ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН

Адиабатическое взаимодействие кноидальных волн в изотропной гиротропной нелинейной среде в спектральном представлении

В.А.Макаров, В.М.Петникова, В.В.Шувалов

Проанализирована эволюция спектров приближенного решения задачи адиабатического взаимодействия двух волн с ортогональными циркулярными поляризациями в изотропной гиротропной нелинейной среде с дисперсией групповых скоростей второго порядка. Показано, что постепенная «хаотизация» приближенного решения для амплитуды быстро меняющейся волны связана с неэквидистантностью ее частотного спектра.

Ключевые слова: *кубическая нелинейность, гиротропия, кноидальные волны, адиабатическое взаимодействие, спектр.*

1. Введение

В работах [1–5] для аналитического решения неинтегрируемой задачи взаимодействия быстро меняющейся плоской кноидальной волны с циркулярной поляризацией («информационный» сигнал) с медленно меняющимся ортогонально поляризованным «управляющим» сигналом в виде кноидальной волны [1,4] или солитона [2,3,5] (рассматривалась изотропная гиротропная среда с керровской нелинейностью и дисперсией групповых скоростей второго порядка) использовалось адиабатическое приближение [6–8], широко применяемое как при квантовом, так и при классическом (полуклассическом) описании нелинейной динамики разнообразных систем [9,10]. Решение этой задачи, найденное в приближении малого диапазона изменения времени $t_1 = t - z/u$ в бегущей вдоль оси z с групповой скоростью u системе отсчета, дало основание утверждать, что информационный сигнал подвергается амплитудной и частотной модуляции со стороны управляющего сигнала. При этом в случае управляющего сигнала в виде кноидальной волны с увеличением времени наблюдалось искажение «быстрой» компоненты электрического поля в процессе ее распространения, проявляющееся в «хаотизации» последней. Для управляющего сигнала в виде солитона хаотизация информационного сигнала не наступала из-за того, что время эффективного взаимодействия ортогональных компонент поля ограничивалось длительностью солитона. Благодаря каскадным процессам на кубической нелинейности может не только возникать нелинейный сдвиг резонансной частоты быстрой подсистемы, но и появляться эффективное затухание, делающие спектр решения сплошным. Это происходит, например, с нелинейным откликом быстрой электронной подсистемы в случае ее сильной связи с медленной фононной подсистемой в сложных молекулах [11–15]. Для анализа причин вышеупомянутой «хаотизации» в настоящей работе рассмотрено взаимодействие двух плоских кноидальных волн («быстрый» информационный и «медленный» управляющий сигналы) с ортогональными циркулярными поляризациями в изотропной гиротропной нелинейной среде дисперсией групповых скоростей второго порядка. Показано, что постепенная хаотизация приближенного решения определяется неэквидистантностью спектра амплитуды быстро меняющейся волны. Для корректного вычисления спектра приближенного решения и его последующего анализа в настоящей работе адиабатическое приближение обобщено на случай больших t_1.

В.А.Макаров, В.М.Петникова, В.В.Шувалов. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы, 1; e-mail: vamakarov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 13 января 2016 г., после доработки – 7 марта 2016 г.

2. Приближенное решение в случае больших времен

Неинтегрируемую систему дифференциальных уравнений в частных производных для медленно меняющихся амплитуд $A_\pm(z,t_1)$ циркулярно поляризованных компонент электрического поля $E_\pm(z,t) = A_\pm(z,t-z/u)\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]$ эллиптически поляризованной волны, распространяющейся вдоль оси z в нелинейной изотропной гиротропной среде с дисперсией групповых скоростей второго порядка, заимствуем из [1]:

$$\frac{\partial A_\pm}{\partial z} - \mathrm{i}\frac{k_2}{2}\frac{\partial^2 A_\pm}{\partial t_1^2} + \mathrm{i}\Big[\mp\rho_0 + \Big(\frac{\sigma_1}{2}\mp\rho_1\Big)|A_\pm|^2 + \Big(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\Big)|A_\mp|^2\Big]A_\pm = 0. \tag{1}$$

