

# Квантово-механические расчеты остаточной плотности тока, возбуждаемой при ионизации газа интенсивным бихроматическим лазерным импульсом

Н.В.Введенский, А.А.Романов, А.А.Силаев

*На основе аналитического и численного решения трехмерного нестационарного уравнения Шредингера исследовано возбуждение остаточной плотности тока при ионизации газа бихроматическим лазерным импульсом, содержащим, помимо поля на основной частоте, добавочное поле на удвоенной частоте. Найдены зависимости остаточной плотности тока от сдвига фаз между компонентами поля и от интенсивности основной гармоники. Показано, что приближение сильного поля с учетом взаимодействия электронов с родительским ионом на стадии движения в континууме дает хорошее количественное согласие с результатами прямого численного моделирования.*

**Ключевые слова:** метод мнимого времени, бихроматический лазерный импульс, ионизация, плазма, остаточная плотность тока, терагерцевое излучение.

## 1. Введение

В настоящее время большой интерес вызывает возбуждение остаточной плотности тока (ОПТ) в плазме, образующейся при ионизации газов интенсивными фемтосекундными лазерными импульсами. ОПТ вызывает поляризацию плазмы и возбуждение колебаний, частоты которых при достаточной плотности плазмы лежат в терагерцевом диапазоне, что может приводить к генерации широкополосных импульсов терагерцевого излучения с достаточно высокой пиковой мощностью [1–12].

Рассматриваются несколько схем эффективного возбуждения ОПТ, основанных на ионизации газа. При использовании лазерных импульсов, содержащих много периодов поля, ОПТ возбуждается при добавлении небольшого по амплитуде поля на удвоенной или половинной частоте [1–5, 10]. В этом случае максимальная (по сдвигу фаз между компонентами поля) ОПТ является линейной или квадратичной функцией амплитуды добавочного поля в широком диапазоне интенсивностей его компонент. Кроме того, ОПТ может также эффективно возбуждаться при использовании предельно коротких (порядка периода поля) лазерных импульсов [2, 7, 8, 13–15] или пространственно асимметричной ионизируемой среды [16].

Для нахождения ОПТ, возбуждаемой при ионизации газа бихроматическим лазерным импульсом, ранее использовались аналитические [10, 17, 18] и численные [8, 19, 20] расчеты, основанные на полуклассических и квантово-механических подходах. Полуклассический подход опирается на решение уравнения гидродинамики для плотности электронного тока и уравнения для концентрации

свободных электронов, в котором используется квазианалитическая вероятность туннельной ионизации в единицу времени [7]. Квантово-механический подход основан на решении трехмерного нестационарного уравнения Шредингера для электронной волновой функции [13]. Диапазон применения полуклассического подхода ограничен параметрами лазерного импульса, соответствующими туннельному режиму ионизации, при которых параметр Келдыша  $\gamma = \sqrt{I_p}/(2U_p)$  [21] много меньше единицы (здесь  $I_p$  – потенциал ионизации атома,  $U_p$  – ponderomotorная энергия электрона в лазерном поле) [13–15]. При  $\gamma \geq 1$  отрыв электрона от иона происходит за времена порядка и больше периода поля, и для адекватного расчета ОПТ необходимо использовать квантово-механический подход.

Предыдущие работы, в которых проводились квантово-механические численные расчеты ОПТ, возбуждаемой при ионизации газа бихроматическим лазерным импульсом, были нацелены на отыскание оптимального сдвига фаз между несущими полями лазерного импульса [19, 20]. Кроме того, на основе приближенного решения нестационарного уравнения Шредингера находилось оптимальное соотношение между амплитудами гармоник без учета истощения основного состояния атомов [18]. Тем не менее такое истощение оказывает существенное влияние на величину ОПТ уже при умеренно малых значениях интенсивности, соответствующих порогу ионизации.

Целью настоящей работы является исследование зависимости эффективности возбуждения ОПТ от интенсивности основного поля бихроматического лазерного импульса при фиксированном отношении интенсивностей основного и добавочного полей. Для расчетов используется точное численное решение трехмерного нестационарного уравнения Шредингера, учитывающее истощение основного состояния атомов, а также полуклассический подход. На основе сравнения полученных результатов с приближенным полуаналитическим решением нестационарного уравнения Шредингера, основанно-

Н.В.Введенский, А.А.Романов, А.А.Силаев. Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, 603950 Н.Новгород, просп. Гагарина, 23; e-mail: vved@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 15 марта 2016 г.

го на методе мнимого времени [22], дается интерпретация различий результатов квантово-механических и полуклассических расчетов при параметре Келдыша  $\gamma \geq 1$ .

