

# Возбуждение низкочастотных остаточных токов на комбинационных частотах ионизирующего двухцветного лазерного импульса

Н.В.Введенский, В.А.Костин, И.Д.Ларюшин, А.А.Силаев

*Исследованы процессы возбуждения низкочастотных остаточных токов в плазме, образующейся при ионизации газов двухцветными лазерными импульсами в лазерно-плазменных схемах генерации терагерцевого (ТГц) излучения. Разработан аналитический подход, позволяющий отыскать остаточные токи в случае, когда одна из компонент двухцветного импульса достаточно слаба. Полученные аналитические выражения показывают, что эффективная генерация остаточного тока (а следовательно, и эффективная генерация ТГц излучения) возможна, если отношение частот в двухцветном лазерном импульсе близко к рациональной дроби с не очень большой нечётной суммой числителя и знаменателя. Результаты численных расчётов (в том числе основанные на решении трёхмерного нестационарного уравнения Шрёдингера) хорошо согласуются с аналитическими результатами.*

**Ключевые слова:** двухцветные лазерные импульсы, терагерцевое излучение, ионизация, комбинационные частоты, нестационарное уравнение Шрёдингера.

## 1. Введение

Лазерно-плазменные схемы, основанные на ионизации газов двухцветными лазерными импульсами, привлекают большое внимание в связи с возможностями получения в них мощного и широкополосного терагерцевого (ТГц) излучения [1–14]. Эти схемы достаточно хорошо изучены для импульсов, которые содержат сильное поле на основной частоте и более слабое добавочное поле на частоте второй гармоники, получаемое с помощью кристалла удвоения частоты [1–12]. С использованием таких лазерных импульсов получены ТГц поля со спектром, охватывающим десятки терагерц [2–4], и напряжённостями до нескольких МВ/см [5–7]. Кроме того, продемонстрированы возможности управления свойствами генерируемого ТГц излучения (поляризацией, формой спектра, энергией) при манипуляции поляризацией и фазовой структурой ионизирующего двухцветного импульса [8] или при изменении давления среды и условий фокусировки [3, 9, 10], а также при изменении типа ионизируемого газа и при наличии предварительных импульсов, ионизирующих или ориентирующих молекулы газа [3, 11, 12]. Не так давно была экспериментально и теоретически исследована другая схема, в которой двухцветный лазерный импульс содержал помимо сильного основного поля слабое добавочное поле, получаемое с помощью параметрического генератора света, с частотой, перестраиваемой вблизи половинной частоты основного поля [13, 14].

Н.В.Введенский, В.А.Костин, И.Д.Ларюшин, А.А.Силаев. Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, 603950 Н.Новгород, просп. Гагарина, 23; e-mail: vved@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 15 марта 2016 г.

Спектр ТГц излучения, получаемого в лазерно-плазменных схемах, обычно имеет низкочастотное ядро (с частотами порядка 1 ТГц, намного меньшими обратной длительности ионизирующего импульса), которое содержит значительную долю энергии генерируемого импульса [6, 9, 13]. Это низкочастотное излучение вызвано плазменными токами в длинном кильватерном следе позади лазерного импульса, амплитуда которых пропорциональна остаточной плотности тока (ОПТ), возбуждаемого лазерным импульсом за ионизационным фронтом [13, 15–17].

В настоящей работе мы исследуем процессы возбуждения ОПТ, когда отношение частот в двухцветном лазерном импульсе отлично от двух, а отношение амплитуд его компонент произвольно. Для этой цели ОПТ найдётся аналитически и численно с помощью полуклассического и квантово-механического подходов и подробно анализируются зависимости ОПТ от параметров лазерного импульса. Особое внимание уделяется зависимостям от частотного отношения в двухцветном лазерном импульсе, которые, как будет показано в нашей работе, представляют собой набор резонансopodobных пиков вблизи частотных отношений, близких к рациональным дробям с нечётной суммой числителя и знаменателя.

## 2. Постановка задачи и вывод аналитических выражений для остаточного тока

В данном разделе описывается разработанная аналитическая модель для отыскания ОПТ и выводятся замкнутые формулы для зависимостей ОПТ от всех параметров лазерного импульса для случая, когда одна из компонент двухцветного лазерного импульса (добавочное поле) достаточно мала по сравнению с другой компонентой (основное поле). Модель основана на полуклассическом подходе, заключающемся в решении балансного ио-

низационного уравнения для концентрации  $N$  свободных электронов в плазме и уравнения для плотности тока  $\mathbf{j}$  свободных электронов [5, 13, 15–18]:

$$\frac{dN}{dt} = (N_g - N)w(|\mathbf{E}|), \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{e^2}{m}N\mathbf{E}. \quad (2)$$

Здесь  $N_g$  – начальная концентрация нейтральных частиц газа;  $w(|\mathbf{E}(t)|)$  – вероятность ионизации атома в единицу времени в электрическом поле с напряжённостью  $\mathbf{E}$ ;  $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона;  $\mathbf{E}(t)$  – заданная зависимость электрического поля лазерного импульса от времени  $t$ . Рассматриваются линейно поляризованные двухцветные лазерные импульсы, электрическое поле которых параметризуется следующим образом:

$$\mathbf{E}(t) = [A_0(t)\cos(\omega_0 t) + A_1(t)\cos(\omega_1 t + \phi)]\mathbf{x}_0, \quad (3)$$

где  $A_0(t)$  и  $A_1(t)$  – медленные огибающие основного и добавочного полей соответственно;  $\phi$  – фазовый сдвиг полей;  $\mathbf{x}_0$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $x$ ;  $\omega_0$  и  $\omega_1$  – несущие частоты полей. Точное решение системы (1), (2) имеет вид

$$N(t) = N_g \left[ 1 - \exp\left(-\int_{-\infty}^t w(|\mathbf{E}(t')|) dt'\right) \right], \quad (4)$$

$$\mathbf{j}(t) = \frac{e^2}{m} \int_{-\infty}^t N(t')\mathbf{E}(t') dt'. \quad (5)$$