Здесь $k_2 = \partial^2 k/\partial^2\omega \neq 0$, $\sigma_1 = 4\pi\omega^2\chi_{xyxy}/(kc^2)$ и $\sigma_2 = 2\pi\omega^2\chi_{xxyy} \times (kc^2)^{-1}$ связаны с независимыми компонентами тензора локальной кубической нелинейности $\hat{\chi}^{(3)}(\omega;-\omega,\omega,\omega)$, а $\rho_{0,1} = 2\pi\omega^2\gamma_{0,1}/c^2$ определены через псевдоскалярные константы $\gamma_{0,1}$ линейной и нелинейной гирации. Подставляя $A_\pm(z,t_1) = r_\pm(t_1)\exp(\mathrm{i}\kappa_\pm z)$ в (1) и осуществляя стандартную процедуру разделения переменных, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{\mathrm{d}^2 r_\pm}{\mathrm{d}t_1^2} - \frac{2}{k_2}\Big[\Delta\kappa_\pm + \Big(\frac{\sigma_1}{2}\mp\rho_1\Big)r_\pm^2 + \Big(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\Big)r_\mp^2\Big]r_\pm = 0. \tag{2}$$

Здесь $\Delta\kappa_\pm = \kappa_\pm \mp \rho_0$; $\kappa_\pm$ – свободные параметры задачи (константы разделения). Величина последних ограничена только условием применимости адиабатического приближения. Реализуя его, найдем приближенное решение $r_\pm(t_1)$ системы (2), справедливое не только при больших, но и при малых t_1. В последнем случае оно должно совпадать с приведенным в [1]. Полагаем в (2) $r_+(t_1)$ медленно меняющейся по сравнению с $r_-(t_1)$ функцией и будем искать приближенное решение уравнения для r_- в виде эллиптической функции Якоби [11]: $r_-(t_1) = C_-(t_1)\mathrm{dn}[\varphi_-(t_1), \mu_-]$. Здесь амплитуда $C_-(t_1)$ и мгновенная частота $\mathrm{d}\varphi_-(t_1)/\mathrm{d}t_1$ являются медленно меняющимися функциями, а μ_- – свободным параметром. Подставим $r_-(t_1)$ во второе уравнение системы (2), пренебрежем слагаемыми, содержащими производные медленно меняющихся функций $C_-(t_1)$, $\mathrm{d}\varphi_-(t_1)/\mathrm{d}t_1$, и найдем $C_-(t_1)$ и $\varphi_-(t_1)$ в следующем виде:

$$C_-(t_1) = C_0\sqrt{1+\frac{\sigma_1+2\sigma_2}{2\Delta\kappa_-}r_+^2(t_1)},$$
$$\varphi_-(t_1) = \nu_0\int_0^{t_1}\mathrm{d}t'\sqrt{1+\frac{\sigma_1+2\sigma_2}{2\Delta\kappa_-}r_+^2(t')}. \tag{3}$$

Здесь

$$C_0 = 2\sqrt{\frac{\Delta\kappa_-}{(\mu_-^2-2)(\sigma_1+2\rho_1)}};\quad \nu_0 = \sqrt{\frac{2\Delta\kappa_-}{k_2(2-\mu_-^2)}}. \tag{4}$$

Из (3) видно, что при малых временах,

$$t_1 \ll \frac{\mathrm{d}\varphi_-(t_1)/\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}^2\varphi_-(t_1)/\mathrm{d}t_1^2},$$

фаза

$$\varphi_-(t_1) \approx \nu_0 t_1\sqrt{1+\frac{(\sigma_1+2\sigma_2)r_+^2(t_1)}{2\Delta\kappa_-}},$$