## 2. Постановка задачи

Пусть электрическое поле  $E$  ионизирующего бихроматического лазерного импульса линейно поляризовано вдоль оси  $z$ . Для равенства нулю интеграла по времени от электрического поля будем задавать  $E(t)$  через векторный потенциал

$$E(t) = -\frac{1}{c} \frac{dA}{dt}, \quad A(t) = -\hat{z} \frac{cE_0}{\omega_0} a(t), \quad (1)$$

$$a(t) = f(t) \left[ \sin(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{2} \sin(2\omega_0 t + \varphi) \right].$$

Здесь  $\hat{z}$  – единичный орт, направленный вдоль оси  $z$ ;  $E_0$  – максимальная амплитуда основного поля;  $\alpha$  – малое отношение амплитуд основного и добавочного полей;  $\omega_0$  – частота основного поля;  $\varphi$  – сдвиг фаз между несущими добавочного и основного полей;  $f(t)$  – огибающая импульса;  $c$  – скорость света в вакууме. Будем предполагать, что огибающая лазерного импульса имеет гауссову форму,

$$f(t) = \exp(-2 \ln 2 t^2 / \tau_p^2), \quad (2)$$

и длительность импульса  $\tau_p$  много больше периода поля.

Для того чтобы пренебречь столкновениями электронов с соседними атомами, будем считать концентрацию газа достаточно малой. Также не будем учитывать поляризационный отклик плазмы, полагая, что максимальная концентрация плазмы много меньше критической концентрации и плазменная частота много меньше обратной длительности лазерного импульса. Для простоты будем использовать атомные единицы, в которых  $|e| = \hbar = m = 1$ , где  $\hbar$  – приведенная постоянная Планка;  $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона.

Квантово-механический подход к расчету ОПТ основан на решении нестационарного уравнения Шредингера для волновой функции электрона  $\psi$ :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( -\frac{1}{2} \nabla^2 + U(r) + zE_z \right) \psi. \quad (3)$$

Здесь  $E_z$  – проекция напряженности электрического поля на ось  $z$ ;  $U(r)$  – потенциал взаимодействия с родительским ионом. Далее для простоты будем считать, что газ состоит из атомов водорода. В этом случае потенциал иона есть кулоновский потенциал,  $U(r) = -1/r$ . ОПТ, направленная вдоль оси  $z$ , находится как

$$j_{\text{RCD}} = -N_g \langle \psi_f | \hat{p}_z | \psi_i \rangle \Big|_{t \rightarrow \infty}, \quad (4)$$

где  $N_g$  – концентрация атомов газа;  $\hat{p}_z = -i(\partial/\partial z)$  – оператор импульса вдоль оси  $z$ ;  $\psi_f$  – волновая функция свободных электронов. Нестационарное уравнение Шредингера решается псевдоспектральным методом с использованием преобразования Ганкеля и быстрого преобразования Фурье по пространственным переменным согласно методу, описанному в работах [15, 23, 24].

Полуклассический подход основан на классическом уравнении для плотности электронного тока  $j(t)$ , направленной вдоль оси  $z$ ,

$$\frac{\partial j}{\partial t} = NE_z, \quad (5)$$

где концентрация свободных электронов  $N(t)$  находится из уравнения

$$\frac{\partial N}{\partial t} = (N_g - N) w(|E_z|). \quad (6)$$

Здесь  $w$  – вероятность ионизации в единицу времени, которая определяется из решения стационарного уравнения Шредингера для атома в постоянном электрическом поле и является функцией мгновенного значения напряженности электрического поля. В настоящей работе считается, что функция  $w(E)$  задается формулой, соответствующей процессу туннельной ионизации атома водорода [25]:

$$w(E) = (4/E) \exp(-2/(3E)). \quad (7)$$

Отметим, что область применимости этой формулы ограничена достаточно малыми интенсивностями лазерных импульсов, соответствующими режиму туннелирования, в котором верхняя граница потенциального барьера находится выше энергии основного состояния атома. Когда это условие не выполнено (в режиме надбарьерной ионизации), более адекватным является использование скорректированной туннельной формулы [26]. Использование формулы (7) связано с более удобным сопоставлением результатов полуклассического подхода и описанного ниже полуаналитического метода решения нестационарного уравнения Шредингера. При использовании этого метода усредненная по периоду поля вероятность ионизации в единицу времени при малом параметре Келдыша в точности согласуется с усредненной по времени формулой (7) [22, 27].

