

# Генерация квантово-электродинамических каскадов при наклонном столкновении ультрарелятивистских электронов с интенсивным лазерным полем

А.А.Миронов, А.М.Федотов, **Н.Б.Нарожный**

*Проведено численное моделирование генерации квантово-электродинамических каскадов при наклонном столкновении пучка ультрарелятивистских электронов с полем двух встречных фокусированных циркулярно поляризованных лазерных импульсов. Показано, что, хотя эффект «коллапса и возрождения» каскада и наблюдается при любом значении угла столкновения, множественность каскада существенно зависит от этого угла и максимальна в конфигурации, в которой электронный пучок влетает в фокус перпендикулярно к оптической оси лазерных импульсов.*

**Ключевые слова:** квантово-электродинамический каскад, пучок ультрарелятивистских электронов, интенсивное лазерное излучение.

## 1. Введение

Начиная с первых предсказаний эффекта возникновения самоподдерживающихся квантово-электродинамических (КЭД) каскадов при взаимодействии интенсивного лазерного излучения с веществом [1–3], этот эффект активно обсуждается в связи с планируемыми экспериментами на лазерных установках следующего поколения, таких как ELI [4] и XCELS [5]. В основном изучались каскады, возникающие при помещении затравочного электрона в область сильного лазерного поля [1–3, 6–9], а также при облучении твердотельных мишеней интенсивными лазерными импульсами [10, 11] (см. также обзоры [12, 13]). По оценкам [3, 6], для инициирования самоподдерживающихся каскадов с помощью затравочного электрона требуется интенсивность лазерного излучения  $\sim 10^{24}$ – $10^{25}$  Вт/см<sup>2</sup>.

Поскольку максимальная интенсивность, достигнутая на данный момент в лабораторных условиях, составляет  $10^{22}$  Вт/см<sup>2</sup> [14], представляется важным поиск путей снижения пороговой интенсивности генерации каскадов. Так, она может быть понижена до  $10^{23}$ – $10^{24}$  Вт/см<sup>2</sup> при использовании многопучковой технологии и выбора специальной поляризации лазерных импульсов [15]. Практическая реализация многопучкового эксперимента сопряжена с рядом технических сложностей. Выбор оптимальной поляризации лазерных импульсов обсуждался и для более простых экспериментальных схем, в частности для поля двух встречных лазерных импульсов [16–18]. Во всех подобных схемах, как правило, явно или неявно предполагается возможность поместить затравочные электроны в центр фокальной области лазерного поля [1–3, 6, 15–18]. Однако на практике этому может поме-

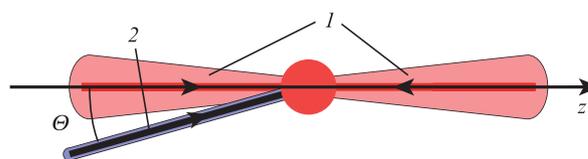


Рис.1. Схема инициации каскадов при наклонном столкновении двух встречных циркулярно поляризованных фокусированных лазерных импульсов (1) и налетающего под углом  $\Theta$  пучка электронов высокой энергии (2).

шать их выталкивание из фокуса пондеромоторными силами.

КЭД каскады возникают также при столкновении ультрарелятивистских электронов с лазерным полем\* [20, 21]. Однако в этом случае следует различать каскады «ливневого» типа, или S-типа, в которых вторичные частицы образуются за счет энергии затравочных частиц, от самоподдерживающихся каскадов «лавинового» типа, или A-типа, в которых каждое поколение вторичных частиц в среднем восполняет свою энергию при ускорении в поле, так что в итоге энергия для развития каскада черпается из поля [22]. В рассматриваемой схеме на первом этапе пучок электронов порождает S-каскад, однако если энергия начальных частиц исчерпывается до конца прохождения лазерных импульсов, то возникающие вторичные частицы на втором этапе запускают A-каскад\*\*. В работе [22] мы назвали такой двухступенчатый процесс эффектом «коллапса и возрождения» каскада. Подобная схема инжекции затравочных частиц представляется достаточно перспективной с точки зрения возможного воплощения в эксперименте.