что совпадает с результатами [1–5]. Процедура нахождения медленной компоненты электрического поля не отличается от примененной в [1–5]. Как и в [1], получим $r_+(t_1) = C_+\mathrm{cn}(\nu_+t_1, \mu_+)$. Здесь

$$\nu_+^2 = \frac{2}{k_2(2\mu_+^2-1)}\left[\Delta\kappa_+ - \frac{2\mathrm{E}(\mu_-)(\sigma_1+2\sigma_2)\Delta\kappa_-}{\mathrm{K}(\mu_-)(2-\mu_-^2)(\sigma_1+2\rho_1)}\right]; \tag{5}$$

$$C_+^2 = \tag{6}$$

$$\frac{4\mu_+^2[2\mathrm{E}(\mu_-)(\sigma_1+2\sigma_2)\Delta\kappa_- - \mathrm{K}(\mu_-)(2-\mu_-^2)(\sigma_1+2\rho_1)\Delta\kappa_+]}{(2\mu_+^2-1)[\mathrm{K}(\mu_-)(2-\mu_-^2)(\sigma_1^2-4\rho_1^2)-2\mathrm{E}(\mu_-)(\sigma_1+2\sigma_2)^2]},$$

$\mathrm{E}(\mu_-)$ и $\mathrm{K}(\mu_-)$ – полные эллиптические интегралы Лежандра второго и первого рода; μ_+ – свободный параметр. Подставив $r_+(t_1)$ в (3), уточним выражения, полученные для модуляции амплитуды и мгновенной частоты,

$$\frac{C_-(t_1)}{C_0} = \frac{1}{\nu_0}\frac{\mathrm{d}\varphi_-}{\mathrm{d}t_1} = \sqrt{1+m\,\mathrm{cn}^2(\nu_+t_1,\mu_+)}, \tag{7}$$

где $m = (\sigma_1 + 2\sigma_2)C_+^2/(2\Delta\kappa_-)$, а также фазы:

$$\varphi_-(t_1) = \nu_0\int_0^{t_1}\mathrm{d}t'\sqrt{1+m\,\mathrm{cn}^2(\nu_+t',\mu_+)}. \tag{8}$$

Напомним, что адиабатическое приближение требует выполнения неравенства $T_- \ll T_+$, накладывающего ограничения на параметры задачи. Здесь $T_+ = 4\mathrm{K}(\mu_+)/\nu_+$ и $T_- = 2\mathrm{K}(\mu_-)/(\mathrm{d}\varphi_-/\mathrm{d}t_1)$ – периоды, с которыми меняются компоненты электрического поля.

3. Спектр приближенного решения

Для вычисления спектров

$$S_\pm(\omega,\omega',z) = \int_{-\infty}^{\infty} r_\pm(z,t-z/u)\exp[\mathrm{i}(\omega-\omega')t - \mathrm{i}(k-\kappa_\pm)z]\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

найденного приближенного решения $E_\pm(z,t)$ представим входящий в выражение для $r_+(t_1)$ эллиптический косинус Якоби в виде тригонометрического ряда [16–18]:

$$\mathrm{cn}(\nu_+t_1,\mu_+) = \frac{\pi}{\mu_+\mathrm{K}(\mu_+)}$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\cosh^{-1}\left[\frac{(2n-1)\pi\mathrm{K}([1-\mu_+^2]^{1/2})}{2\mathrm{K}(\mu_+)}\right]\cos\left[\frac{(2n-1)\pi\nu_+t_1}{2\mathrm{K}(\mu_+)}\right]. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), получаем, что

$$S_+(\omega,\omega',z) = \frac{\pi^2C_-}{\mu_+\mathrm{K}(\mu_+)}\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\omega-\omega'}{u}-k+k_+\right)z\right]$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\cosh^{-1}\left[\frac{(2n-1)\pi\mathrm{K}([1-\mu_+^2]^{1/2})}{2\mathrm{K}(\mu_+)}\right]$$
$$\times\delta\left[\omega-\omega'+\frac{(2n-1)\pi\nu_+}{2\mathrm{K}(\mu_+)}\right]+\delta\left[\omega-\omega'-\frac{(2n-1)\pi\nu_+}{2\mathrm{K}(\mu_+)}\right]. \tag{11}$$

Из последней формулы видно, что спектр $S_+(\omega,\omega',z)$ эквидистантен и его компоненты расположены симметрично относительно несущей частоты ω. Расстояние между соседними линиями равно $\pi\nu_+/\mathrm{K}(\mu_+)$. Модуль спектральной амплитуды гармоники экспоненциально уменьшается при удалении от центральной частоты, а фазовый набег гармоники зависит от ее номера. Пространственный период спектра (11) $\Delta z_+ = 4u\mathrm{K}(\mu_+)/\nu_+$ определяется требованием кратности 2π фазовых набегов для всех гармоник спектра.