Остаточная плотность тока  $j_{\text{RCD}}$  находится как решение уравнения (5) при  $t \rightarrow \infty$ ,

$$j_{\text{RCD}} = \int_{-\infty}^{\infty} NE_z dt. \quad (8)$$

Далее будем нормировать ОПТ на максимально возможную осцилляторную плотность тока в поле основной гармоники  $j_{\text{osc}} = E_0 N_g / \omega_0$ . Полученная таким образом нормированная плотность тока

$$j_{\text{norm}} = j_{\text{RCD}} / j_{\text{osc}} \quad (9)$$

не зависит от  $N_g$ , и ее квадрат характеризует эффективность преобразования энергии лазерного импульса в энергию низкочастотного терагерцевого излучения [7].

## 3. Расчет остаточной плотности тока на основе метода мнимого времени

Высокая точность результатов, получаемых на основе численного решения нестационарного уравнения Шредингера, требует больших затрат компьютерного времени. Кроме того, полученные таким образом результаты часто не имеют ясной физической интерпретации. По-

этому большой интерес представляет разработка аналитических или полуаналитических методов нахождения ОПТ, основанных на приближенном решении нестационарного уравнения Шредингера. В данном разделе описан использованный для этой цели метод мнимого времени [22, 27].

Предположим, что длительность импульса настолько велика, что концентрация свободных электронов увеличивается на протяжении большого числа периодов электрического поля. Это позволяет представить ОПТ в виде интеграла:

$$j_{\text{RCD}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \bar{j}}{\partial t} dt, \tag{10}$$

где  $\partial \bar{j} / \partial t$  – производная от низкочастотной (усредненной по периоду поля) плотности тока  $\bar{j}$ . Величина

$$\frac{\partial \bar{j}}{\partial t} = -\bar{N}_n(t) \int p_z \bar{W}(\mathbf{p}, t) d^3 p, \tag{11}$$

где  $\bar{W}(\mathbf{p}, t)$  – усредненное по периоду поля импульсное распределение вероятности ионизации в единицу времени;  $\bar{N}_n(t)$  – усредненная концентрация нейтральных атомов. Эта величина в начальный момент времени равна концентрации газа  $N_g$  и удовлетворяет приближенному уравнению

$$\frac{\partial \bar{N}_n}{\partial t} = -\bar{N}_n(t) \int \bar{W}(\mathbf{p}, t) d^3 p. \tag{12}$$

Поскольку характерное время изменения  $\bar{W}(\mathbf{p}, t)$  много больше периода поля, для расчета  $\bar{W}(\mathbf{p}, t)$  можно считать, что электрическое поле имеет постоянную огибающую [17] и что истощение основного состояния атома за период поля лазерного импульса пренебрежимо мало. Последнее предположение справедливо даже при очень большой пиковой интенсивности, поскольку в этом случае истощение основного состояния атома происходит, главным образом, на переднем фронте лазерного импульса при значениях мгновенной интенсивности, близких к порогу пробоя. В рамках приближения сильного поля [21], в котором пренебрегается взаимодействием фотоэлектронов с родительским ионом,  $\bar{W}(\mathbf{p}, t)$  представляется в виде суммы вероятностей  $n$ -фотонных процессов:

$$\bar{W}(\mathbf{p}, t) = \frac{\omega_0}{2\pi} |L(\mathbf{p})|^2 \sum_{n=n^*}^{\infty} \delta\left(\frac{\Delta E}{\omega_0} - n\right). \tag{13}$$

Здесь  $n^* = \langle \tilde{I}_p / \omega_0 + 1 \rangle$  – минимально возможное число поглощенных фотонов (скобки обозначают целую часть);  $\tilde{I}_p = I_p + U_p$ ;  $U_p = U_{p0}(1 + \alpha^2/4)$  – пондеромоторная энергия электрона в бихроматическом лазерном поле;  $U_{p0} = E^2 / (4\omega_0^2)$  – пондеромоторная энергия электрона в поле основной гармоники;  $E_t(t) = E_0 f(t)$  – амплитуда электрического поля лазерного импульса;  $\Delta E = p^2/2 + \tilde{I}_p$  – энергия, затраченная на ионизацию и ускорение электрона.

Функция  $L(\mathbf{p})$  в формуле (13) описывает огибающую импульсного распределения вероятности ионизации в единицу времени. В предположении, что энергия фотона много меньше энергии ионизации (т.е.  $n_0 = I_p/\omega_0 \gg 1$ ), функция  $L(\mathbf{p})$  записывается как

$$L(\mathbf{p}) = (I_p/2)^{1/4} \sum_s [S^n(\mathbf{p}, t_s)]^{-1/2} \exp(iS(\mathbf{p}, t_s)). \tag{14}$$

Здесь

$$S(\mathbf{p}, t) = \int_0^t \left[ \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{A}(t')/c)^2}{2} + I_p \right] dt' \tag{15}$$

– часть действия свободного электрона, не зависящая от координат;  $t_s$  – стационарные точки  $S(\mathbf{p}, t)$ ;  $s$  – индекс, нумерующий стационарные точки. Величины  $t_s$  удовлетворяют уравнению

$$\partial S(\mathbf{p}, t) / \partial t |_{t_s} = 0 \tag{16}$$

и имеют положительную мнимую часть и реальную часть, лежащую в интервале  $[0, 2\pi/\omega_0]$ .

