

Оценка пропускной способности линий связи с конечной нелинейной памятью

Е.Г.Шапиро, Д.А.Шапиро

Предложен метод вычисления пропускной способности канала с конечной памятью с точностью до квадрата параметра нелинейной памяти. Выполнено сравнение с регулярной гауссовой моделью, в которой керровская нелинейность рассматривается как дополнительный гауссов шум. Показано, что оценка с помощью регулярной гауссовой модели дает большее значение пропускной способности по сравнению с оценкой, полученной в модели с нелинейной памятью. При этом оптимальные мощности сигналов, обеспечивающие наибольшую взаимную информацию, получаются одинаковыми.

Ключевые слова: волоконно-оптические линии связи, пропускная способность, нелинейный шум, шенноновский предел.

1. Введение

Активное развитие волоконной оптики началось в 60-х годах прошлого столетия, однако проблема оценки пропускной способности оптических линий связи до сих пор остается открытой. Сложность задачи обусловлена влиянием нелинейности, которая неизбежно присутствует при распространении импульсов в волоконно-оптических системах. Одними из наиболее существенных факторов деградации оптического сигнала являются керровская нелинейность и шумы усиления сигнала. Керровская нелинейность не позволяет достичь произвольно большого отношения сигнал/шум, в отличие от случая линейного канала. Это обстоятельство часто называют «нелинейный шенноновский предел».

В статистической теории связи линия, в которой каждый символ выходной последовательности зависит не только от соответствующего сигнала на входе, но и от переданных входных и детектируемых выходных сигналов, называется каналом с памятью. Если вероятность детектирования зависит от $2L + 1$ символов, т. е. от самого сигнала, от L символов до него и L символов после, то говорят о канале с конечной памятью. Регулярный канал – это предельный случай при $L \rightarrow \infty$.

Подбирая оптимальное распределение входных символов, в принципе можно было бы уменьшить вероятность ошибки при распознавании сигнала на приемнике. Такой подбор алфавита позволил бы частично скомпенсировать межсимвольную интерференцию, или паттерн-эффект. Однако до настоящего времени вследствие высокой вычислительной сложности задачи методы расчета пропускной способности канала с памятью отсутствуют.

Е.Г.Шапиро, Д.А.Шапиро. Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Коптюга, 1; Новосибирский государственный университет, Россия, 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2; e-mail: elena.shap@gmail.com, shapiro@iae.nsk.su

Поступила в редакцию 30 сентября 2016 г., после доработки – 21 октября 2016 г.

В настоящей работе такой метод разработан и реализован в простейшей модели гауссова шума. Соседние биты считаются дополнительным случайным шумом. Нелинейность канала учитывается как условная вероятность: дисперсия распределения растет как куб средней мощности сигнала. Наиболее сильно на вероятность распознавания сигнала влияют два соседних бита, поэтому расчеты выполнены в приближении памяти длиной в три символа ($L = 1$).

В настоящей работе мы предложили оценку пропускной способности линии связи с конечной нелинейной памятью с точностью $O(\mu^2)$, где μ – параметр памяти. Также выполнено численное сравнение зависимостей пропускной способности канала с конечной памятью и канала с усредненным нелинейным шумом от мощности сигнала. Показано, что канал с усредненным нелинейным шумом имеет более высокую пропускную способность в области оптимальной мощности сигнала. При этом оптимальные мощности сигналов для обеих моделей одинаковы.

2. Регулярный канал с гауссовым шумом и канал с конечной памятью

Взаимная информация [1] дискретного инвариантного по времени канала с памятью задается формулой

$$I(X; Y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} I(X_1, \dots, X_N; Y_1, \dots, Y_N), \quad (1)$$

где (X_1, \dots, X_N) и (Y_1, \dots, Y_N) – входная и выходная последовательности символов соответственно. Для каждого номера i величина X_i является случайной величиной, принимающей значения из некоторого множества чисел, называемого входным алфавитом. Регистрируемые в конце линии связи значения также являются значениями случайной величины Y_i и называются выходным алфавитом.

