

НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

Особенности динамики ВРМБ в одномодовых световодах

А.А.Гордеев, В.Ф.Ефимков, И.Г.Зубарев, С.И.Михайлов, В.Б.Соболев

С использованием спектрального подхода, с помощью численного моделирования проведено исследование характеристик усиления стоксовых импульсов в одномодовых световодах при ВРМБ излучения монохроматической и немонахроматической накачки. Найдены условия, когда можно реализовать «медленный свет», обусловленный групповой задержкой (отметим, что «медленным светом» целесообразно называть процесс, при котором происходит задержка времени распространения импульса с сохранением его формы). Показано, что модель взаимодействия плоских волн адекватно описывает динамику этого процесса в одномодовых световодах. Исследован ряд режимов усиления стоксовых импульсов с различной временной структурой при монохроматическом и немонахроматическом возбуждении. Предложен способ передачи информации, основанный на эффекте трансформации скачкообразной фазовой модуляции входного стоксова сигнала в амплитудную модуляцию выходного сигнала.

Ключевые слова: одномодовый световод, ВРМБ, «медленный свет», соотношения Крамерса–Кронига.

1. Введение

В многочисленных работах, посвященных «медленному свету» при ВРМБ в одномодовых волоконных световодах (см., напр., [1–3]), широко используются известные соотношения Крамерса–Кронига, которые устанавливают однозначную связь между мнимой и действительной частями диэлектрической проницаемости активной среды. Если для монохроматических взаимодействующих волн в приближении заданного поля накачки данный подход не вызывает сомнений, то применение соотношений Крамерса–Кронига для немонахроматической накачки при вычислении коэффициента усиления при ВРМБ обычно обосновывается возможностью применения операции свертки спектра накачки с контуром линии рассеяния [3, 4]. Фактически авторы упомянутых выше работ воспользовались далеко не полной аналогией между процессами усиления в поле немонахроматической накачки при ВРМБ и усилением в среде с инверсией населенности и неоднородно уширенным контуром линии. Действительно, еще в конце 1960-х и в 1970-х гг. экспериментально и теоретически (см., напр., [5, 6]) была показана возможность реализации таких условий, при которых усиление стоксовой волны в поле немонахроматической широкополосной накачки ($\Delta\omega_p \gg 1/T_2$, где $\Delta\omega_p$ – ширина линии накачки, а T_2 – время жизни фононов) будет определяться не сверткой, а средней интенсивностью накачки. Отметим, что результаты этих работ были получены для ВКР, но

они полностью применимы и для ВРМБ ввиду одинаковости динамических уравнений для обоих процессов. Кроме того, высказывалось ошибочное мнение, что причина временной задержки связана исключительно с нестационарностью процесса ВРМБ [7]. Задержка стоксова импульса, связанная с нестационарностью ВРМБ, в частности, наблюдалась нами экспериментально и имела количественное теоретическое обоснование [8]. Ниже будут найдены условия, когда усиление стоксова сигнала определяется указанной выше сверткой при произвольных значениях $\Delta\omega_p$.

В настоящей работе также рассматривается влияние дифракционных потерь на затухание гипер акустических волн. Аналитически и численно исследованы режимы реализации «медленного света», генерации бриллюэновских солитонов и получены адекватные оценки времени выхода на стационарный режим рассеяния при ступенчатом включении накачки.

2. Анализ основных уравнений

Для анализа воспользуемся хорошо известными уравнениями для медленных амплитуд полей накачки, стоксова сигнала и акустических фононов в приближении взаимодействия плоских волн:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t}\right) a_s &= \frac{1}{2} g A_p(z, t) Q(z, t)^*, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t}\right) A_p &= -\frac{1}{2} g a_s(z, t) Q(z, t), \\ T_2 \frac{\partial Q(z, t)}{\partial t} + Q(z, t) &= A_p(z, t) a_s^*(z, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь z – продольная координата распространения; V – групповая скорость; t – время; g – коэффициент усиления при ВРМБ; a_s , A_p и Q – амплитуды стоксова сигнала, накачки и акустической волны соответственно.