ОПТ определяется плотностью тока свободных электронов при  $t \rightarrow +\infty$  или, иными словами, нулевой гармоникой производной  $d\mathbf{j}/dt$  плотности тока по времени:

$$\mathbf{j}_{\text{RCD}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{j}(t) = \frac{e^2}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} N(t')\mathbf{E}(t') dt'. \quad (6)$$

Изменение концентрации свободных электронов в поле линейно поляризованного лазерного импульса происходит ступенчатым образом, при этом моменты скачков плотности совпадают с моментами наступления максимумов модуля напряжённости электрического поля. Будем рассматривать лазерные импульсы, под действием которых ионизация идёт достаточно медленно (на протяжении нескольких периодов основного поля), так что величина каждого скачка мала по сравнению с конечной концентрацией свободных электронов. В этом случае в правой части уравнения (1) концентрацию  $N(t)$  можно заменить усреднённой по периоду основного поля величиной  $\bar{N}(t)$  [16]:

$$\frac{dN}{dt} = (N_g - \bar{N})w(|\mathbf{E}(t)|), \quad (7)$$

где само усреднённое значение удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = (N_g - \bar{N})\bar{w}(|\mathbf{E}(t)|). \quad (8)$$

В последнем уравнении  $\bar{w}(E)$  – усреднённая по периоду основного поля вероятность ионизации. В условиях тун-

нельной ионизации вероятность ионизации обычно представляет собой резкую функцию поля, поэтому для усреднённой вероятности ионизации можно использовать выражение  $\bar{w}(E) = [2/(\pi n_0)]^{1/2} w(E)$ , где  $n_0(E) = Ew'(E)/w(E) \gg 1$  – показатель резкости вероятности ионизации  $w$  как функции поля  $E$ . Число  $n_0(E)$  равно показателю степенной функции, наилучшим образом аппроксимирующей функцию  $w(E)$  в окрестности конкретного значения  $E$ . Корень из этого числа в максимуме напряжённости поля определяет, во сколько раз длительность соответствующего скачка концентрации плазмы меньше периода основного поля.

Так же как это было сделано в [13, 15], для получения замкнутой формулы для величины ОПТ необходимо проанализировать спектральный состав электронной концентрации  $N$ , что может быть выполнено с использованием теории возмущений по малому добавочному полю. Формула Тейлора для вероятности ионизации как функции электрического поля позволяет записать соотношение

$$w(|\mathbf{E}(t)|) = w_0 + w_1 + \dots, \quad (9)$$

где выражение для вклада  $w_l$  в вероятность ионизации в  $l$ -м порядке теории возмущений имеет вид

$$w_l = \frac{\tilde{w}^{(l)}(E_0(t))E_1^l(t)}{l!}. \quad (10)$$

Здесь  $E_0(t) = A_0(t)\cos(\omega_0 t)$  и  $E_1(t) = A_1(t)\cos(\omega_1 t + \phi)$  – проекции основного и добавочного полей на ось  $x$ ;  $\tilde{w}^{(l)}(E) = \text{sgn}^l(E)w^{(l)}(|E|)$ ;  $w^{(l)}(E)$  –  $l$ -я производная по полю вероятности ионизации. После подстановки (9) и (10) в уравнения (2) и (7) получим

$$N(t) = N_0 + N_1 + \dots, \quad \mathbf{j}(t) = (j_0 + j_1 + \dots)\mathbf{x}_0, \quad (11)$$

где вклады  $N_l$  и  $j_l$  в концентрацию свободных электронов и плотность тока в  $l$ -м порядке удовлетворяют уравнениям

$$N_l = \int_{-\infty}^t [N_g - \bar{N}(t')]w_l(t') dt', \quad (12)$$

$$\frac{dj_l}{dt} = \frac{e^2}{m}(N_l E_0 + N_{l-1} E_1). \quad (13)$$

В длинных и не слишком интенсивных лазерных импульсах, когда ионизация продолжается в течение значительного числа периодов основного поля, каждая из функций  $\tilde{w}^{(l)}$  представляет собой последовательность узких пиков вблизи моментов наступления экстремумов  $E_0(t)$ , т. е. вблизи моментов времени  $t_s = s\pi/\omega_0$ , где  $s$  – целое, при этом амплитуды соседних пиков не сильно различаются по модулю. Это позволяет представить  $\tilde{w}^{(l)}(t)$  как набор гармоник частоты  $\omega_0$  с медленными огибающими  $W_k^{(l)}(t)$ :

$$\tilde{w}^{(l)}(E_0(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k^{(l)}(t)\cos(k\omega_0 t), \quad (14)$$

где

$$W_k^{(l)} = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{t-\pi/\omega_0}^{t+\pi/\omega_0} \tilde{w}^{(l)}(E_0(t'))\cos(k\omega_0 t') dt'. \quad (15)$$

Поскольку вероятность ионизации является функцией абсолютного значения напряжённости поля, при чётных

$l$  амплитуды всех пиков одного знака (положительны), а при нечётных  $l$  положительные пики чередуются с отрицательными. Соответственно в разложении (14) при чётных  $l$  слагаемые с нечётными номерами  $k$  малы и могут быть отброшены, а при нечётных, наоборот, могут быть отброшены слагаемые с чётными номерами. Интеграл (15) для оставшихся слагаемых может быть вычислен приближённо с помощью метода Лапласа:

$$W_k^{(l)}(t) \approx \frac{\tilde{w}^{(l)}(A_0(t))}{\sqrt{2\pi n_l}} \exp\left(-\frac{k^2}{2n_l}\right) \quad (16)$$

при чётном  $k + l$ . Здесь  $n_l = w^{(l+1)}(|A_0|)/w^{(l)}(|A_0|)$  – показатель резкости  $l$ -й производной по полю вероятности ионизации. При вычислении интеграла (15) методом Лапласа было использовано условие  $n_l \gg 1$ . Для обычно встречающихся функций  $w(E)$  при  $n_l \gg 1$  оказывается, что  $n_l - n_{l+1} \approx 1$ . Для таких функций сильные неравенства  $n_l \gg 1$  и  $n_0 \gg l + 1$  являются эквивалентными. Последнее неравенство фактически задаёт ограничение сверху на порядок теории возмущений, для которого корректны дальнейшие выкладки.