Приближение сильного поля не учитывает взаимодействия электрона с родительским ионом на стадии движения электрона в континууме. Это приводит к значительным отличиям величины и характера функции распределения фотоэлектронов по импульсам от результатов численного решения трехмерного уравнения Шредингера. Учет взаимодействия фотоэлектронов с родительским ионом можно провести на основе метода мнимого времени, используемого для коррекции действия и траекторий электронов в лазерном поле [28, 29]. Для этого выразим действие  $S$  через комплексные траектории электронов:

$$S(\mathbf{p}, t_s) = c_0 + \int_{t_s}^{t_{\text{max}}} \left( \frac{\mathbf{p}_s^2}{2} - \mathbf{E} \mathbf{r}_s - I_p \right) dt - (\mathbf{p}_s \mathbf{r}_s) \Big|_{t_s}^{t_{\text{max}}}, \tag{17}$$

где  $c_0$  – константа, не зависящая от  $s$ ;  $t_{\text{max}}$  – момент времени после прохождения импульса. Траектории  $\mathbf{r}_s$  соответствуют движению электронов под действием внешнего электрического поля лазерного импульса и удовлетворяют уравнениям Ньютона

$$\frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial t} = \mathbf{p}_s, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_s}{\partial t} = -\mathbf{E}(t) \tag{18}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{r}_s(t_s) = 0, \quad \mathbf{p}_s^2(t_s) = -2I_p, \tag{19}$$

которые определяют наиболее вероятные траектории, минимизирующие действие  $S$ . Учет взаимодействия электрона с родительским ионом приводит к дополнительному слагаемому

$$S_C = \int_{t_s}^{t_{\text{max}}} \frac{dt}{r_s(t)} \tag{20}$$

в действии и к коррекции уравнения для траектории движения электрона:

$$\frac{\partial \mathbf{p}_s}{\partial t} = -\mathbf{E}(t) - \frac{1}{r_s^3} \mathbf{r}_s. \tag{21}$$

Учет взаимодействия электрона с родительским ионом приводит к появлению дополнительного условия (которое автоматически выполняется для комплексных траекторий, не учитывающих кулоновское взаимодействие):

$$\mathbf{p}_s(t_{\text{max}}) = \mathbf{p}. \tag{22}$$

Решение уравнений (18) с начальными условиями (19) при  $t \rightarrow t_s$  соответствует  $r_s^2 \approx 2I_p(t - t_s)^2$ . Это приводит к тому, что поправка к действию (20) имеет логарифмическую расходимость. Регуляризация действия основана на следующей идее [27]. Когда электрон расположен вблизи ядра, его движение определяется, в основном, взаимодействием с родительским ионом, а не с лазерным полем. В этом случае действие электрона определяется асимптотической атомной волновой функцией на больших расстояниях от ядра. После процедуры регуляризации поправка к действию принимает вид

$$S_C = -i\nu \ln[2iI_p(t_{\max} - t_s)] + \int_{t_s}^{t_{\max}} \left( \frac{1}{r_s(t)} + \frac{i\nu}{t - t_s} \right) dt, \quad (23)$$

где  $\nu = 1/\sqrt{2I_p}$  – эффективное главное квантовое число. В результате с учетом поправок, связанных с взаимодействием электронов с родительским ионом,

$$L(\mathbf{p}) = (I_p/2)^{1/4} \sum_s [S''(t_s)]^{-1/2} \exp[iS(\mathbf{p}, t_s) + iS_C(\mathbf{p}, t_s)]. \quad (24)$$

Для поиска комплексных траекторий, удовлетворяющих (21) с условиями (19), (22), применяется итерационный подход [28]. На первом шаге берется пробный начальный импульс  $\mathbf{p}_{s0}$  и рассчитываются траектория электрона и его конечный импульс  $\mathbf{p}_s$ . На втором шаге пробный начальный импульс корректируется на основе сравнения полученного конечного импульса  $\mathbf{p}_s$  с требуемым значением импульса  $\mathbf{p}$ . Процедура повторяется до достижения высокой сходимости расчетов траекторий электронов.