Однако в работе [22] предполагалось, что электронный пучок инжектируется по оси встречных фокусиру-

А.А.Миронов, А.М.Федотов, Н.Б.Нарожный. Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; e-mail: am\_fedotov@mail.ru

Поступила в редакцию 5 февраля 2016 г.

\* Единичные события излучения жестких фотонов и рождения ими электрон-позитронных пар в лазерном поле наблюдались на SLAC в эксперименте E-144 [19].

\*\* По-видимому, на самом деле A-каскад запускается вторичными жесткими гамма-квантами, т. к. электроны не могут попасть в фокальную область из-за сильного радиационного трения [23].

ванных лазерных импульсов, что, по-видимому, сложно реализовать на практике. В настоящей работе исследуется тот же сценарий, однако в более общей ситуации, когда ось электронного пучка наклонена к оси встречных лазерных импульсов (рис.1), при этом основное внимание уделено зависимости динамики каскада от угла столкновения  $\Theta$ , а пучок электронов описывается ансамблем частиц с одинаковыми начальными параметрами.

## 2. Основные приближения

Как и в более ранних работах [3, 6, 22], будем рассматривать динамику каскадов во внешнем интенсивном лазерном поле в приближении локально постоянного поля. А именно, будем считать, что частота  $\omega$  лазерного поля, характеризуемого потенциалом  $A^v$ , соответствует оптическому диапазону (для определенности примем  $\hbar\omega = 1$  эВ), а пиковая напряженность поля  $E_0$  такова, что инвариантный параметр  $\xi = e\sqrt{-\langle A^v A_v \rangle} / mc \simeq eE_0 / mc\omega \gg 1$ , где усреднение выполняется по периоду поля;  $e$ ,  $m$  – абсолютная величина заряда и масса электрона. В таком случае характерная длина формирования излучения фотона электроном или рождения электрон-позитронной пары фотоном  $l_f \approx \lambda/\xi \ll \lambda$  будет мала по сравнению с характерным масштабом неоднородности поля, что дает возможность использовать для вероятностей этих процессов выражения, полученные для постоянного однородного поля. Более того, так как частицы в интенсивном поле (при  $\xi \gg 1$ ) ультрарелятивистские, то можно также считать, что частица локально находится в скрещенном ( $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ ,  $E = H$ ) электромагнитном поле [3].

Выражения для вероятностей процессов излучения и рождения пар в единицу времени в постоянном скрещенном поле известны [24, 25] и определяются значением инвариантного квантового динамического параметра  $\chi = e\hbar\sqrt{-(F_{\sigma\nu}p^\nu)^2} / m^3c^4$ , где  $F_{\sigma\nu}$  – тензор электромагнитного поля;  $p^\nu$  – 4-импульс начальной частицы (электрона или фотона). В случае  $\chi \geq 1$  элементарные процессы следует рассматривать в рамках квантовой электродинамики. Если же  $\chi \ll 1$ , то процесс излучения заряженными частицами можно описывать и в рамках классической электродинамики, при этом вероятность рождения пар экспоненциально подавлена:  $W_{cr} \propto \exp(-8/3\chi)$  [24]. Формирование каскадов возможно при таких параметрах лазерных импульсов, что для преобладающей доли частиц и фотонов  $\chi \geq 1$ , поэтому будем рассматривать все элементарные процессы в рамках квантовой электродинамики.

В настоящей работе рассматривается зарождение каскадов вблизи порогового значения интенсивности лазерного поля [3]  $I \sim 10^{24}$  Вт/см<sup>2</sup>  $\ll I_s$ , где  $I_s \approx 5 \times 10^{29}$  Вт/см<sup>2</sup> – интенсивность, соответствующая так называемой критической напряженности  $E_s = m^2c^3/e\hbar$ . С учетом того, что частицы в каскаде ультрарелятивистские, это дает возможность считать движение электронов между актами излучения фотонов с хорошей точностью квазиклассическим [26]. Поэтому примем, что между актами излучения электроны и позитроны движутся со скоростью  $v$  по классическим траекториям, определяемым из классического уравнения движения  $\dot{\mathbf{p}} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}/c)$ , при этом фотоны локализованы и движутся прямолинейно со скоростью света. Отметим, что в уравнениях движения не следует дополнительно учитывать силу радиационного трения, поскольку она учитывается автоматически отдачей при излучении фотонов [6].