А.А.Гордеев, В.Ф.Ефимков, С.И.Михайлов, В.Б.Соболев. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: efimkov@sci.lebedev.ru, filimon@narod.ru

И.Г.Зубарев. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; e-mail: zubarev@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 11 сентября 2015 г., после доработки – 21 декабря 2015 г.

Аналитическое рассмотрение проведем в приближении заданного поля накачки. Тогда правая часть уравнения для накачки в системе (1) равна нулю. Проведем стандартную замену переменных: $\theta = t + z/V$ – и будем искать решение системы (1), представив поля накачки и стоксова сигнала в виде разложений [9]

$$A_p = \sum A_{n0} \exp(i\Omega n\theta), \quad a_s = \sum a_m(z) \exp(i\Omega m\theta).$$

Здесь $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – номера частотных компонент взаимодействующих полей с граничными условиями при $z = 0$:

$$A_p(t) = \sum A_{n0} \exp(i\Omega nt), \quad a_s(t) = \sum a_m(0) \exp(i\Omega mt),$$

которые соответствуют применению дискретного преобразования Фурье к входным амплитудам на интервале периодичности $T = 2\pi/\Omega$. Очевидно, что можно выбрать достаточно большой интервал T , который полностью перекрывает все характерные времена, присущие рассматриваемой системе. Это, на наш взгляд, и подтверждает адекватность применяемой модели физической реальности.

Решение для Q представим в виде интеграла Дюамеля:

$$Q = \frac{1}{T_2} \int_0^\infty \exp(-\theta_1/T_2) A_p(\theta - \theta_1, z) a_s^*(\theta - \theta_1, z) d\theta_1.$$

Подставляя соответствующие разложения в выражение для Q , получаем

$$Q^* = \sum_{n,m} \exp[-i\Omega(n-m)\theta] A_n^* a_m \frac{1}{1 - i\Omega(n-m)T_2}.$$

Введем $k = m - n$. Тогда из первого уравнения системы (1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \sum_l a_l(z) \exp(i\Omega l\theta) + \frac{2}{V} \sum_l a_l(z) \exp(i\Omega l\theta) i\Omega l \\ = \frac{1}{2} g \sum_j A_j \exp(i\Omega j\theta) \sum_{n,k} \exp(i\Omega k\theta) A_n^* a_{n+k}(z) \frac{1}{1 + i\Omega k T_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Приравнявая в (2) члены с одинаковыми экспонентами и проводя замену переменных $a'_l = a_l \exp(i\Omega z 2l/V)$ (данная замена эквивалентна переходу к «бегущему» времени $\theta = t - z/V$ в координатном представлении (1)), получаем

$$\begin{aligned} \frac{da'_l}{dz} = \frac{1}{2} g \sum_k A_{l-k} \frac{1}{1 + i\Omega k T_2} \\ \times \sum_m A_m^* a'_{m+k} \exp[i\Omega(m-l+k)z(2/V)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) видно, что усиление каждой спектральной компоненты, a'_l , вообще говоря, зависит от наличия или отсутствия других спектральных компонент стоксова поля, а также от фазовых соотношений между компонентами стоксова поля и накачки. При $\Omega^{-1} \gg T_2$ систему (3) можно привести к подробно исследованной в [9] системе уравнений, модельно описывающей вынужденное рассеяние широкополосной накачки. Мы же рассматриваем случай произвольного соотношения между Ω^{-1} и T_2 . Оставим в системе (3) только брэгговские члены с индексами $(m-l+k) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{da'_p}{dz} \cong \frac{1}{2} g a'_p \sum_k \frac{|A_{p-k}|^2}{1 + i\Omega k T_2}, \\ p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Переходя в интегральной сумме (4) к непрерывному спектру, получаем (предельный переход от дискретного спектра к непрерывному ничем не отличается от использованного в [10]):

$$\frac{da'(\omega)}{dz} \cong \frac{1}{2} g a'(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A(\omega - \nu)|^2}{1 + i\nu T_2} d\nu. \quad (5)$$

Интеграл в (5) представляет из себя свертку лоренцевского контура усиления с контуром линии накачки. Здесь $a'(\omega)$ и $A(\omega)$ – соответствующие спектральные плотности амплитуд.