Учитывая, что

$$\tilde{w}^{(l)}(A_0) = w(|A_0|) A_0^{-l} \prod_{i=0}^{l-1} n_i = \left(\frac{\pi n_0}{2}\right)^{l/2} \bar{w}(|A_0|) A_0^{-l} \prod_{i=0}^{l-1} n_i, \quad (17)$$

получаем

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{(l)}(E_0(t)) &\approx \sqrt{\frac{n_0}{n_l}} \frac{\prod_{i=0}^{l-1} n_i}{2A_0^l(t)} \bar{w}(|A_0(t)|) \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{(2k+1)^2}{2n_l}\right] \cos[(2k+1)\omega_0 t] \end{aligned} \quad (18)$$

для нечётных  $l$  и

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{(l)}(E_0(t)) &\approx \sqrt{\frac{n_0}{n_l}} \frac{\prod_{i=0}^{l-1} n_i}{2A_0^l(t)} \bar{w}(|A_0(t)|) \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{2k^2}{2n_l}\right) \cos(2k\omega_0 t) \end{aligned} \quad (19)$$

для чётных  $l$ . Вклады  $w_l$  пропорциональны произведению  $\tilde{w}^{(l)}(E_0)$  и  $E_1^l = A_1^l \cos^l(\omega_1 t + \phi)$  и представляют собой набор гармоник на определённых комбинационных частотах двухцветного импульса. В соответствии с (12) и (13) вклады  $j_l$  в плотность тока также представляют собой набор гармоник на некоторых комбинационных частотах  $\alpha\omega_0 + \beta\omega_1$  поля двухцветного импульса (иных, нежели в случае  $w_l$ ), где  $\alpha$  и  $\beta$  – целые, а  $\alpha + \beta$  – нечётное число. Вклад в ОПТ могут дать лишь очень низкие комбинационные частоты  $\Delta\omega = b\omega_1 - a\omega_0$ , малые по сравнению с обратными временными масштабами медленных огибающих соответствующих гармоник, где  $a$  и  $b$  – натуральные числа разной чётности. Для нахождения этих низкочастотных составляющих плотности тока согласно (13) необходимо найти гармоники электронной концентрации на частотах  $\omega_0 \pm \Delta\omega$  и  $\omega_1 \pm \Delta\omega$ , близких к частотам ионизирующего импульса.

Подставляя (18) и (19) в (10) и (12) и анализируя полученные выражения, находим, что низшим порядком теории возмущений, в котором появляется низкочастотная компонента производной плотности тока на частоте  $\Delta\omega$ , является порядок  $l = b$ . Эта низкочастотная плотность

тока в  $b$ -м порядке определяется поправкой  $N_b$ , содержащей гармоники  $N_b^{[(1 \mp a)\omega_0 \pm b\omega_1]}$  на частотах  $\omega_0 \pm \Delta\omega = (1 \mp a)\omega_0 \pm b\omega_1$ , и поправкой  $N_{b-1}$ , содержащей гармонику  $N_{b-1}^{[a\omega_0 - (b-1)\omega_1]}$  на частоте  $\omega_1 - \Delta\omega = a\omega_0 - (b-1)\omega_1$ :

$$\begin{aligned} N_b^{[(1 \mp a)\omega_0 \pm b\omega_1]} &\approx \frac{2K_b}{\omega_0 \pm \Delta\omega} \exp\left[-\frac{(a \mp 1)^2}{2n_b}\right] \\ &\times \cos[(\omega_0 \pm \Delta\omega)t \pm b\phi], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} N_{b-1}^{[a\omega_0 - (b-1)\omega_1]} &\approx \frac{2K_{b-1}}{\omega_1 - \Delta\omega} \exp\left(-\frac{a^2}{2n_{b-1}}\right) \\ &\times \cos[(\omega_1 - \Delta\omega)t - (b-1)\phi], \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$K_l = \sqrt{\frac{n_0}{n_l}} \left(\prod_{i=0}^{l-1} n_i\right) \frac{(N_g - \bar{N}) \bar{w}(|A_0(t)|) \left[\frac{A_1(t)}{2A_0(t)}\right]^l}{2l!}. \quad (22)$$

При получении этих выражений в интеграле (12) медленный множитель  $N_g - \bar{N}$  был вынесен за знак интегрирования. Подставляя выражения (20) и (21) в уравнение (13) с  $l = b$ , находим уравнение для гармоники плотности тока на частоте  $\Delta\omega = b\omega_1 - a\omega_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{dj_b^{(b\omega_1 - a\omega_0)}}{dt} &= \frac{e^2 K_b A_0(t)}{m} \left\{ \frac{\exp[-(a-1)^2/(2n_b)]}{\omega_0 + \Delta\omega} \right. \\ &- \frac{\exp[-(a+1)^2/(2n_b)]}{\omega_0 - \Delta\omega} - \sqrt{\frac{n_b}{n_{b-1}}} \frac{2b^2 \exp[-a^2/(2n_{b-1})]}{\omega_1 - \Delta\omega} \left. \right\} \\ &\times \sin(\Delta\omega t + b\phi). \end{aligned} \quad (23)$$