### 4. Результаты расчетов

Величина ОПТ существенно зависит от таких параметров бихроматического лазерного импульса, как сдвиг фаз  $\varphi$  между составляющими импульса, их интенсивности и длина волны основного поля  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ . Разработанная в статье модель, основанная на методе мнимого времени, позволяет найти зависимости ОПТ от этих параметров. Полученные результаты показывают, что зависимость ОПТ от сдвига фаз  $\varphi$  близка к синусоидальной, т.е. обращается в ноль при некоторой неоптимальной фазе, и максимальна при оптимальной фазе  $\varphi_{\text{opt}}$ . ОПТ, отвечающая оптимальной фазе, линейно зависит от амплитуды добавочного поля в соответствии с результатами полуклассических расчетов [2, 30].

Обратимся теперь к исследованию зависимостей ОПТ от интенсивности основного поля  $I_0 = cE_0^2/(8\pi)$ . На рис. 1 показаны зависимости максимальной нормированной плотности тока  $j_{\max} = |j_{\text{norm}}(\varphi_{\text{opt}})|$ , отвечающей оптимальному сдвигу фаз  $\varphi_{\text{opt}}$ , от  $I_0$  при фиксированном отношении амплитуд добавочного и основного полей  $\alpha = 0.2$ .

Из рис. 1 видно, что при увеличении интенсивности  $j_{\max}$  резко возрастает, достигает максимума при интенсивности  $\sim 2 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup> и плавно спадает при больших интенсивностях по закону  $\propto I_0^{-1/2}$ . Максимальная нормированная ОПТ  $j_{\max}$ , соответствующая оптимальной интенсивности, слабо зависит от длины волны лазерного излучения и равна  $\sim 0.2$  как в квантово-механических, так и в полуклассических расчетах. В области больших интенсивностей, отвечающих режиму туннельной ионизации ( $\gamma \ll 1$ ), результаты полуклассических и квантово-механических расчетов хорошо согласуются друг с дру-

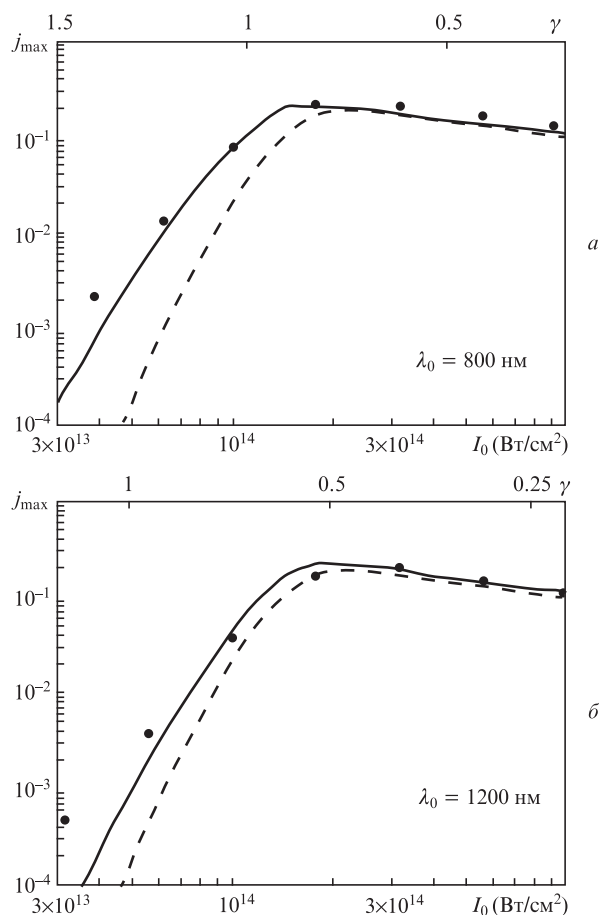


Рис. 1. Зависимости максимальной нормированной остаточной плотности тока  $j_{\max} = |j_{\text{norm}}(\varphi_{\text{opt}})|$ , отвечающей оптимальному сдвигу фаз  $\varphi_{\text{opt}}$ , от пиковой интенсивности  $I_0$  основной гармоники для длины волны основного поля  $\lambda_0 = 800$  нм (а) и 1200 нм (б) при длительности лазерного импульса  $\tau_p = 50$  фс и отношении амплитуд добавочного и основного полей  $\alpha = 0.2$ . Штриховые кривые – результаты полуклассического подхода, сплошные кривые – расчеты, основанные на методе мнимого времени, точки – численное решение нестационарного уравнения Шредингера.

гом. В то же время при  $\gamma \geq 1$  полуклассический подход сильно занижает величину  $j_{\max}$ .