Отметим, что пренебрежение в (3) осциллирующими членами, очевидно, эквивалентно усреднению по продольной координате z в предположении большой длины взаимодействия ($L \gg L_{\text{coh}}$, где $L_{\text{coh}} = V(2\Delta\omega_p)^{-1}$ – длина когерентного взаимодействия) и малого усиления на длине когерентного взаимодействия ($gI_p L_{\text{coh}} \ll 1$, где I_p – интенсивность излучения накачки), что соответствует режиму некогерентного взаимодействия [9]. Непосредственно из (4) и (5) следует, что в этом режиме усиление каждой спектральной компоненты носит экспоненциальный характер и не зависит от других спектральных составляющих стоксова сигнала. Именно это обстоятельство позволяет интерпретировать процесс усиления стоксовой волны в терминах изменения показателя преломления и применять соотношения Крамерса – Кронига. На практике упомянутые выше условия обычно выполняются в достаточно длинных волоконных световодах, и только поэтому теоретические оценки [3, 4] оказываются адекватными эксперименту. Так, для двухмодовой накачки с межмодовым расстоянием $\sim 1/T_2$ при $T_2 \approx 10$ нс длина когерентного взаимодействия порядка одного метра. При $L > 200$ м условие малости усиления на когерентной длине заведомо выполняется даже для полного инкремента усиления ~ 20 , соответствующего порогу генерации стоксова излучения из спонтанных шумов. Тем не менее, точный знак равенства в системах (4) и (5) возможен только в предельном случае бесконечно большой длины взаимодействия, либо при монохроматической накачке и произвольной длине взаимодействия.

3. Структура волновых векторов в одномодовом цилиндрическом световоде

Хорошо известно, что поперечное распределение поля центральной моды низшего порядка цилиндрического световода описывается функцией Бесселя нулевого порядка $A(r) \propto J_0(\xi r)$, где ξ определяется из нулевого граничного условия $J_0(\xi r_0) = 0$, а r_0 – радиус сердцевины световода. Отметим, что подобное распределение имеет место при фокусировке плоской волны при помощи конической линзы, поэтому в каждой точке одномодового световода в пространстве волновых векторов будет иметь место картина, представленная на рис.1. Исходя из симметрии задачи видно, что любая пара волновых векторов накачки и стоксова сигнала в произвольном осевом сечении взаимодействует с одной и той же звуковой волной (с амплитудой Q), которая распространяется вдоль оси световода.

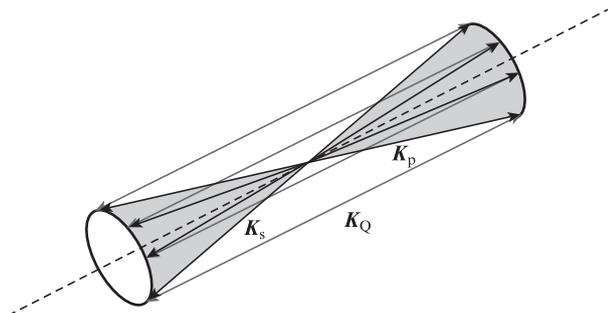


Рис.1. Коническая геометрия волновых векторов накачки и стоксова сигнала в одномодовом световоде: K_s – волновые векторы стоксова сигнала; K_p – волновые векторы накачки; K_Q – волновой вектор акустической волны; пунктиром обозначена ось световода.

Введем плотности амплитуды взаимодействующих волн: $A(\varphi) \propto \sqrt{I_p}/2\pi$ и $a(\varphi) \propto \sqrt{I_s}/2\pi$, где I_p и I_s – интенсивности накачки и стоксова сигнала, а φ – угол поворота в поперечном сечении световода относительно некоторого нулевого направления. Для монохроматических полей накачки и стоксова сигнала имеем

$$Q(1 - i\omega T) = \int_0^{2\pi} A(\varphi)a^*(\varphi)d\varphi,$$

$$\frac{da(\varphi)}{dz} = \frac{1}{2}gA(\varphi)Q^*,$$

$$\begin{aligned} \frac{dA(\varphi)}{dz} &= \frac{1}{2}gA(\varphi)\int_0^{2\pi} A(\varphi)a^*(\varphi)d\varphi \frac{1}{1 + i\omega T_2} \\ &= \frac{1}{2}g \frac{1}{1 + i\omega T_2} I_p a(\varphi). \end{aligned}$$

Тогда инкремент усиления $\bar{\Gamma} = 1/2 g I_p L (1 + i\omega T_2)^{-1}$.