При  $a + b \ll n_0$  можно считать, что  $n_0 \approx n_1 \approx \dots \approx n_b$ , и в предыдущем выражении заменить экспоненты их разложением в ряд Тейлора около значения аргумента  $-a^2/(2n_0)$ . При этом  $K_b \approx (N_g - \bar{N}) [n_0 A_1(t)/(2A_0(t))]^b \bar{w}(|A_0(t)|)/(2b!)$  и выражение для гармоники плотности тока сильно упрощается:

$$\begin{aligned} \frac{dj_b^{(b\omega_1 - a\omega_0)}}{dt} &\approx g \frac{e^2 N_g A_0(t)}{m\omega_0} \left(1 - \frac{\bar{N}}{N_g}\right) \\ &\times \bar{w}(|A_0(t)|) \left[\frac{n_0 A_1(t)}{2A_0(t)}\right]^b \sin(\Delta\omega t + b\phi), \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$g = \frac{2}{b!} \exp\left(-\frac{a^2}{2n_0}\right) \left(\frac{a^2 - b^2}{n_0 a} - \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right). \quad (25)$$

После интегрирования выражения (25) по времени с помощью метода Лапласа получаем для вклада в ОПТ на конкретной комбинационной частоте  $\Delta\omega = b\omega_1 - a\omega_0$  выражение

$$j_{\text{RCD}}^{(a,b)} \approx g j_{\text{osc}} \sigma \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2 \tau_1^2}{2}\right) \left(\frac{n_0 F_1}{2F_0}\right)^b \sin(b\phi - \Delta\omega t_0) x_0. \quad (26)$$

Здесь  $j_{\text{osc}} = e^2 N_g F_0 / (m\omega_0)$  – амплитуда осцилляторного тока, наводимого основным полем в плазме с концентрацией  $N_g$ ;  $F_{0,1} = A_{0,1}(t_0)$ ;  $t_0$  – положение точки перегиба функции  $\bar{N}(t)$ , т.е. момент времени, в который усреднённая

электронная концентрация растёт наиболее быстро, – «момент ионизации»;  $\tau_1 = [-(d\bar{N}/dt)^2/(d^3\bar{N}/dt^3)]|_{t=t_0} \approx \tau/n_0^{1/2}$  – характерное время ионизации;  $\tau = [-A_0/(d^2A_0/dt^2)]^{1/2}|_{t=0}$  – длительность ионизирующего импульса (полагаем здесь для удобства, что максимум огибающей  $A_0(t)$  наступает при  $t=0$ );  $\sigma = N(+\infty)/N_g = \bar{N}(+\infty)/N_g \approx 1 - \exp[-(2\pi)^{1/2} \times \bar{w}(|F_0|)\tau]$  – конечная (максимальная) степень ионизации газа.

### 3. Обсуждение аналитических результатов и сопоставление их с результатами полуклассических расчётов

Выражение (26) описывает вклад в ОПТ для конкретных значений  $a$  и  $b$ . Общее выражение для ОПТ получается суммированием по всем допустимым  $a + b$ :

$$j_{\text{RCD}} = \sum_{a,b} j_{\text{RCD}}^{(a,b)} (a + b - \text{нечётное}). \quad (27)$$

В этой сумме слагаемые быстро уменьшаются с ростом как  $a$ , так и  $b$ , и суммирование можно проводить только по слагаемым с  $a + b \leq n_0$ , когда верно выражение (26). Более того, из-за резкого гауссова множителя  $\exp(-\Delta\omega^2\tau_1^2/2)$  в (26) при каждом конкретном значении отношения  $\omega_1/\omega_0$  существенными оказываются только одно или два слагаемых, отвечающих не очень большим значениям  $\Delta\omega$  и не очень большой сумме  $a + b$ . При отношении  $\omega_1/\omega_0$ , близком к некоторой дроби  $a/b$  с не очень большой нечётной суммой числителя и знаменателя, фактически можно пренебречь всеми слагаемыми, кроме одного, отвечающего этим конкретным значениям  $a$  и  $b$ , и считать, что выражение (26) описывает полное значение ОПТ. Иными словами, при тех отношениях частот, при которых ОПТ не слишком мала из-за указанных гауссовых множителей, в сумме можно оставить только одно слагаемое. Если при этом конечная степень ионизации оказывается не очень большой, то можно положить  $t_0 = 0$  и  $\sigma \approx (2\pi)^{1/2} \bar{w}(|F_0|)\tau_1$ , что превращает (26) в замкнутую формулу для ОПТ при заданных зависимостях  $A_{0,1}(t)$  и  $\bar{w}(E)$ . Эта формула и описываемые ею зависимости ОПТ от параметров лазерного импульса показывают, что возбуждение ОПТ двухцветным импульсом может быть интерпретировано как волновое смещение при взаимодействии  $b$  квантов добавочного поля и большого числа (порядка  $n_0 \gg 1$ ) квантов основного поля. Далее мы подробно обсуждаем эти зависимости.

При  $\omega_1/\omega_0 \approx a/b$  и  $j_{\text{RCD}} \approx j_{\text{RCD}}^{(a,b)}$  величина ОПТ имеет периодическую зависимость от сдвига фаз  $\phi$  несущих основного и добавочного полей с периодом  $2\pi/b$ , определяемым знаменателем дроби  $a/b$ . Максимальная по модулю величина ОПТ, достигаемая при оптимальном значении сдвига фаз, определяется выражением

$$\max_{\phi} |j_{\text{RCD}}^{(a,b)}| \approx g |j_{\text{osc}}| \sigma \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2\tau_1^2}{2}\right) \left|\frac{n_0 F_1}{2F_0}\right|^b. \quad (28)$$

При этом, т. к. в сумме (27) одно слагаемое доминирует над всеми остальными либо все слагаемые достаточно малы, можно считать, что

$$\max_{\phi} |j_{\text{RCD}}| \approx \sum_{a,b \in N} \max_{\phi} |j_{\text{RCD}}^{(a,b)}| (a + b - \text{нечётное}). \quad (29)$$