В работах [2, 3] нелинейное взаимодействие, искажающее сигнал, рассматривается как гауссов шум, который кубически зависит от мощности сигнала. Математически это записывается следующим образом:

$$Y_k = X_k + Z_k, \quad Z_k = \tilde{Z}_k \sqrt{\sigma_{ASE}^2 + \mu P^3}. \quad (2)$$

Здесь X_k – символ, передаваемый во временном промежутке с номером k ; Y_k – значение, регистрируемое на приемнике; \tilde{Z}_k – случайная гауссова величина с нулевым средним значением и дисперсией, равной 1; σ_{ASE}^2 и μ – положительные константы; P – средняя мощность сигнала. Константа σ_{ASE}^2 соответствует шумам спонтанной эмиссии усилителей.

В работе [4] предложена модель гауссова канала с конечной памятью, в которой средняя мощность сигнала P в (2) заменяется эмпирической мощностью, т.е. усредненной мощностью символа X_k и $2L$ символов вокруг. Математически это задается формулой

$$Z_k = \tilde{Z}_k \sqrt{\sigma_{ASE}^2 + \mu \left(\frac{1}{2L+1} \sum_{i=k-L}^{k+L} |X_i|^2 \right)^3}. \quad (3)$$

Согласно теореме Шеннона, пропускная способность канала без памяти задается формулой

$$C = \sup I(X, Y), \quad (4)$$

где максимизация $I(X, Y)$ выполняется по всем распределениям p_X входного алфавита; при этом выполнено $\int |x|^2 p_X dx = P$.

Пропускная способность регулярного канала с гауссовым шумом (2) задается формулой

$$C = \log \left(1 + \frac{P}{\sigma_{ASE}^2 + \mu P^3} \right) \quad (5)$$

в случае комплексного канала и комплексного гауссова шума. Если гауссов шум в канале Z_k , а также величины X_k являются вещественными, то

$$C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{\sigma_{ASE}^2 + \mu P^3} \right) \quad (6)$$

и максимальная взаимная информация достигается на распределении

$$p_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi P}} \exp \left(-\frac{x^2}{2P} \right). \quad (7)$$

Функция \log в уравнениях (5), (6) обозначает логарифм по основанию 2.

Бесконечный входной и выходной алфавиты невозможно реализовать в численном расчете. Далее опишем, как перейти от непрерывного канала к дискретному. Вместо бесконечного вещественного алфавита $x \in (-\infty, \infty)$ рассмотрим конечный входной алфавит:

$$x_i = \Delta x (i - 1) - \frac{L_x}{2}, \quad (8)$$

где $i = 1, \dots, n$; $\Delta x = L_x / (n - 1)$; L_x – некоторый заданный отрезок. Положим $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = \infty$. Выходной алфавит зададим формулами

$$y_j = \Delta y (j - 1) - \frac{L_y}{2}. \quad (9)$$

Здесь $j = 1, \dots, m$; $\Delta y = L_y / (m - 1)$; $y_j \in [-L_y/2, L_y/2]$; $y_0 = -\infty$; $y_{m+1} = \infty$. Обозначим через q_i вероятность символа x_i . Если выбрать

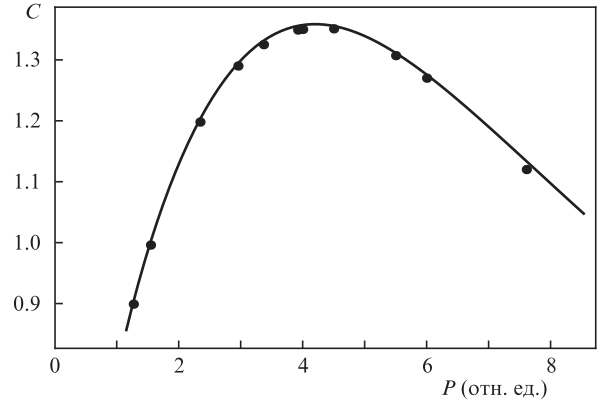


Рис.1. Зависимость пропускной способности от мощности сигнала для гауссова канала (сплошная кривая) и дискретного канала (точки).

$$q_i = \int_{\frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})}^{\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})} \frac{1}{\sqrt{2\pi P}} \exp \left(-\frac{\tau^2}{2P} \right) d\tau, \quad (10)$$

то в дискретном канале с вероятностным правилом

$$P(Y = y_j | X = x_i) = p_{ji} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \frac{y_j + y_{j+1} - 2x_i}{2\sqrt{\sigma_{ASE}^2 + \mu P^3}} - \operatorname{erf} \frac{y_j + y_{j-1} - 2x_i}{2\sqrt{\sigma_{ASE}^2 + \mu P^3}} \right) \quad (11)$$

взаимная информация практически совпадает с пропускной способностью непрерывного канала (6) при достаточно больших m, n, L_x, L_y . Здесь $\operatorname{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x e^{-t^2} dt$ – интеграл ошибок.