Подобным образом можно получить уравнения типа (4), (5). В результате они оказываются аналогичными уравнениям для плоских волн. Таким образом, всеупотребительная модель плоских волн при теоретическом описании процессов в волоконных световодах [11, 12] оказывается адекватной экспериментальной ситуации. При этом легко показать, что бриллюэновский сдвиг будет отличаться от сдвига в случае рассеяния «точно назад», Ω_{MB} , в сторону уменьшения на величину порядка $\Delta = 1/2 \Omega_{MB} (NA/n_c)^2$, где NA – числовая апертура световода, а n_c – показатель преломления сердцевины. Считая $\Omega_{MB} \approx 10$ ГГц, для типичных значений $NA = 0.1-0.3$ получаем следующую оценку: $\Delta = 2-200$ МГц.

Конечно, взаимодействие любой другой пары волновых векторов накачки и стоксова сигнала приводит к возникновению неосевых компонент звуковой волны. Однако отсутствие пространственного резонанса делает их вклад в процесс усиления существенно меньшим, чем вклад осевой компоненты, и в первом приближении может не учитываться.

Оценим влияние дифракционных потерь на константу затухания гиперзвука. Для этого можно воспользоваться тем обстоятельством, что, как показано выше, в случае одномодового световода происходит генерация осевой компоненты гиперзвуковой волны. Поскольку длина волны гиперзвука $\lambda_{hyp} = \lambda_p/2$ (λ_p – длина волны накачки), то относительные амплитудные потери на френелевской длине можно оценить как $\lambda_p (nd_0^2)^{-1}$, где d_0 – диаметр сердцеви-

ны световода. Считая дифракционные потери и потери, связанные с поглощением гиперзвука, аддитивными, получим, что коэффициент затухания $\alpha = \alpha_0 + \lambda_p (nd_0^2)^{-1}$, где α_0 – коэффициент поглощения гиперзвука. Тогда обратное полное время затухания $1/\tau = 1/T_2 + V_{hyp}/l_{Fr}$. Здесь l_{Fr} – френелевская длина для звуковой волны, а V_{hyp} – скорость звука в активной среде.

4. Аналитические свойства выходного стоксова сигнала

Исходя из уравнений для спектральных компонент стоксова сигнала (4), (5) можно сделать ряд качественных заключений относительно особенностей временного поведения выходного стоксова сигнала для ряда спектров сигнала на входе в активную среду. Уравнения (4), (5) можно записать в виде

$$\frac{da(\omega)}{dz} = \frac{1}{2}g(\omega)a(\omega)\langle I_p \rangle, \tag{6}$$

где

$$\langle I_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |A_p(\omega)|^2 d\omega$$

– среднее значение интенсивности накачки, а $g(\omega)$ – эффективный коэффициент усиления. Наиболее просто выражение для $g(\omega)$ выглядит для случая лоренцевского контура спектра накачки, т. к. операция свертки двух лоренцевских контуров в выражении (5) опять приводит к лоренцевскому контуру со следующими параметрами:

$$g(\omega) = g \frac{\Delta\omega_L}{\Delta\omega_L + \Delta\omega_p} \frac{1}{1 + i\omega\tau}. \tag{7}$$

Здесь $\Delta\omega_L = 2/T_2$ – ширина линии бриллюэновского резонанса, а $\tau = 2/(\Delta\omega_L + \Delta\omega_p)$. Уравнение для спектральных компонент (6) легко интегрируется:

$$a(\omega, L) = a(\omega, 0) \exp\left[\frac{\Gamma/2}{1 + \omega^2\tau^2}\right] \exp\left[-i\omega\tau \frac{\Gamma/2}{1 + \omega^2\tau^2}\right], \tag{8}$$

где

$$\Gamma = g \frac{\Delta\omega_L}{\Delta\omega_L + \Delta\omega_p} \langle I_p \rangle L \tag{9}$$

– стационарный инкремент усиления.