Формулы (28), (29) дают представление о зависимости максимальной ОПТ (соответствующей оптимальному сдвигу фаз) от параметров двухцветного лазерного импульса, в частности от частоты добавочного поля при фиксированной частоте  $\omega_0$ . Каждое слагаемое в сумме (29) соответствует резонансноподобному гауссову пику вблизи частоты  $\omega_1$ , отвечающей некоторому рациональному отношению  $a/b$ , где  $a$  и  $b$  удовлетворяют указанным выше условиям. На рис.1 показана эта зависимость, рассчитанная для двухцветного импульса с гауссовыми огибающими основного и добавочного полей

$$A_{0,1}(t) = \sqrt{\frac{8\pi I_{0,1}}{c}} \exp\left(-2 \ln 2 \frac{t^2}{\tau_p^2}\right), \quad (30)$$

где  $I_0$  и  $I_1$  – максимальные интенсивности основного и добавочного полей;  $\tau_p = 2(\ln 2)^{1/2} \tau$  – длительность лазерного импульса (полная ширина по полувысоте), одинаковая для огибающих основного и добавочного полей;  $c$  – скорость света. Для вероятности ионизации используется формула Тонга для атома водорода [19]

$$w(E) = 4\Omega_a \frac{E_a}{E} \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{E_a}{E} - 12 \frac{E}{E_a}\right), \quad (31)$$

где  $\Omega_a$  и  $E_a$  – атомные частота и поле. В отличие от традиционной формулы для вероятности туннельной ионизации, формула Тонга правильно описывает рост концентрации плазмы в режиме надбарьерной ионизации и при её использовании для нахождения ОПТ приводит к результатам, хорошо согласующимся с результатами квантово-механических расчётов [20]. Из рис.1 видно, что в интервале отношений частот 0.3 – 2.7 наиболее выраженными оказываются пики вблизи отношений 1/2, 2/3, 2/5, 3/4 и обратных к ним, т. е. с не очень большими  $a$  и  $b$ . На рис.1 приведены как результаты аналитических расчётов по формулам (28) и (29), так и результат прямого численного интегрирования по формулам (4) и (6). Несмотря на то что для построения этих зависимостей было выбрано достаточно большое значение интенсивности добавочного поля, находящееся на границе применимости аналити-

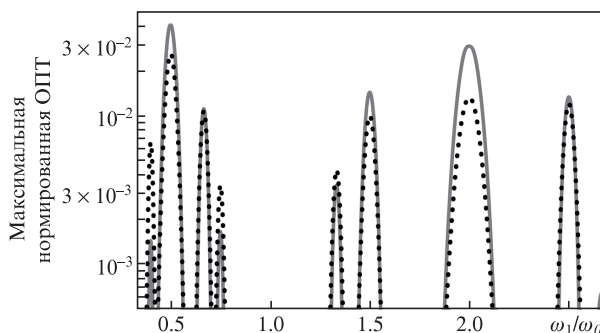


Рис.1. Зависимости максимальной нормированной ОПТ от отношения частот  $\omega_1$  и  $\omega_0$  добавочного и основного полей ионизирующего двухцветного лазерного импульса. Здесь и далее значения ОПТ нормированы на  $j_a = N_g e^2 E_a / (m\Omega_a)$  и соответствуют оптимальному (при котором ОПТ достигает максимального значения по абсолютной величине) значению фазового сдвига  $\phi$  несущих основного и добавочного полей. Параметры лазерного импульса: интенсивность основного поля  $I_0 = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>, интенсивность добавочного поля  $I_1 = 10^{13}$  Вт/см<sup>2</sup>, длительность импульса  $\tau_p = 50$  фс, частота основного поля  $\omega_0$  соответствует длине волны 800 нм. Точки получены с помощью аналитических формул (28) и (29). Сплошная кривая – результат полуклассических расчетов по формулам (4) и (6).

ческой модели, положения и ширины пиков (рис.1) очень хорошо описываются полученными аналитическими выражениями. Амплитуды максимумов также достаточно хорошо совпадают в аналитических и численных расчетах для не очень больших значений знаменателя  $b$ , в то время как для больших  $b$  наблюдаются расхождения.

Для пиков при отношениях частот с одинаковыми знаменателями амплитуды максимумов пиков уменьшаются с ростом  $a$  из-за гауссова множителя  $\exp[-a^2/(2n_0)]$  в выражении (25) для  $g$  при больших  $a$ . При малых  $a$  зависимость ширины пиков от  $a$  может быть немонотонной. К примеру, при  $n_0 > 7$  амплитуда пика при отношении  $a/b = 4$  оказывается больше, чем при  $a/b = 2$ , т.е. добавка четвёртой гармоники приводит к большему остаточному току и большему выходу ТГц излучения, чем добавка второй гармоники с той же интенсивностью. Величина ОПТ зависит от максимальной амплитуды добавочного поля по степенному закону с показателем  $b$ , поэтому отношение амплитуд максимумов пиков при отношениях частот с разными знаменателями существенно зависит от отношения интенсивностей добавочного и основного полей или, более точно, от величины  $n_0 F_1/(2F_0)$ . Это иллюстрирует рис.2, где приведены зависимости максимальной ОПТ от интенсивности добавочного поля. Видно, что при не очень больших интенсивностях добавочного поля указанные зависимости являются степенными с большой точностью, и аналитические выражения дают очень хорошее приближение для величины остаточного тока. При этом амплитуды максимумов пиков быстро уменьшаются с ростом  $b$ . При больших отношениях частот, вблизи границы области применимости теоретического подхода, основанного на теории возмущений по добавочному полю, пики, соответствующие большим  $b$ , могут оказаться выше, чем пики, соответствующие меньшим  $b$ . Например, пик при отношении  $a/b = 1/2$  выше, чем при  $a/b = 2$ , если добавочное поле не очень мало [17].