На рис.1 приведена зависимость пропускной способности непрерывного канала (6) от мощности сигнала P (сплошная кривая) и взаимная информация дискретного канала (10), (11) (точки) при $m = n = 51, L_x = L_y = 18, \sigma_{ASE}^2 = 1, \mu = 0.00675$. Видно, что эти зависимости весьма близки.

3. Нижняя граница пропускной способности

Прямое вычисление взаимной информации (1) является технически очень трудоемкой задачей, поэтому удобно использовать приближенную, но близкую оценку взаимной информации. Для оценки нижней границы мы воспользовались пропускной способностью следующего вспомогательного канала. Рассмотрим фиксированный битовый промежуток с номером k . Передаваемое в этом битовом интервале значение является случайной величиной, как и регистрируемое значение. Пусть q_i означает вероятность события $X_k = x_i$. В модели с конечной памятью (3) вероятность регистрации $Y_k = y_j$ зависит от ближайших L битов слева (X_{k-L}, \dots, X_{k-1}) и L битов справа (X_{k+1}, \dots, X_{k+L}). Далее $L = 1$.

Обозначим через $p_{ji}(x_i, x_r)$ вероятность события $Y_k = y_j, X_k = x_i, X_{k-1} = x_t, X_{k+1} = x_r$. Тогда условная вероятность Q_{ji} регистрации $Y_k = y_j$ при передаваемом значении $X_k = x_i$ задается формулой

$$Q_{ji} = \sum_{t,r} p_{ji}(x_i, x_r) q_t q_r. \quad (12)$$

Рассмотрим функцию

$$F(q_1, \dots, q_n) = \sum_{j,i} Q_{ji} q_i \log \frac{Q_{ji}}{\sum_r Q_{ji} q_r}, \quad (13)$$

задающую взаимную информацию во вспомогательном канале. Покажем, что взаимная информация вспомогательного канала с точностью $O(\mu^2)$ совпадает со взаимной информацией (1) канала с памятью (3).

Введем функцию $v(\mu)$, которая задается формулой

$$v(\mu) = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^K f_{ji}(\mu) Pr_i \log \frac{f_{ji}(\mu)}{\sum_{i'=1}^K f_{ji'}(\mu) Pr_{i'}}, \quad (14)$$

где $Pr_i \geq 0$; $\sum_i Pr_i = 1$; $f_{ji}(\mu)$ – положительные гладкие функции μ и выполнены равенства $\sum_{j=1}^J f_{ji}(\mu) = 1$ для всех i , таких, что $Pr_i > 0$. Тогда

$$\frac{dv(\mu)}{d\mu} = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^K \frac{df_{ji}(\mu)}{d\mu} Pr_i \log \frac{f_{ji}(\mu)}{\sum_{i'=1}^K f_{ji'}(\mu) Pr_{i'}}. \quad (15)$$

Для доказательства (15) мы воспользовались равенством

$$\sum_{j=1}^J \frac{df_{ji}(\mu)}{d\mu} = 0.$$

Далее покажем, что взаимную информацию (1) в случае конечных входного и выходного алфавитов можно представить в виде (14). Пусть $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$ и $\{y_j, j = 1, \dots, m\}$ – входной и выходной алфавиты соответственно. Всего имеется n^N различных входных последовательностей и m^N различных выходных последовательностей. Перенумеруем входные последовательности номерами $i = 1, \dots, K = n^N$, а выходные последовательности номерами $j = 1, \dots, J = m^N$. Обозначив через $f_{ji}(\mu)$ вероятность регистрации последовательности с номером j при исходной последовательности с номером i , получим искомое представление (14).

Рассмотрим функцию $V(N, \mu) = I(X_1, \dots, X_N; Y_1, \dots, Y_N)/N$. При $\mu = 0$ выполняется равенство $V(N, \mu, q_1, \dots, q_n) = F(q_1, \dots, q_n)$. Кроме того, воспользовавшись (15) и соотношением $\sum_{j=1}^m p_{ji}(x_i, x_i) = 1$, справедливым для любых фиксированных i, t, r , несложно получить при $\mu = 0, N \rightarrow \infty$ равенство $dV/d\mu = dF/d\mu$.