Для объяснения различия в результатах полуклассических и квантово-механических расчетов при  $\gamma \geq 1$  обратимся к полуаналитическому решению нестационарного уравнения Шредингера на основе метода мнимого времени. На рис. 1 сплошной кривой показана функция  $j_{\max}(I_0)$ , найденная на основе данного метода. Видно, что эта кривая количественно совпадает с результатом прямого численного расчета во всем рассмотренном диапазоне значений параметра Келдыша  $\gamma$ . В режиме многофотонной ионизации ( $\gamma \gg 1$ ) зависимость  $j_{\max}(I_0)$  близка к степенной с показателем степени, увеличивающимся при увеличении длины волны лазерного импульса.

Степенная зависимость  $j_{\max}(I_0)$  в режиме многофотонной ионизации связана с соответствующей степенной зависимостью вероятности ионизации в единицу времени от интенсивности лазерного импульса. Это следует из рис. 2, на котором сплошной и пунктирной кривыми показаны зависимости усредненной по периоду поля вероятности ионизации в единицу времени  $\bar{w}$ , полученной на основе метода мнимого времени, от интенсивности  $I$  основного поля бихроматического лазерного импульса в

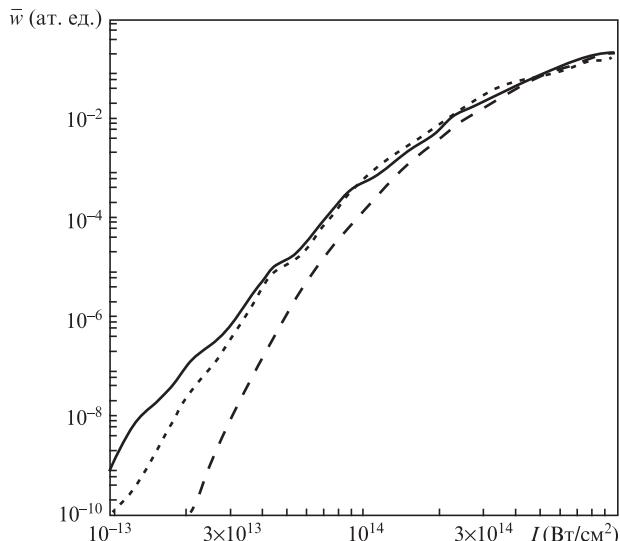


Рис.2. Зависимости усредненной по периоду поля вероятности  $\bar{w}$  ионизации в единицу времени от интенсивности  $I$  основного поля лазерного импульса при  $\alpha = 0.2$ . Штриховая кривая – усредненная туннельная формула (7), пунктир – расчет на основе метода мнимого времени для  $\lambda_0 = 800$  нм, сплошная кривая – то же для  $\lambda_0 = 1200$  нм.

предположении, что огибающая импульса постоянна. В расчетах задается отношение амплитуд добавочного и основного полей  $\alpha = 0.2$ , длина волны основного поля  $\lambda_0 = 800$  или  $1200$  нм. Сдвиг фаз  $\varphi$  задается таким образом, чтобы максимизировать абсолютное значение низкочастотной плотности тока. Видно, что кривые  $\bar{w}(I)$  для разных длин волн совпадают друг с другом в области туннельной ионизации и отличаются при  $\gamma \geq 1$ . В этой области кривые  $\bar{w}(I)$  близки к степенным функциям с показателем степени, увеличивающимся с ростом длины волны. Также на рис.2 штриховой кривой показана усредненная туннельная формула (7). Она совпадает с квантово-механическими расчетами лишь в узкой области, соответствующей малым значениям параметра Келдыша. В области  $\gamma \geq 1$  туннельная формула существенно занижает вероятность ионизации, в результате чего низкочастотная плотность тока, найденная на основе полуклассического подхода, занижена по сравнению с результатами квантово-механического расчета. Это видно из рис.3, на котором показаны зависимости максимальной по сдвигу фаз  $\varphi$  производной от низкочастотной плотности тока  $|\partial \bar{j} / \partial t|$  по времени от интенсивности  $I$ , рассчитанные на основе метода мнимого времени и полуклассического подхода при тех же параметрах лазерного импульса, что и на рис.2.