Зависимость амплитуды максимума пика от интенсивности основного поля при фиксированном отношении интенсивностей основного и добавочного полей в значительной мере определяется множителем  $j_{osc}\sigma$ . Она является быстрорастущей при небольших интенсивностях основного поля, когда степень ионизации  $\sigma$  остаётся малой. Когда наступает истощение нейтральных частиц и рост степени ионизации насыщается, рост остаточного

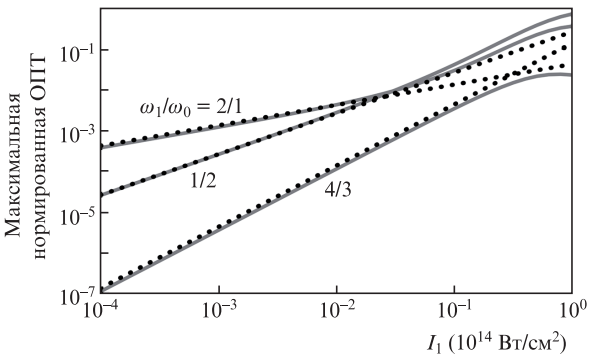


Рис.2. Зависимости максимальной нормированной ОПТ от интенсивности добавочного поля двухцветного лазерного импульса. Параметры лазерного импульса: интенсивность основного поля  $I_0 = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>, длительность импульса  $\tau_p = 50$  фс, частота основного поля  $\omega_0$  соответствует длине волны 800 нм. Точки получены с помощью аналитической формулы (28). Сплошные кривые – результаты полуклассических расчетов по формулам (4) и (6).

тока тоже сильно замедляется. Следует отметить, что на зависимость от интенсивности могут также влиять и другие множители в формуле (26), т.к.  $n_0$  и  $\tau_i$  тоже зависят от интенсивности основного поля. Несмотря на то что  $n_0$  и  $\tau_i$  обычно зависят от интенсивности основного поля медленнее, чем  $\sigma$ , их зависимости могут приводить к существенной модификации зависимости ОПТ от интенсивности основного поля (например, немонотонности) при больших значениях  $a$ ,  $b$  или  $\Delta\omega\tau$ .

Форма пиков практически полностью описывается гауссовым множителем  $\exp(-\Delta\omega^2\tau^2/2)$  в (26). Ширина пиков больше ширины спектра основного поля и уменьшается с ростом знаменателя дроби  $b$ . При отсутствии насыщения ионизации ширина пика больше ширины спектра основного поля в  $n_0^{1/2}/b$  раз. В общем случае (даже когда условия применимости аналитической модели нарушены) эта ширина оказывается порядка  $1/(\tau_i b)$ . Представление о том, как резкость  $n_0$  вероятности ионизации, характерное время  $\tau_i$  ионизации и ширина пика зависят от интенсивности основного поля и связаны между собой, даёт рис.3. На нём приведены зависимости времени ионизации, обратной ширины пика при  $\omega_1 \approx \omega_0/2$  и величины  $\tau/n_0^{1/2}$  в максимуме импульса от интенсивности основного поля. Время ионизации рассчитывается по формуле

$$\tau_i = \sqrt{\frac{1}{N(+\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle)^2 \frac{dN}{dt} dt}, \quad (32)$$

где

$$\langle t \rangle = \frac{1}{N(+\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{dN}{dt} dt \approx t_0. \quad (33)$$

Такое определение  $\tau_i$  оказывается практически эквивалентным данному ранее для случая, когда форма функции  $dN/dt$  близка к гауссовой. Ширина пика рассчитывается по формуле

$$\delta = \sqrt{\frac{\int_{0.45\omega_0}^{0.55\omega_0} (2\omega_1 - \omega_0)^2 \max_{\phi} |j_{RCD}| d\omega_1}{\int_{0.45\omega_0}^{0.55\omega_0} \max_{\phi} |j_{RCD}| d\omega_1}}. \quad (34)$$

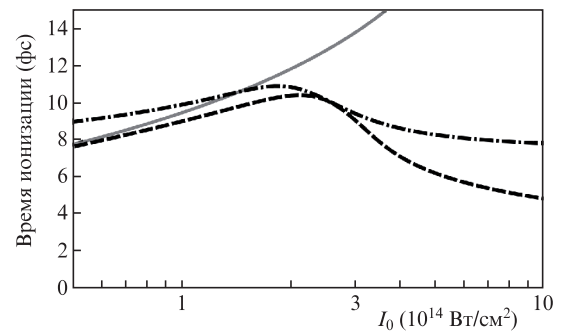


Рис.3. Зависимости времени ионизации  $\tau_i$  (сплошная и штриховая кривые) и обратной ширины пика зависимости ОПТ от частоты добавочного поля (штрих-пунктирная кривая) от интенсивности  $I_0$  основного поля двухцветного лазерного импульса. Параметры лазерного импульса: длительность импульса  $\tau_p = 50$  фс, частота основного поля  $\omega_0$  отвечает длине волны 800 нм, частота добавочного поля  $\omega_1$  – длине волны 1600 нм, отношение интенсивностей добавочного и основного полей фиксировано,  $I_1/I_0 = 0.01$ . Штриховая и штрих-пунктирная кривые – результаты численных расчётов. Сплошная кривая получена по аналитической формуле для  $\tau_i$ .

Видно, что во всём диапазоне интенсивностей время ионизации и обратная ширина пика примерно равны, а при малых интенсивностях, когда нет истощения нейтральных частиц, обе величины совпадают с  $\tau/n_0^{1/2}$ . Это свойство остаточного тока может быть интересным в связи с возможностью определения величин  $\tau_1$  и  $n_0$  в экспериментах по генерации ТГц излучения ионизирующими частотно-перестраиваемыми двухцветными импульсами с помощью измерений характерных диапазонов перестройки, в которых происходит эффективная генерация ТГц излучения. Такие измерения были, например, выполнены в [13].