## 3. Моделирование каскадов методом Монте-Карло

Для расчета динамики КЭД каскадов в лазерном поле произвольной конфигурации был разработан компьютерный код, основанный на методе Монте-Карло. В основу алгоритма заложено следующее: все частицы (электроны, позитроны и фотоны) считаются точечными и движущимися по классическим траекториям в лазерном поле, определяемым путем численного интегрирования классических уравнений движения; моменты времени, в которые происходят акты излучения или рождения пар, находятся с помощью метода Монте-Карло [7, 27].

В момент рождения каждого нового фотона, электрона или позитрона\*, для него определяется значение длины оптического пути  $n_f = -\ln\eta$  до момента первого распада ( $\eta$  – случайное число, распределенное равномерно на интервале (0, 1)), и инициализируется «текущее» значение длины оптического пути ( $n = 0$ ). Затем для этой частицы решаются уравнения движения на некоторой сетке по времени, и на каждом временном шаге  $t_i$  «текущая» оптическая глубина  $n$  увеличивается на  $W(t_i)\Delta t$ , где  $W(t_i)$  – полная вероятность соответствующего распада (излучения фотона электроном или рождения электрон-позитронной пары фотоном) в единицу времени, определяемая полями, взятыми на траектории частицы в момент времени  $t_i$ , а  $\Delta t$  – шаг сетки по времени. Момент квантового события (излучения фотона или рождения пары)  $t_f$  находится из уравнения  $n(t_f) = n_f$ . Энергия фотона (электрона) в процессе излучения (рождения пары фотоном) определяется с помощью известной плотности распределения вероятностей по энергиям [6, 24, 25] с использованием алгоритма выборки с отклонением. В рамках приближения ультрарелятивистских частиц считаем, что вторичные частицы испускаются вперед. При этом энергия второй испущенной частицы (электрона или позитрона) находится из закона сохранения для динамического квантового параметра  $\chi$  (см., напр., [6]). Заметим, что, в отличие от работы [6], рассматриваемый алгоритм полностью учитывает отдачу при излучении любых, в том числе «мягких», фотонов.

Отметим, что существенное значение имеет выбор метода решения классических уравнений движения для релятивистских частиц, поскольку, в силу экспоненциальной зависимости числа частиц от времени, даже небольшие погрешности при вычислении траекторий могут привести к существенным изменениям результатов моделирования. В разработанной нами программе используется алгоритм, представленный в работе [28]. Разработанная программа была протестирована и воспроизводит опубликованные ранее результаты [6, 29] (см. Приложение).

## 4. Динамика каскадов при столкновении электронного пучка с полем двух встречных лазерных импульсов

С помощью разработанной программы было проведено моделирование КЭД каскадов, генерируемых при наклонном столкновении моноэнергетического пучка

\* Электроны и позитроны после излучения фотона также считаются новыми.

электронов в плоскости  $xz$  с полем двух встречных циркулярно поляризованных фокусированных лазерных импульсов (см. рис.1). Цель моделирования состояла в изучении зависимости параметров каскада от угла наклона электронного пучка  $\Theta$  к оптической оси импульсов  $z$ . Параметры электронного пучка и лазерных импульсов совпадают с параметрами из работы [22], в которой рассматривался тот же процесс при  $\Theta = 0$ , позволяющими наблюдать процесс «коллапса и возрождения» каскадов: значение амплитуды суммарного поля двух лазерных импульсов  $E_0 = 3.2 \times 10^{-3} E_s$  (что соответствует пиковой интенсивности каждого из импульсов  $I \sim 10^{24}$  Вт/см<sup>2</sup>), длительность лазерных импульсов  $\tau_L = 10$  фс, начальная энергия пучка электронов  $\varepsilon_0 = 3$  ГэВ. Для описания полей в фокусированном циркулярно поляризованном лазерном импульсе использовалась модель, предложенная в работе [30] с параметром фокусировки  $\Delta = \lambda/2\pi R = 0.1$ , где  $R$  – радиус фокального пятна. Моделирование началось в момент времени  $t = -0.6\tau_L$ , в который лазерные импульсы и электронный пучок были расположены таким образом, чтобы они все в отсутствие взаимодействия встречались в начале координат при  $t = 0$ . Результаты моделирования при различных значениях  $\Theta$  представлены на рис.2–6.