Остановимся теперь кратко на зависимости оптимального сдвига фаз, соответствующего максимуму ОПТ, от интенсивности лазерного импульса. Ранее эти зависимости были исследованы численно в работах [19, 20]. Было показано, что оптимальный сдвиг фаз  $\varphi_{opt}$ , полученный на основе полуклассического подхода, приблизительно равен  $\pi/2$  независимо от интенсивности основной гармоники. В то же время величина  $\varphi_{opt}$ , найденная на основе численного решения нестационарного уравнения Шредингера, увеличивается при уменьшении амплитуды лазерного импульса и стремится к постоянным значениям, близким к  $\pi$  и  $\pi/2$  при малых и больших интенсивностях соответственно. Это также подтверждает

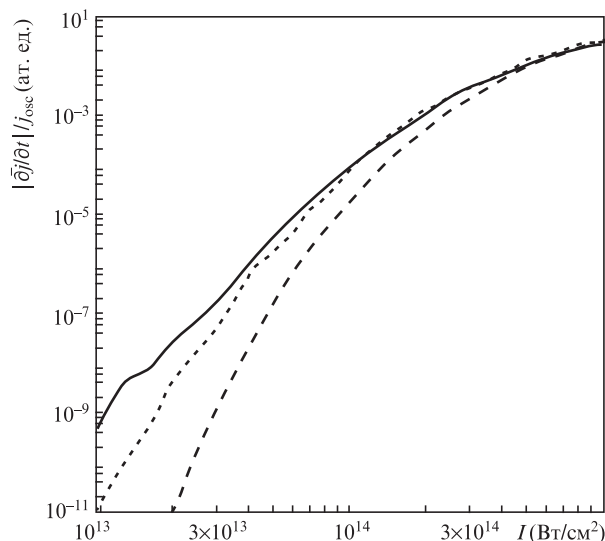


Рис.3. Зависимости максимальной производной от низкочастотной плотности тока  $|\partial \bar{j} / \partial t|$ , нормированной на осцилляторную плотность тока  $j_{osc}$ , от интенсивности  $I$  основного поля лазерного импульса при  $\alpha = 0.2$ . Штриховая кривая – расчет на основе полуклассического подхода, пунктир – расчет на основе метода мнимого времени для  $\lambda_0 = 800$  нм, сплошная кривая – то же для  $\lambda_0 = 1200$  нм.

рис.4, на котором показаны полученные зависимости  $\varphi_{opt}(I_0)$  при длине волны основного поля  $\lambda_0 = 1200$  нм. Приближенное решение нестационарного уравнения Шредингера на основе метода мнимого времени дает хорошее качественное согласие с результатами прямого численного моделирования. Детальный анализ уравнений движения электронов в бихроматическом лазерном поле показывает, что при учете взаимодействия электронов с родительским ионом происходит сильное искажение траекторий, возвращающихся к иону. Это приводит к изменению оптимального сдвига фаз при изменении интенсивности  $I_0$  основного поля вблизи значений, соответствующих  $\gamma \sim 1$ . При больших значениях интенсивности, соответствующих  $\gamma \ll 1$ , искажение траекторий прене-

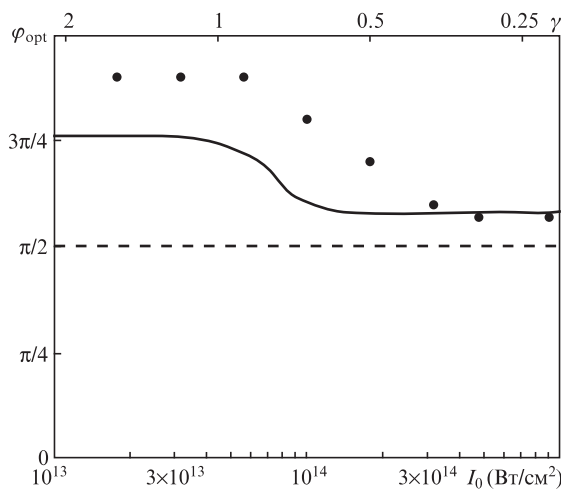


Рис.4. Зависимости оптимального сдвига фаз  $\varphi_{opt}$  между несущими полями лазерного импульса от пиковой интенсивности основного поля  $I_0$  при  $\lambda_0 = 1200$  нм,  $\tau_p = 50$  фс и  $\alpha = 0.2$ . Штриховая кривая – результат, полученный на основе полуклассического подхода, сплошная кривая – расчет на основе метода мнимого времени, точки – численное решение нестационарного уравнения Шредингера.

брежимо мало и оптимальный сдвиг фаз постоянен и близок к значению, получаемому на основе полуклассического подхода.