Далее используем разложение функций в ряд Тейлора и получим, что взаимная информация в канале с конечной памятью (3) с точностью $O(\mu^2)$ совпадает с $F(q_1, \dots, q_n)$. Заметим, что (13) формально можно рассматривать как вспомогательный дискретный канал без памяти. В [5] показано, что взаимная информация в канале (13) является нижней границей взаимной информации (1). Однако точность этой оценки в литературе не рассматривалась.

4. Численный эксперимент

Мы нашли зависимость пропускной способности вспомогательного канала (13) от мощности сигнала $P = \sum_i x_i^2 q_i$ для $\mu = 0.00675$ и 0.027 . Максимизация взаимной информации вспомогательного канала выполнялась по распределению входного алфавита, ее результаты приведены на рис.2. На рис.2,а приведена зависимость пропускной способности вспомогательного канала от мощности сигнала для $\mu = 0.00675$, на рис.2,б – эта же зависимость для $\mu = 0.027$. Остальные параметры следующие: $m = n = 41, L_x = L_y = 8, \sigma_{\text{ASE}}^2 = 1$. На обоих рисунках верхняя кривая является оценкой пропускной способности с помощью регулярного канала с гауссовым шумом (6), а нижняя кривая описывает пропускную способность вспо-

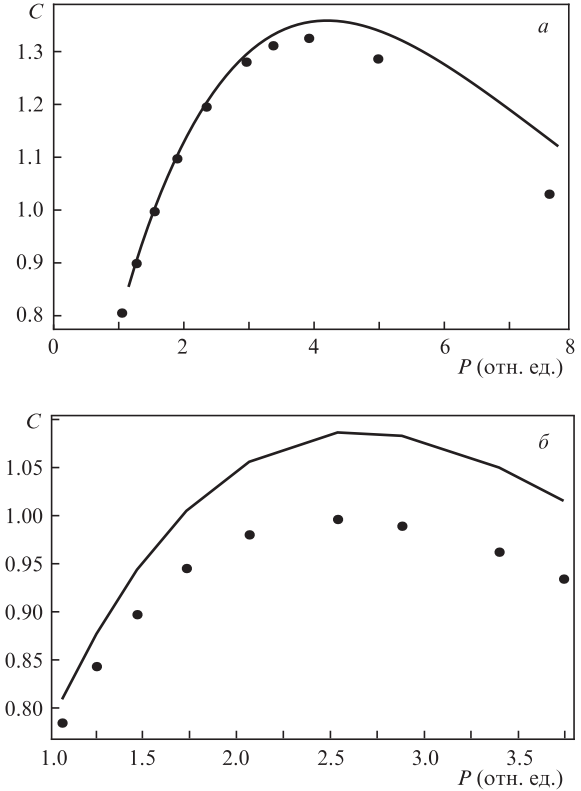


Рис.2. Зависимости пропускной способности от мощности сигнала для гауссова канала (сплошная кривая) и канала с памятью (точки) при $\mu = 0.00675$ (а) и 0.027 (б).

могательного канала. Заметим, что оптимальные значения мощности сигнала для обоих каналов одинаковы и на рис.2,а, и на рис.2,б. Однако при увеличении параметра памяти μ различие между оценками увеличивается.

Для модели с конечной памятью мы использовали релаксационную модификацию [6]. Метод нахождения оптимального распределения является обобщением метода Аримото [7] для канала с вероятностным правилом Q_{ji} , не зависящим от q_i , и заключается в выполнении трех шагов:

Нулевой шаг: выбираем начальный набор вероятностей $q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}$ и полагаем $k = 0$.

Шаг 1: по набору вероятностей $q_1^{(k)}, \dots, q_n^{(k)}$ вычисляем матрицу

$$W_{ij}^{(k)} = \frac{q_i^{(k)} Q_{ji}}{\sum_l Q_{jl} q_l^{(k)}}.$$

Шаг 2: находим новый набор вероятностей $q_1^{(k+1)}, \dots, q_n^{(k+1)}$, при котором достигается максимум

$$I(q_1, \dots, q_n, W^{(k)}) = \sum_{ji} Q_{ji} q_i \log \frac{W_{ij}^{(k)}}{q_i}.$$

Шаги 1, 2 повторяются до тех пор, пока $|q_i^{(k+1)} - q_i^{(k)}|$ не станет меньше некоторого заданного ϵ .