При малых углах  $\Theta$  скорость роста числа пар в каскаде качественно не меняется по сравнению со случаем  $\Theta = 0$ , описанным в работе [22]. Так, при  $\Theta = \pi/8$  соответствующая кривая на рис.2,б по-прежнему имеет характерную двугорбую структуру, в которой первый пик соответствует каскаду S-типа, а второй – каскаду A-типа. Однако при дальнейшем росте угла  $\Theta$  зависимость скорости производства пар в каскаде от времени несколько усложняется тем, что при  $t < 0$  (когда еще преобладает каскад S-типа) появляются новые пики. Так происходит потому, что при наклонном падении электронного пучка поперечная к нему компонента поля на его траектории  $E_{\perp}(t, \mathbf{r}(t)) \sim \sqrt{E_x^2(t, \mathbf{r}(t)) \cos^2 \Theta + E_y^2(t, \mathbf{r}(t))}$ , определяющая

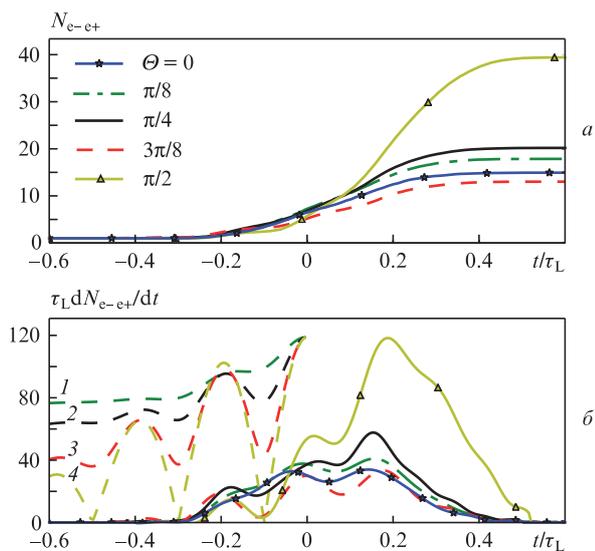


Рис.2. Зависимости числа электрон-позитронных пар  $N_{e+}$  в каскаде, нормированного на число электронов в электронном пучке (а), и скорости его роста  $dN_{e+}/dt$  (б) от нормированного времени при различных углах наклона электронного пучка  $\Theta$ . Тонкие штриховые линии – амплитуды поперечного поля (в отн. ед.) на траектории пучка электронов при  $t < 0$  для случаев  $\Theta = \pi/8$  (1),  $\pi/4$  (2),  $3\pi/8$  (3) и  $\pi/2$  (4).

