составляет $\sim 1.7 \text{ мкДж}$, что соответствует конверсии порядка 10^{-6} . Возникающая вследствие вылета пучка быстрых электронов поверхностная волна содержит больше энергии, чем объемная волна, генерируемая при разлете плазмы в вакуум.

Отметим также, что при удалении от источника интенсивность поверхностных волн из-за геометрического фактора снижается медленнее, чем интенсивность объемных волн, и, значит, вдали от источника именно ПЭВ могут обуславливать экспериментально измеряемый эффект. Поэтому при регистрации ТГц излучения вдоль поверхности ограниченной мишени можно ожидать, что основной вклад в него дает излучение поверхностных волн, а не излучение, возникающее вследствие разлета плазмы в вакуум. Не исключено, что при определенном дизайне поверхности (например, используя полосы из диэлектрических материалов [21]) и/или способе фокусировки лазерно-генерируемой поверхностной волны можно добиться более существенной концентрации ее энергии и перейти к решению задачи о направленной ТГц антенне.

7. Заключение

Таким образом, в настоящей работе изложена теория генерации вторичных электромагнитных волн токами, возникающими в результате облучения мишени короткими мощными лазерными импульсами. В качестве источников рассмотрены как токи быстрых электронов, покидающих мишень, так и токи, возникающие вследствие нарушения квазинейтральности сгустка разлетающейся от поверхности мишени горячей плазмы. Показано, что эффективность генерации объемного и поверхностного излучений значительно больше при вылете из мишени лазерно-генерируемого пучка релятивистских электронов, чем в случае разлета плазмы в вакуум. Различие может достигать нескольких порядков, особенно в низкочастот-

ной (терагерцевой) области спектра. Получены простые выражения, связывающие энергию вторичного электромагнитного излучения с параметрами лазерного импульса.

Эффективность генерации поверхностных волн пучком быстрых электронов превышает эффективность генерации объемного переходного излучения при зарядово-нескомпенсированном разлете плазмы в вакуум. Учитывая более низкую расходимость поверхностных волн при их распространении от источника, нельзя исключить, что именно ПЭВ ответственны за наблюдаемое в экспериментах [5, 6] ТГц излучение, распространяющееся вдоль поверхности металлической мишени, которое, согласно нашим оценкам, превалирует над излучением дипольного поля разделения заряда при разлете плазмы.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 14-29-09244-ОФИМ, 15-02-03042-а и 16-02-00088-а.

1. Tonouchi M. *Nat. Photonics*, **1**, 97 (2007).
2. Wu Z., Fisher A.S., Goodfellow J., Fuchs M., Daranciang D., Hogan M., Loos H., Lindenberg A. *Rev. Sci. Instrum.*, **84**, 022701 (2013).
3. Nilson P.M., Solodov A.A., Myatt J.F., Theobald W., Jaanimagi P.A., Gao L., Stoeck C., Craxton R.S., Delettrez J.A., Yaakobi B., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **105**, 235001 (2010).
4. Sagisaka A., Daido H., Nashima S., Orimo S., Ogura K., Mori M., Yogo A., Ma J., Daito I., Pirozhkov A.S., et al. *Appl. Phys. B*, **90**, 373 (2008).
5. Gopal A., Herzer S., Schmidt A., Singh P., Reinhard A., Ziegler W., Brommel D., Karmakar A., Gibbon P., Dillner U., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **111**, 074802 (2013).
6. Gopal A., May T., Herzer S., Reinhard A., Minardi S., Schubert M., Dillner U., Pradarutti B., Polz J., Gaumnitz T., et al. *New J. Phys.*, **14**, 083012 (2012).
7. Li Y.T., Li C., Zhou M.L., Wang W.M., Du F., Ding W.J., Lin X.X., Liu F., Sheng Z.M., Peng X.Y., et al. *Appl. Phys. Lett.*, **100**, 254101 (2012).
8. Liao G., Li Y., Zhang Y., Liu H., Ge X., Yang S., Wei W., Yuan X., Deng Y., Zhu B., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 205003 (2016).
9. Бежанов С.Г., Урюпин С.А. *Квантовая электроника*, **43** (11), 1048 (2013).
10. Урюпин С.А., Фролов А.А. *Квантовая электроника*, **43** (12), 1132 (2013).
11. Миронов В.А., Оладышкин И.В., Фадеев Д.А. *Квантовая электроника*, **46** (8), 753 (2016).
12. Mora P. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 185002 (2003).
13. Wilks S.C., Kruer W.L., Tabak M., Langdon A.B. *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 1383 (1992).
14. Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. *Переходное излучение и переходное рассеяние (некоторые вопросы теории)* (М.: Наука, 1984).
15. Zheng J., Tanaka K.A., Miyakoshi T., Kitagawa Y., Kodama R., Kurahashi T., Yamanaka T. *Phys. Plasmas*, **10**, 2994 (2003).
16. Leemans W.P., van Tilborg J., Faure J., Geddes C.G.R., Toth Cs., Schroeder C.B., Esarey E., Fubiani G. *Phys. Plasmas*, **11**, 2899 (2004).
17. Ковалев В.Ф., Быченков В.Ю., Тихончук В.Т. *ЖЭТФ*, **122**, 264 (2002).
18. Федорюк М.В. *Метод перевала* (М.: Наука, 1977).
19. Цытович В.Н. *ЖТФ*, **31**, 766 (1961).
20. Эйрман В.Я. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **8**, 188 (1965).
21. Nam S.H., Taylor A.J., Efimov A. *Opt. Express*, **17** (25), 22890 (2009).