Полученное выражение (8) позволяет делать определенные заключения относительно временного поведения выходного стоксова сигнала в зависимости от спектра входного. Так, при ширине спектра входного стоксова сигнала, меньшей полосы пропускания ВРМБ-среды, $\Delta\omega \propto (\sqrt{\Gamma}\tau)^{-1}$ и $\Gamma \gg 1$ фаза последнего сомножителя в (8) практически линейно зависит от частоты. Это означает, что при обратном преобразовании Фурье мы имеем выходной сигнал, воспроизводящий входной по форме со сдвигом по времени относительно значения L/V на величину «медленного света» $\sim \tau\Gamma/2$. Отсюда видно, что эффект «медленного света» связан с линейной модуляцией фазы в полосе контура усиления, а не с нестационарностью процесса рассеяния, как его неправильно интерпретируют в [7]. Это и позволяет объяснить появление временного сдвига в терминах изменения групповой скорости стоксова сигнала.

Далее допустим, что амплитуда входного сигнала $a(\omega)$ является четной функцией частоты, что обычно соответствует его колоколообразной временной форме, а ширина его спектра превышает полосу пропускания ВРМБ-среды. Тогда произведение первых двух множителей в (7) также является четной функцией. При $\Gamma \gg 1$ фаза, как и в случае «медленного света», линейно зависит от частоты, но, ввиду обрезания спектра сигнала по полосе пропускания, имеет место искажение временного поведения выходного импульса по сравнению с входным. Поэтому на выходе должен регистрироваться сигнал с искаженной формой, но его максимум интенсивности сдвинут по времени на ту же самую величину $\sim \tau\Gamma/2$. Интересно отметить, что случай с нечетной функцией $a(\omega)$ входного сигнала соответствует получению бриллюэновских солитонов, т.к. предусматривает скачкообразное изменение фазы входного сигнала на π [13]. Повторяя приведенные выше рассуждения, можно заключить, что ноль интенсивности выходного сигнала также будет задержан относительно нуля интенсивности входного сигнала на $\tau\Gamma/2 + L/V$.

5. Некоторые результаты компьютерного моделирования

К сожалению, в общем случае произвольного спектра накачки не удается получить простые аналитические выражения для $g(\omega)$. Поэтому для подтверждения правильности проделанных выше рассуждений было проведено компьютерное моделирование процесса ВРМБ-усиления для различных видов спектра накачки. При этом численно решалась система (1) в приближении заданного поля накачки с соответствующими начальными и граничными условиями. Длина области взаимодействия принималась равной 100 м, время жизни акустических фононов $T_2 = 8$ нс. Для получения амплитуд с лоренцевским и гауссовым спектром накачки использовалась функция вида: $f_n = \text{rnd}(1) \exp(2\pi i \cdot \text{rnd}(1))$, которая после преобразования Фурье, последующего пропускания через соответствующий виртуальный частотный фильтр и обратного преобразования Фурье служила в качестве модели стационарного случайного процесса с лоренцевским или гауссовым спектром. Здесь n – число шагов программы численного решения системы (1), в нашем случае $n = 6750$ на отрезке времени 125 нс, а $\text{rnd}(1)$ – функция, которая при каждом обращении к ней выдает квазислучайное число с равномерным распределением вероятности от 0 до 1.

Для проверки правильности расчета было проведено сравнение результатов численного моделирования в случае монохроматической накачки с аналогичными, полученными исходя из точной формулы [9]. Сравнение результатов показало полную адекватность численного моделирования в диапазоне изменения стационарного инкремента усиления от 0 до 35. Отметим, что декларируемое в [14, 15] время установления стационарного рассеяния $T_{\text{eqv}} = \Gamma\tau/2$ на самом деле является временем реакции системы на дельтообразный импульс входного сигнала при постоянной накачке и оно по крайней мере в два раза меньше, чем реальное время установления (рис.2 (см. также [8])). Отметим, что на всех рисунках входной стоксов импульс смещен на величину, равную времени пробега света по световоду L/V . На рис.3, 4 представлены результаты численных расчетов процесса усиления стоксова сигнала длительностью 20 нс с гауссовой формой входного импульса без сбоя фазы (рис.3) и со сбоем