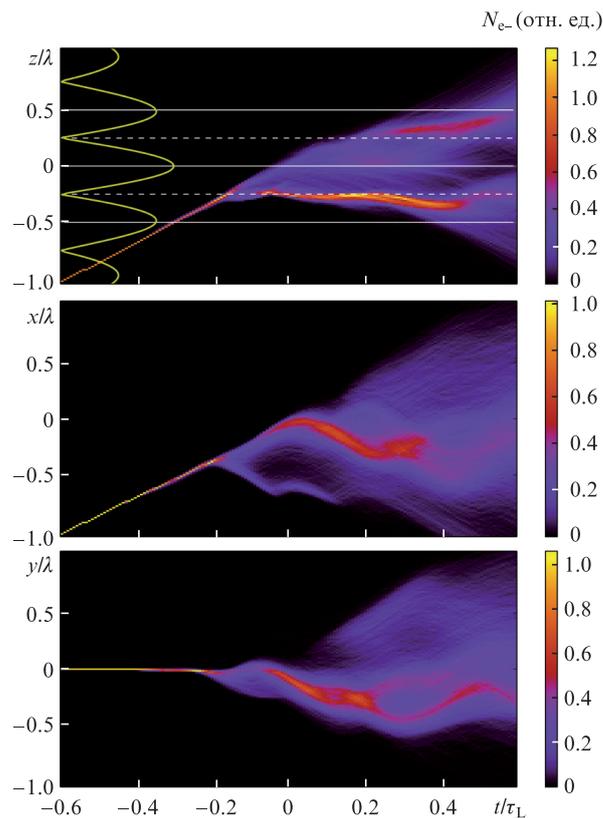


Рис.3. Эволюция пространственного распределения электронов вдоль координатных осей. Сверху слева показана зависимость абсолютной величины напряженности электрического поля (в отн. ед.) на оптической оси от координаты  $z$  в момент времени  $t = 0$ .

величину динамического квантового параметра для электронов пучка (а значит, и вероятности генерации вторичных частиц), пульсирует со временем (см. кривые 1–4 на рис.2). Видно, что интервалы возрастания и убывания  $dN_{e+}(t)/dt$  соответствуют возрастанию и убыванию амплитуды поперечного поля.

Рассмотрим подробнее динамику каскада на примере случая  $\Theta = \pi/4$ . На рис.3 представлена эволюция распределения электронов вдоль координатных осей. Видно, как на первом этапе электронный пучок движется прямолинейно, входя в область сильного поля, при этом средняя энергия электронов монотонно падает, параметр  $\chi$  колеблется, принимая достаточно большие значения (рис.4), а число частиц растет (см. рис.2), т. е. имеет место каскад S-типа. Затем, к моменту времени  $t \approx -0.2\tau_L$ , пучок теряет практически всю первоначальную энергию и каскад S-типа начинает «коллапсировать». При этом часть электронов отклоняется от первоначальной прямолинейной траектории движения. Наконец, при  $t \approx -0.1\tau_L$  вторичные частицы достигают области центральной пучности электрического поля. В этот момент начинается новый всплеск рождения электрон-позитронных пар, причем большинство частиц начинает двигаться в плоскости поляризации  $xu$ , т. е. включается механизм ускорения. На протяжении этой стадии средние значения параметра  $\chi$  и энергии частиц принимают значения, близкие к предсказываемым качественной теорией самоподдерживающихся каскадов [3, 6],

$$\chi_{\text{est}} \simeq \mu^{3/2} \simeq 0.3, \quad \varepsilon_{\text{est}} = mc^2 \mu^{3/4} \sqrt{\frac{mc^2}{\hbar \omega}} \simeq 0.2 \text{ ГэВ}, \quad (1)$$

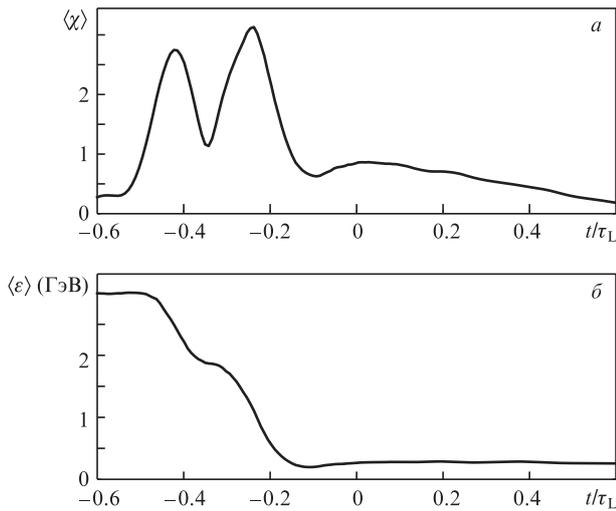


Рис.4. Зависимости среднего значения динамического квантового параметра (а) и среднего значения энергии (б) электронов в каскаде от времени для  $\Theta = \pi/4$ .