Отметим также интересную особенность рассматриваемого явления возбуждения остаточного тока, связанную с асимметричной формой пика. Об этой асимметрии свидетельствует формула (25) для множителя  $g$ , который явным образом зависит от знака частотной отстройки  $\Delta\omega$ . Наличие этой зависимости приводит к тому, что максимум пика смещается относительно точного значения  $\omega_1 = a\omega_0/b$ . Находя максимум выражения (28), получаем, что максимум пика соответствует частотной отстройке

$$\Delta\omega_{\text{opt}} \approx -\frac{2n_0b}{\omega_0\tau_1^2(b^2 - a^2)}. \quad (35)$$

#### 4. Сравнение результатов полуклассического и квантово-механического подходов

Квантово-механический подход к расчёту остаточной плотности тока основан на численном решении трёхмерного нестационарного уравнения Шрёдингера для электронной волновой функции в атоме водорода в заданном поле  $E(t)$  двухцветного лазерного импульса. Особенности подхода и использованные методы решения описаны в [16]. На рис.4 показаны рассчитанные с помощью полуклассического и квантово-механического подходов зависимости максимальной ОПТ от частоты одной из квазимонохроматических составляющих двухцветного импульса (при равных интенсивностях составляющих двухцветного импульса, когда нельзя выделить основное и добавочное поля). Видно, что описанные выше пики около рациональных отношений частот в двухцветном лазерном импульсе проявляются как в полуклассическом, так и в квантово-механическом расчёте. Для больших интенсивностей, когда реализуется туннельный режим ионизации, результаты, полученные с помощью полуклассического подхода, и качественно, и количественно согласуются с результатами квантово-механического расчёта (рис.4,а). Таким образом, в условиях туннельной ионизации полуклассический подход позволяет адекватно рассчитывать как амплитуды максимумов пиков, так и их ширины.

При более низких интенсивностях, соответствующих многофотонному режиму ионизации, когда условия применимости полуклассического подхода не выполняются, полуклассический подход приводит к заниженным результатам для амплитуд максимумов пиков и завышенным результатам для их ширины. Это также видно на рис.5, где приведены зависимости максимальной ОПТ от интенсивностей составляющих двухцветного импульса для различных отношений частот в нём. Для отношений  $\omega_1/\omega_0 = alb$  с не очень большими  $a$  и  $b$  (таких, как  $1/2$  и  $2/3$ ) зависимость от интенсивности насыщается при больших интенсивностях и достаточно точно описывается полукласси-

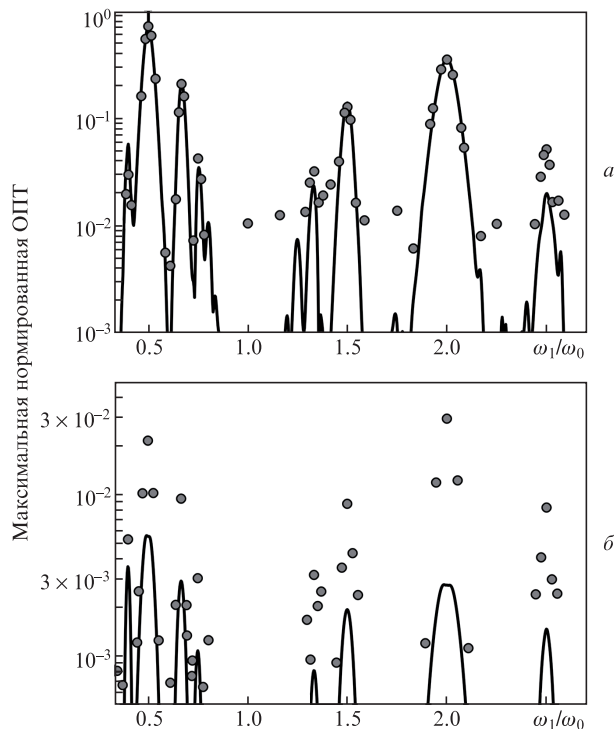


Рис.4. Зависимости максимальной нормированной ОПТ от отношения частот квазимонохроматических компонент двухцветного лазерного импульса. Параметры лазерного импульса: длительность импульса  $\tau_p = 50$  фс, частота основного поля  $\omega_0$  соответствует длине волны 800 нм, интенсивности компонент импульса  $I_0 = I_1 = 10^{14}$  (а) и  $3 \times 10^{13}$  Вт/см<sup>2</sup> (б). Сплошные кривые – результаты полуклассических расчётов, точки – результаты квантово-механических расчётов.

ческой моделью (рис.5,а). Для больших  $a$  и  $b$  (с  $alb = 2/5, 3/4$ ) зависимости оказываются более сложными и не насыщаются даже при очень больших интенсивностях, что связано с близостью более сильных пиков, соответствующих меньшим знаменателям: пик при отношении  $alb = 2/5$  близок к пику при  $alb = 1/2$ , а пик при  $alb = 3/4$  близок к пику при  $alb = 2/3$  (рис.5,б). По всей видимости, это также приводит к тому, что результаты полуклассических расчётов менее точно описывают зависимость ОПТ от интенсивности. При этом полуклассическая модель сохраняет все особенности этой зависимости, например её немонотонность и положение минимума и максимума при  $alb = 2/5$ .

#### 5. Заключение

Исследована генерация квазипостоянной ОПТ двухцветным лазерным импульсом в создаваемой им плазме при произвольном отношении частот квазимонохроматических составляющих этого импульса. На основе полуклассического подхода найдено достаточно простое аналитическое выражение, описывающее зависимость ОПТ от параметров лазерного импульса в случае, когда поле двухцветного импульса представляет собой суперпозицию сильного квазимонохроматического поля на основной частоте и слабого добавочного поля на другой частоте. Полученные аналитические выражения показывают, что зависимость ОПТ от частоты добавочного поля представляет собой набор резонансноподобных пиков вблизи частот, отвечающих отношениям частот добавочного и основного полей, равным рациональной дроби с не очень