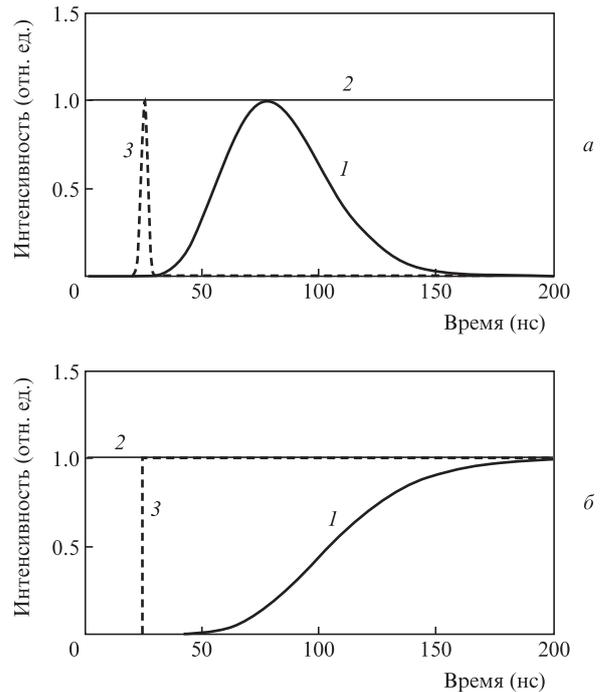


Рис.2. Реакция ВРМБ-усилителя на дельтообразный (а) и ступенчатый (б) входной стоксов импульс: выходной стоксов сигнал (1), накачка (2), входной стоксов сигнал (3). Стационарный инкремент усиления $\Gamma = 16$, $T_2 = 8$ нс.

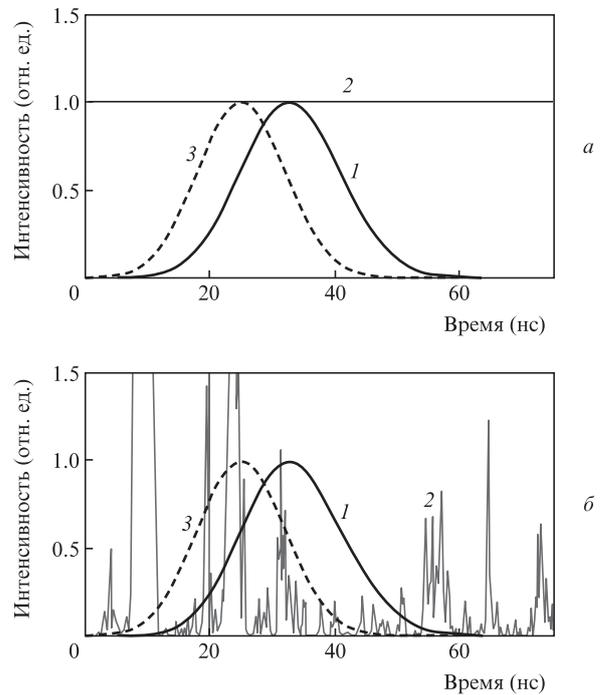


Рис.3. Усиление стоксова импульса гауссовой формы длительностью $\tau = 20$ нс в световоде длиной 100 м в случае монохроматической накачки при инкременте усиления $\Gamma = 8$, $T_2 = 2$ нс (а) и в случае накачки с лоренцевским спектральным контуром с шириной спектра $3\Delta\omega_L$ при $T_2 = 8$ нс и среднем инкременте усиления $\langle \Gamma \rangle = 32$ (б). Остальные обозначения те же, что и на рис.2.