## 5. Заключение

На основе численного и полуаналитического решений нестационарного уравнения Шредингера исследовано возбуждение остаточной плотности тока при ионизации газа бихроматическим лазерным импульсом. Найдены зависимости оптимального сдвига фаз и соответствующей ему максимальной ОПТ от интенсивности основного поля. Показано, что метод мнимого времени с учетом взаимодействия свободных электронов с родителем ионом позволяет с большой точностью рассчитывать ОПТ в широком диапазоне значений интенсивностей и длин волн, соответствующих как туннельному, так и многофотонному режимам ионизации. Расчеты концентрации свободных электронов и ОПТ на основе метода мнимого времени могут быть использованы для интерпретации результатов численных расчетов и при нахождении оптимальных параметров лазерных импульсов с целью реализации ионизационных механизмов генерации терагерцевого излучения.

Численное моделирование на основе решения нестационарного уравнения Шредингера выполнено при поддержке Правительства РФ (соглашение № 14.В25.31.0008) и РФФИ (гранты № 14-02-00847, 16-32-60200). Разработка полуаналитической модели, основанной на методе мнимого времени, поддержана Российским научным фондом (грант № 15-12-10033).

- Kim K.Y., Taylor A.J., Glowina J.H. Rodriguez G. *Nat. Photon.*, **2**, 605 (2008).
- Kim K.Y. *Phys. Plasmas*, **16**, 056706 (2009).
- Thomson M.D., Blank V., Roskos H.G. *Opt. Express*, **18**, 23173 (2010).
- Babushkin I., Skupin S., Husakou A., Köhler C., Cabrera-Granado E., Bergé L., Herrmann J. *New J. Phys.*, **13**, 123029 (2011).
- Clough B., Dai J., Zhang X.-C. *Mater. Today*, **15**, 50 (2012).
- Clerici M., Peccianti M., Schmidt B.E., Caspani L., Shalaby M., Giguère M., Lotti A., Couairon A., Légaré F., Ozaki T., Faccio D., Morandotti R. *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 253901 (2013).
- Gildenburg V.B., Vvedenskii N.V. *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 245002 (2007).
- Wu H.-C., Meyer-ter Vehn J., Sheng Z.-M. *New J. Phys.*, **10**, 043001 (2008).
- Kostin V.A., Vvedenskii N.V. *Opt. Lett.*, **35**, 247 (2010).
- Vvedenskii N.V., Korytin A.I., Kostin V.A., Murzanev A.A., Silaev A.A., Stepanov A.N. *Phys. Rev. Lett.*, **112**, 055004 (2014).
- Гарнов С.В., Щербачев И.А., *УФН*, **181**, 97 (2011).
- Чижов П.А., Волков Р.В., Букин В.В., Ушаков А.А., Гарнов С.В., Савельев А.Б., *Квантовая электроника*, **43**, 347 (2013).
- Silaev A.A., Vvedenskii N.V. *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 115005 (2009).
- Silaev A.A., Vvedenskii N.V. *Phys. Scr.*, **135**, 014024 (2009).
- Silaev A.A., Vvedenskii N.V. *Phys. Plasmas*, **22**, 053103 (2015).
- Alexandrov L.N., Emelin M.Y., Ryabikin M.Y. *Phys. Rev. A*, **87**, 013414 (2013).
- Romanov A.A., Silaev A.A., Vvedenskii N.V. *Probl. Atom. Sci. Technol.*, **4** (98), 286 (2015).
- Popruzhenko S.V., Tulsy V.A. *Phys. Rev. A*, **92**, 033414 (2015).
- Alexandrov L.N., Emelin M.Y., Ryabikin M.Y. *J. Phys. B: At., Mol. Opt. Phys.*, **47**, 204028 (2014).
- Chen W., Huang Y., Meng C., Liu J., Zhou Z., Zhang D., Yuan J., Zhao Z. *Phys. Rev. A*, **92**, 033410 (2015).
- Келдыш Л.В. *ЖЭТФ*, **47**, 1945 (1965).
- Popruzhenko S.V., Mur V.D., Popov V.S., Bauer D. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 193003 (2008).
- Silaev A.A., Ryabikin M.Y., Vvedenskii N.V. *Phys. Rev. A*, **82**, 033416 (2010).
- Силаев А.А., Мешков О.В., Емелин М.Ю., Введенский Н.В., Рябикин М.Ю. *Квантовая электроника*, **45**, 393 (2015).
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1989).
- Tong X.M., Lin C.D. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **38**, 2593 (2005).
- Переломов А.М., Попов В.С. *ЖЭТФ*, **25**, 2 (1967).
- Popruzhenko S.V., Paulus G.G., Bauer D. *Phys. Rev. A*, **77**, 053409 (2008).
- Yan T.-M., Bauer D. *Phys. Rev. A*, **86**, 053403 (2012).
- Silaev A.A., Kostin V.A., Laryushin I.D., Vvedenskii N.V. *J. Phys.: Conf. Ser.*, **594**, 012020 (2015).