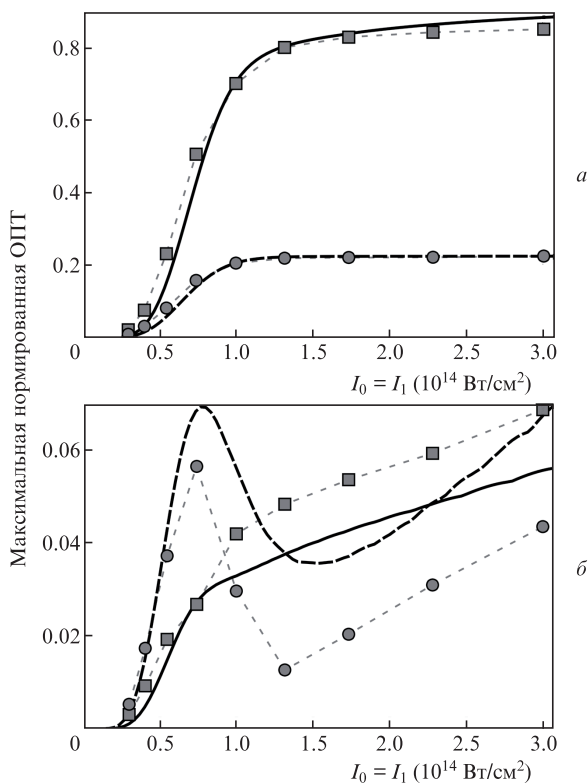


Рис.5. Зависимости максимальной нормированной ОПТ от интенсивностей  $I_1 = I_0$  квазимонохроматических компонент двухцветного лазерного импульса при отношении частот  $\omega_1/\omega_0 = 1/2$  (сплошная кривая,  $\blacksquare$ ) и  $2/3$  (штриховая кривая,  $\bullet$ ) (а), а также при  $\omega_1/\omega_0 = 3/4$  (сплошная кривая,  $\blacksquare$ ) и  $2/5$  (штриховая кривая,  $\bullet$ ) (б). Длительность импульса  $\tau_p = 50$  фс, частота основного поля  $\omega_0$  соответствует длине волны 800 нм. Кривые – результаты полуклассических расчетов, точки – результаты квантово-механических расчетов.

большой нечётной суммой числителя и знаменателя. Ширины пиков больше ширины спектра основного ионизирующего поля и определяются обратным характерным временем ионизации, делённым на знаменатель дроби, выражающей отношение частот в двухцветном лазерном импульсе. Найдены зависимости амплитуд максимумов пиков от интенсивностей основного и добавочного полей. Проведенные численные расчёты показывают, что полученные аналитические формулы хорошо описывают ОПТ в достаточно широком диапазоне параметров лазерных импульсов. Результаты расчётов, основанные на

численном решении трёхмерного нестационарного уравнения Шрёдингера, хорошо согласуются с результатами полуклассических расчётов для туннельного режима ионизации.

Разработка аналитической модели, вывод аналитических формул и проведение квантово-механических расчётов были выполнены при поддержке Правительства РФ (соглашение № 14.В25.31.0008) и РФФИ (гранты № 14-02-00847 и 16-32-60166). Проведение полуклассических расчётов (В.А.Костин) было поддержано Российским научным фондом (грант № 14-12-00811).

1. Cook D.J., Hochstrasser R.M. *Opt. Lett.*, **25**, 1210 (2000).
2. Karpowicz N.E., Chen J., Tongue T., Zhang X.-C. *Electron. Lett.*, **44**, 544 (2008).
3. Thomson M.D., Blank V., Roskos H.G. *Opt. Express*, **8**, 23173 (2010).
4. Rodriguez G., Dakovski G.L. *Opt. Express*, **18**, 15130 (2010).
5. Minami Y., Kurihara T., Yamaguchi K., Nakajima M., Suemoto T. *Appl. Phys. Lett.*, **102**, 041105 (2013).
6. Clerici M., Peccianti M., Schmidt B.E., Caspani L., Shalaby M., Giguère M., Lotti A., Couairon A., Légaré F., Ozaki T., Faccio D., Morandotti R. *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 253901 (2014).
7. Oh T.I., Yoo Y.J., You Y.S., Kim K.Y. *Appl. Phys. Lett.*, **105**, 041103 (2014).
8. Dai J., Karpowicz N., Zhang X.-C. *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 023001 (2009).
9. Borodin A.V., Panov N.A., Kosareva O.G., Andreeva V.A., Esaulkov M.N., Makarov V.A., Shkurinov A.P., Chin S.L., Zhang X.-C. *Opt. Lett.*, **38**, 1906 (2013).
10. Gorodetsky A., Koulouklidis A.D., Massaouti M., Tzortzakis S. *Phys. Rev. A*, **89**, 033838 (2014).
11. Чижев П.А., Волков Р.В., Букин В.В., Ушаков А.А., Гарнов С.В., Савельев А.Б. *Квантовая электроника*, **43**, 347 (2013).
12. Huang Y., Meng C., Wang X., Lü Z., Zhang D., Chen W., Zhao J., Yuan J., Zhao Z. *Phys. Rev. Lett.*, **115**, 123002 (2015).
13. Vvedenskii N.V., Korytin A.I., Kostin V.A., Murzanev A.A., Silaev A.A., Stepanov A.N. *Phys. Rev. Lett.*, **112**, 055004 (2014).
14. Balčiūnas T., Lorenc D., Ivanov M., Smirnova O., Zheltikov A.M., Dietze D., Unterrainer K., Rathje T., Paulus G.G., Baltuška A., Haessler S. *Opt. Express*, **23**, 15278 (2015).
15. Silaev A.A., Kostin V.A., Laryushin I.D., Vvedenskii N.V. *J. Phys. Conf. Ser.*, **594**, 12020 (2015).
16. Silaev A.A., Vvedenskii N.V. *Phys. Plasmas*, **22**, 053103 (2015).
17. Laryushin I.D., Kuznetsov L.S., Kostin V.A., Silaev A.A., Vvedenskii N.V. *Problems of Atomic Science and Technology*, **4** (98), 270 (2015).
18. Kostin V.A., Vvedenskii N.V. *Opt. Lett.*, **35**, 247 (2010).
19. Tong X.M., Lin C.D. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **38**, 2593 (2005).
20. Silaev A.A., Vvedenskii N.V. *Physica Scripta*, **T135**, 014024 (2009).