Сложность состоит в том, что Q_{ji} зависит от переменных q_1, \dots, q_n . Мы использовали итерационную процедуру [6] для нахождения $q_1^{(k+1)}, \dots, q_n^{(k+1)}$ на шаге 2. Обозначим

$$R(q_1, \dots, q_n) = I(q_1, \dots, q_n, W^{(k)}) - \lambda \left(\sum_i q_i - 1 \right), \quad (16)$$

где λ – множитель Лагранжа. Экстремум $R(q_1, \dots, q_n)$ задается системой уравнений

$$\frac{\partial R}{\partial q_l} = \sum_{j,i} \frac{\partial Q_{ji}}{\partial q_l} q_i \log \frac{W_{ij}^{(k)}}{q_i} + \sum_j Q_{jl} \log W_{lj}^{(k)} - \log q_l - 1 - \lambda, \quad (17)$$

где $\sum_l q_l = 1$; $l = 1, \dots, n$. Уравнения (17) можно переписать в виде $T_l = 0$, где

$$T_l = \exp \left(\sum_{j,i} \frac{\partial Q_{ji}}{\partial q_l} q_i \log \frac{W_{ij}^{(k)}}{q_i} + \sum_j Q_{jl} \log W_{lj}^{(k)} - 1 - \lambda \right) - q_l. \quad (18)$$

Заметим, что представление (18) обеспечивает неравенство $q_i \geq 0$. Для нахождения искомого неизвестных q_1, \dots, q_n введем дополнительный параметр τ . Полагая $q_l(\tau), \lambda(\tau)$ функциями от переменной τ , находим решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\tau} T_l(q_1(\tau), \dots, q_n(\tau)) = -T_l. \quad (19)$$

Решение системы уравнений (19) быстро сходится к решению системы (17). Найденные значения используем в качестве $q_1^{(k+1)}, \dots, q_n^{(k+1)}$. Дополнительное ограничение $\sum_i x_i^2 q_i = P$ только немного усложняет предложенный алгоритм.

5. Заключение

Таким образом, нами предложен метод вычисления пропускной способности линии связи с конечной нелинейной памятью с точностью $O(\mu^2)$, где μ – параметр памяти. С помощью этого метода выполнено сравнение пропускной способности канала с конечной нелинейной памятью и регулярного канала, в котором керровская нелинейность учтена как дополнительный гауссов шум. В

регулярной модели канала шум, искажающий сигнал, является гауссовым. В модели с конечной памятью (3) шум является смесью n^2 гауссовых шумов с различной дисперсией, и именно в этом заключается различие в рассматриваемых моделях. Показано совпадение оптимальной мощности сигнала для обоих методов оценки взаимной информации в линии связи. Однако оценка пропускной способности в модели канала с регулярным гауссовым шумом больше, чем оценка пропускной способности с помощью вспомогательного канала, учитывающего временное распределение передаваемого сигнала. С ростом параметра памяти различие в оценках информационной емкости канала с помощью предложенных моделей увеличивается.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10133). Е.Г.Шапиро благодарит Минобрнауки за поддержку (грант № 14.В25.31.0003). Работа Д.А.Шапиро поддержана грантом Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ РФ № НШ-6898.2016.2.

1. Shannon C. *Bell Syst. Techn. J.*, **27**, 379; **27**, 623 (1948).
2. Splett A., Kurtzke C., Petermann K., in *Proc. 19-th ECOC* (Montreux, Switzerland, 1993).
3. Poggiolini P., Carena A., Curri V., Bosco G., Forghieri F. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, **23**, 742 (2011).
4. Agrell E., Alvarado A., Durisi G., Karlsson G. *J. Lightwave Technol.*, **32**, 2862 (2014).
5. Essiambre R., Kramer G., Winzer P.J., Foschini G.J., Goebel B. *J. Lightwave Technol.*, **28**, 662 (2010).
6. Shapiro E.G., Shapiro D.A., Turitsyn S.K. *Opt. Express*, **23**, 15119 (2015).
7. Arimoto S. *IEEE Trans. Inf. Theory*, **18**, 14 (1972).