фазы на π в центре входного импульса (рис.4), которые полностью подтверждают качественные заключения, сделанные в разд.4. А именно, в соответствии с соотношениями (7)–(9), для накачки с лоренцевским спектром шириной $\Delta\omega_p = 3\Delta\omega_L$ при $T_2 = 8$ нс имеем: $\Gamma = \frac{1}{4}g(I_p)L$ и

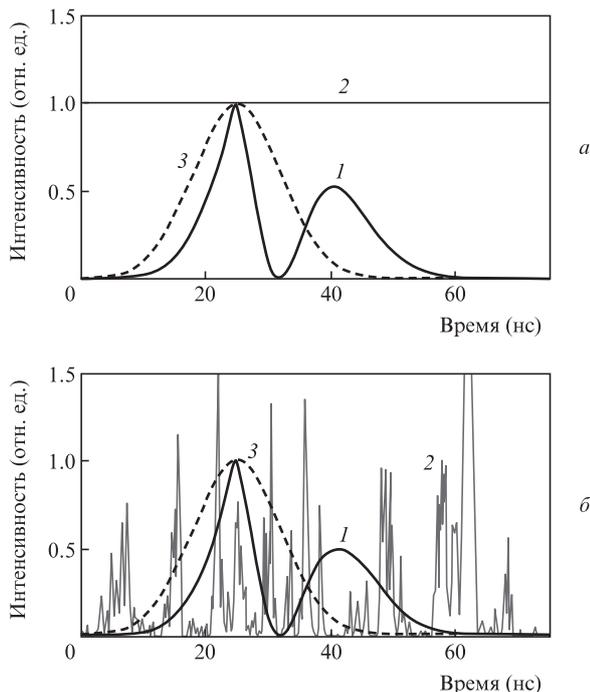


Рис.4. То же, что и на рис.3, но в случае сбоя фазы на π в максимуме входного стоксова импульса.

$\tau = 1/4 T_2$. Поэтому численные результаты для среднего инкремента усиления, равного 32, должны быть эквивалентны результатам для монохроматической накачки с инкрементом усиления $\Gamma = g I_p L = 8$ и $\tau = 2$ нс.

Для сравнения результатов использования немонахроматической накачки с разным спектральным составом, был проведен численный счет усиления в поле накачек с

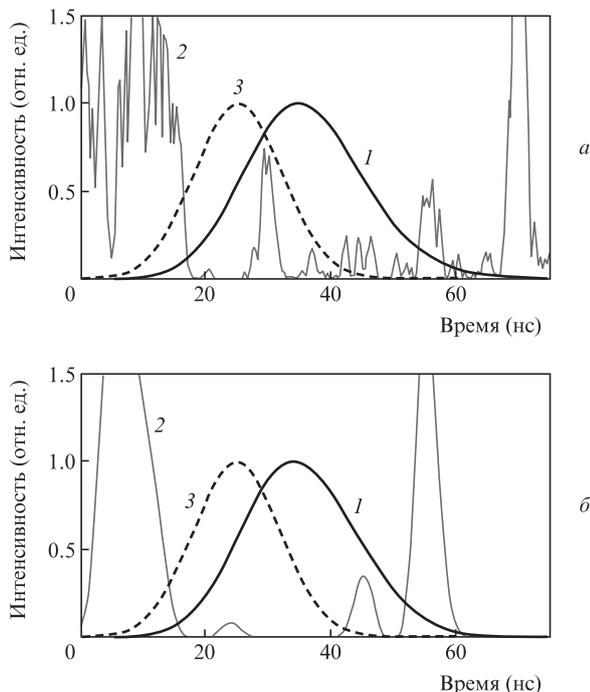


Рис.5. Сравнение временных характеристик ВРМБ-усилителя при накачке с лоренцевским (а) и гауссовым (б) спектральным контуром при одинаковых ширинах функций корреляции. Обозначения те же, что и на рис.2–4.

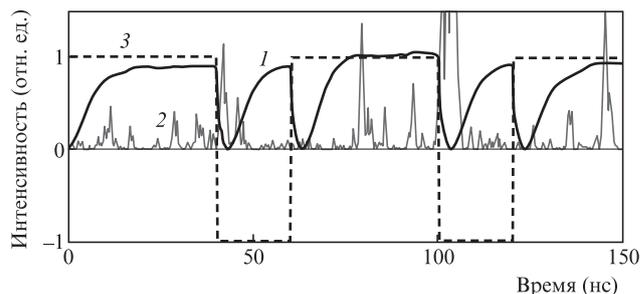


Рис.6. Преобразование модулированной скачками фазы на π амплитуды стоксова импульса в амплитудно модулированный сигнал в ВРМБ-усилителе. Обозначения те же, что и на рис.2–5.