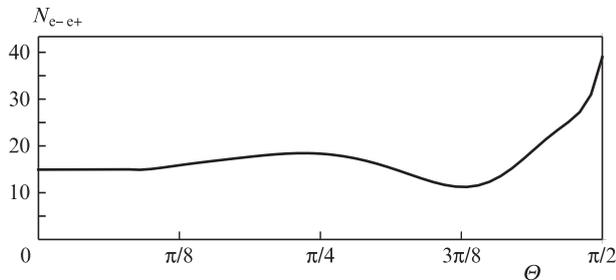


Рис.5. Полное число образовавшихся в каскаде пар, нормированное на число электронов в начальном пучке, в зависимости от угла падения налетающего пучка электронов  $\Theta$ .

где  $\mu = E_0/\alpha E_s$  – безразмерная напряженность поля, а  $\alpha$  – постоянная тонкой структуры. Таким образом, первые два пика скорости образования пар на рис.2 соответствуют каскаду S-типа, в то время как последний — каскаду A-типа. Этот каскад развивается до тех пор, пока лазерные импульсы не заканчиваются. Аналогичная картина наблюдается и при других значениях  $\Theta$ .

Интересно отметить, что в ходе развития каскада электроны и позитроны постепенно концентрируются вблизи плоскостей  $z \approx \pm \lambda/4$  узлов электрического поля (их положение показано пунктирными линиями сверху на рис.3). В этих областях оседают медленные частицы из каскада S-типа, туда же выталкиваются благодаря эффекту «нормального» радиационного захвата [31] частицы при развитии каскада A-типа. Зависимость полного числа  $N_{e-e^+}$  образующихся в каскаде пар от угла наклона  $\Theta$

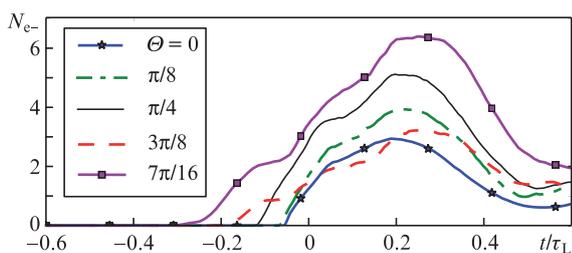


Рис.6. Зависимость числа электронов (нормированного на число электронов в начальном пучке) в области центральной пучности  $|z| < \lambda/8$  от времени при различных значениях  $\Theta$ .

представлена на рис.5. Видно, что оно существенно возрастает при  $\Theta$ , близких к  $\pi/2$ . При таких углах наклона электроны попадают в область центральной пучности электрического поля раньше (рис.6) и потому проводят в ней больше времени, что в силу экспоненциальной зависимости множественности каскада A-типа от времени [6] и приводит к росту полного числа пар при  $\Theta = \pi/2$ .

## 5. Заключение

Предложенная в [22] и развиваемая в настоящей работе схема, в которой КЭД каскады инициируются ультрарелятивистскими частицами, позволяет решить проблему преждевременного выталкивания затравочных частиц из фокуса лазерного поля. При этом динамика эффекта «коллапса и возрождения» каскадов (превращения каскада S-типа в каскад A-типа) выглядит значительно проще в случае малого угла наклона электронного пучка к оптической оси лазерных импульсов. Однако для повышения множественности самоподдерживающегося каскада предпочтительней геометрия с  $\Theta = \pi/2$ .

В настоящей работе пучок электронов описывался ансамблем частиц с одинаковыми начальными параметрами. Для повышения реалистичности выводов следовало бы учесть, что пучок электронов имеет конечную длительность, ширину и разброс по энергии. Это, однако, качественно не влияет на основной вывод работы.

При проведении расчетов были использованы ресурсы высокопроизводительного вычислительного центра НИЯУ МИФИ. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №16-02-00963а и №16-32-00863мол\_а) и при частичной поддержке фонда «Династия».