лоренцевским и гауссовым спектрами. Надо отметить, что при одинаковой ширине гауссова и лоренцевского спектров накачки по полувысоте их функции корреляции имеют различную ширину, т. е. разную временную статистику. Установлено, что в данном случае критерием «схожести» является не одинаковость ширин спектра накачки, а равенство ширин функций корреляции (при одинаковой ширине спектра гауссов импульс является более «монохроматичным», чем лоренцевский, поскольку не имеет широких высокочастотных крыльев). На рис.5 представлены выходные стоксовы сигналы для лоренцевского и гауссова спектров накачки при одинаковой ширине функций корреляции по уровню e^{-1} . Аналогичные результаты были получены и при других значениях инкрементов усиления и ширинах спектра накачки. Интересно отметить, что усиление стоксова сигнала, модулированного скачками фазы на π , можно использовать для трансформации фазовой модуляции в амплитудную (рис.6), т. е. для детектирования информации.

6. Заключение

Проведенные исследования показали, что использование операции свертки спектра накачки с контуром ВРМБ для оценки эффективности и полосы усиления возможно при достаточно больших длинах активной ВРМБ-среды. При этом каждая спектральная компонента стоксова сигнала усиливается независимо от других. Это позволяет интерпретировать появление дополнительной задержки стоксова сигнала на выходе из активной среды в терминах изменения группового показателя преломления. Также показано, что для теоретического описания процесса можно использовать приближение взаимодействия плоских волн в динамических уравнениях для ВРМБ. Учет дифракции акустических волн является дополнительным механизмом затухания, что может приводить к уширению линии усиления на ВРМБ. Кроме того, показано, что модулированный скачками фазы стоксов сигнал с последующим детектированием в бриллюэновском усилителе можно использовать для передачи информации по одномодовым световодам.

1. Boyd R.W. *J. Opt. Soc. Am. B*, **28** (12), A38 (2011).
2. Gehring G.M., Boyd R.W., Gaeta A.L., Gauthier D.J., Willner A.E. *J. Lightwave Technol.*, **26** (23), 3752 (2008).
3. Zadok A., Eyal A., Tur M. *Appl. Opt.*, **50** (25), E38 (2011).
4. Denariez M., Brett G. *Phys. Rev.*, **171** (1), 160 (1968).
5. Бочаров В.В., Грасюк А.З., Зубарев И.Г., Муликов В.Ф. *ЖЭТФ*, **56** (2), 430 (1969).

6. Джотян Г.П., Дьяков Ю.Е., Зубарев И.Г., Миронов А.Б., Михайлов С.И. *ЖЭТФ*, **73**, 822 (1977).
7. Kovalev V.I., Kotova N.E., Harrison R.G. *Opt. Express*, **17** (20), 17317 (2009).
8. Beld'ugin I.M., Efimkov V.F., Zubarev I.G., Mikhailov S.I. *J. Russ. Laser Res.*, **26** (1), 1 (2005).
9. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (М.: Наука, 1981).
10. Дженкинс Г., Ватс Д. *Спектральный анализ и его приложения* (М.: «МИР», 1971, Вып.1, с. 41).
11. Zhu Z., Gauthier D.J., Okawachi Y., Sharping J.E., Gaeta A.L., Boyd R.W., Willner A.E. *J. Opt. Soc. Am. B*, **22** (11), 2378 (2005).
12. Fotiadi A.A., Kiyan R., Deparis O., Mégret P., Blondel M. *Opt. Lett.*, **27** (2), 83 (2002).
13. Бельдюгин И.М., Ерохин А.И., Ефимков В.Ф., Зубарев И.Г., Михайлов С.И. *Квантовая электроника*, **42** (12), 1087 (2012).
14. Зельдович Б.Я., Пилипецкий Н.Ф., Шкунов В.В. *Обращение волнового фронта* (М.: Наука, 1985, с. 49).
15. Беспалов В.И., Пасманик Г.А. *Нелинейная оптика и адаптивные лазерные системы* (М.: Наука, 1988, с. 23).