## Приложение. Тестирование программы для численного моделирования каскадов методом Монте-Карло

Для проверки разработанной программы был проведен ряд тестов. В первом из них моделировались каскады, инициированные быстрыми электронами с энергией  $\epsilon_0 = 2 \times 10^5 mc^2$  в поперечном постоянном однородном магнитном поле напряженностью  $H = 0.2 E_s$ . Результаты моделирования были сопоставлены с профилем каскада (зависимостью от времени числа электронов с энергией более  $10^{-3} \epsilon_0$ ), представленным в работе [29] (рис.7). Следуя ра-

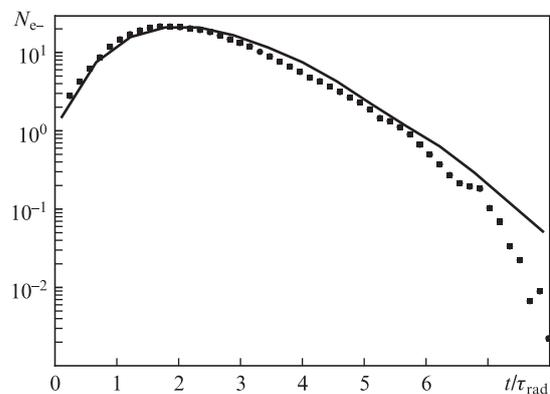


Рис.7. Профиль каскада, инициированного электроном с энергией  $\epsilon_0 = 2 \times 10^5 mc^2$  в магнитном поле с напряженностью  $H = 0.2 E_s$ : сплошная линия – результаты работы [29], точки – результат моделирования.

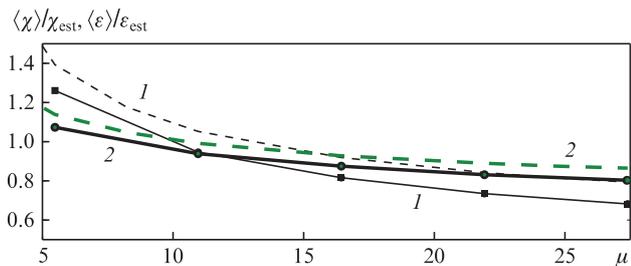


Рис.8. Средние параметры КЭД каскадов в однородном вращающемся электрическом поле:  $\langle \chi \rangle / \chi_{est}$  (1) и  $\langle \epsilon \rangle / \epsilon_{est}$  (2). Сплошные линии – результат моделирования, штриховые линии – результаты работы [6].

боте [6], мы ввели характерное радиационное время  $\tau_{rad} = 3.85(\gamma_{in}/\alpha\chi_{in}^{2/3})(\hbar/mc^2)$ , где  $\gamma_{in}$  и  $\chi_{in}$  – лоренц-фактор и динамический квантовый параметр начального электрона. Как видно из рис.7, результаты моделирования соответствуют ранее опубликованным данным.

Во втором тесте моделировались самоподдерживающиеся каскады во вращающемся однородном электрическом поле. Сравнение результатов расчетов зависимости среднего значения параметра  $\chi$  и средней энергии заряженных частиц от безразмерной напряженности поля  $\mu = E/\alpha E_s$  с данными работы [6] представлено на рис.8. Видно, что результаты моделирования согласуются с результатами работы [6] с погрешностью не хуже 15%. Различие результатов может объясняться тем, что, в отличие от работы [6], в нашей программе полностью учитывается эффект отдачи при излучении «мягких», заведомо не рождающих пар, фотонов с энергией  $\epsilon_\gamma < mc^2$ .

1. Bell A.R., Kirk J.G. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 200403 (2008).
2. Kirk J.G., Bell A.R., Arka I. *Plasma Phys. Control. Fusion*, **51**, 085008 (2009).
3. Fedotov A.M., Narozhny N.B., Mourou G., Korn G. *Phys. Rev. Lett.*, **105**, 080402 (2010).
4. Mourou G., Korn G., Sandner W., Collier J. K. (Eds) *ELI – Extreme Light Infrastructure Science and Technology with Ultra-Intense Lasers. Whitebook* (Berlin: THOSS Media GmbH, 2011).
5. <http://www.xcels.iapras.ru/>
6. Elkina N.V., Fedotov A.M., Kostyukov I.Yu., Legkov M.V., Narozhny N.B., Nerush E.N., Ruhl H. *Phys. Rev. Spec. Top. Accel Beams*, **14**, 054401 (2011).

7. Duclous R., Kirk J.G., Bell A.R. *Plasma Phys. Control. Fusion*, **53**, 015009 (2011).
8. Nerush E.N., Kostyukov I.Yu., Fedotov A.M., Narozhny N.B., Elkina N.V., Ruhl H. *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 035001 (2011).
9. King B., Elkina N., Ruhl H. *Phys. Rev. A*, **87**, 042117 (2013).
10. Ridgers C.P., Brady C.S., Duclous R., Kirk J.G., Bennett K., Arber T.D., Robinson A.P.L., Bell A.R. *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 165006 (2012).
11. Kirk J., Bell A., Ridgers C. *Plasma Phys. Control. Fusion*, **55**, 095016 (2013).
12. Di Piazza A., Müller C., Hatsagortsyan K.Z., Keitel C.H. *Rev. Mod. Phys.*, **84**, 1177 (2012).
13. Narozhny N.B., Fedotov A.M. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **223**, 1083 (2014).
14. Yanovsky V., Chvykov V., Kalinchenko G., et al. *Opt. Express*, **16**, 2109 (2008).
15. Gelfer E.G., Mironov A.A., Fedotov A.M., Bashmakov V.F., Nerush E.N., Kostyukov I.Yu., Narozhny N.B. *Phys. Rev. A*, **92**, 022113 (2015).
16. Bashmakov V.F., Nerush E.N., Kostyukov I.Yu., Fedotov A.M., Narozhny N.B. *Phys. Plasmas*, **21**, 013105 (2014).
17. Grismayer T., Vranic M., Martins J.L., Fonseca R.A., Silva L.O. arXiv:1511.07503 (2015).
18. Jirka M., Klimo O., Bulanov S., Esirkepov T.Z., Gelfer E., Bulanov S., Weber S., Korn G. arXiv:1511.04982 (2015).
19. Bula C. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 3116 (1996); Burke D.L., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 1626 (1997); Bamber C. et al. *Phys. Rev. D*, **60**, 092004 (1999).
20. Bulanov S.S., Schroeder C.B., Esarey E., Leemans W.P. *Phys. Rev. A*, **87**, 062110 (2013).
21. Sokolov I.V., Naumova N.M., Nees J.A., Mourou G.A. *Phys. Rev. Lett.*, **105**, 195005 (2010).
22. Mironov A.A., Narozhny N.B., Fedotov A.M. *Phys. Lett. A*, **378**, 3254 (2014).
23. Fedotov A.M., Elkina N.V., Gelfer E.G., Narozhny N.B., Ruhl H. *Phys. Rev. A*, **90**, 053847 (2014).
24. Никишов А.И., Ритус В.И. *ЖЭТФ*, **46**, 776 (1964); Никишов А.И., Ритус В.И. *ЖЭТФ*, **52**, 1707 (1967).
25. Baier V.N., Katkov V.M. *Phys. Lett. A*, **25**, 492 (1967).
26. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Квантовая электродинамика* (М.: Физматлит, 2002).
27. Agostinelli S. et al. *Nucl. Instr. Meth. A*, **506**, 250 (2003).
28. Vay J.-L. *Phys. Plasmas*, **15**, 056701 (2008).
29. Anguelov V., Vankov H. *J. Phys. G*, **25**, 1755 (1999).
30. Нарожный Н.Б., Фофанов М.С. *ЖЭТФ*, **117**, 867 (2000).
31. Gonoskov A., Bashinov A., Gonoskov I., Harvey C., Ilderton A., Kim A., Marklund M., Mourou G., Sergeev A. *Phys. Rev. Lett.*, **113**, 014801 (2014).