Для вычисления спектра $S_-(\omega,\omega',z)$ представим входящие в (7), (8) радикалы в виде ряда по степеням $m \ll 1$. С целью упрощения вида полученных формул ограничимся ниже малой глубиной модуляции, считая

$$\sqrt{1+m\,\mathrm{cn}^2(\nu_+t_1,\mu_+)} \approx \tfrac{1}{2}m\,\mathrm{cn}^2(\nu_+t_1,\mu_+).$$

Подставляя в последнее соотношение эллиптический косинус Якоби в виде (10), получаем определяемые (7) выражения для $C_-(t_1)$ и $\mathrm{d}\varphi_-/\mathrm{d}t_1$ в виде тригонометрических рядов. Теперь можно вычислить интеграл в (8) и представить связанную с частотой ν_+ фазу информационного сигнала $\varphi_-(t_1)$ в следующем виде:

$$\varphi_-(t_1) = \nu_0\left[1+\frac{m}{2\mu_+^2}\frac{\mathrm{E}(\mu_+)}{\mathrm{K}(\mu_+)}-\frac{m(1-\mu_+^2)}{2\mu_+^2}\right]t_1$$
$$+\frac{m\nu_0\mathrm{K}(\mu_+)}{2\pi\nu_+}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{a_q}{q}\sin\left[\frac{q\pi\nu_+t_1}{\mathrm{K}(\mu_+)}\right]. \tag{12}$$

Коэффициенты разложения a_q могут быть определены с помощью формулы (10). Подставляя (12) в разложение эллиптической функции $\mathrm{dn}[\varphi_-(t_1),\mu_-]$ в ряд [16–18],

$$\mathrm{dn}[\varphi_-(t_1),\mu_-] = \frac{\pi}{2\mathrm{K}(\mu_-)}$$

$$\times\left\{1 + 2\sum_{p=1}^{\infty}\cosh^{-1}\left[\frac{p\pi\mathrm{K}([1-\mu_-^2]^{1/2})}{\mathrm{K}(\mu_-)}\right]\cos\left[\frac{p\pi}{\mathrm{K}(\mu_-)}\varphi_-(t_1)\right]\right\}, \quad (13)$$

и пользуясь формулами

$$\cos\alpha = [\exp(\mathrm{i}\alpha) + \exp(-\mathrm{i}\alpha)]/2,$$

$$\exp(\pm\mathrm{i}\alpha\sin\beta) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}(\pm\mathrm{i})^r J_r(\alpha)\exp[\mathrm{i}r(\beta - \pi/2)],$$

где $J_r(\alpha)$ – функции Бесселя, а также найденным выражением для $C_-(t_1)$, можно получить спектр $S_-(\omega,\omega',z)$ в виде бесконечных сумм δ-функций:

$$S_-(\omega,\omega',z) = \exp\{\mathrm{i}[(\omega-\omega')/u - k + k_-]z\}$$

$$\times\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty}R_{q,r,p}\delta[\omega - \omega' + (r+1)q\pi\nu_1 + p\pi\nu_2]. \quad (14)$$

Здесь $R_{q,r,p}$ – спектральные амплитуды, явный вид которых из-за громоздкости не приводится; $\nu_1 = \nu_+/\mathrm{K}(\mu_+)$; $\nu_2 = [\nu_0/\mathrm{K}(\mu_-)]\{1 + (m/2\mu_\mp^2)[\mathrm{E}(\mu_+)/\mathrm{K}(\mu_+) - 1 + \mu_\mp^2]\}$. Формула (14) позволяет утверждать, что полученный спектр дискретен, но в общем случае не эквидистантен. Его расщепление обусловлено двумя независимыми факторами – управляющим сигналом (частота низшей гармоники ν_1) и информационным сигналом (перенормированная за счет частотной модуляции частота низшей гармоники ν_2). Все спектральные составляющие в (14) сфазированы только в плоскости $z = 0$. По мере удаления от нее искажения в фазах накапливаются, и приближенное решение имеет апериодический характер, внешне напоминающий хаос. Исключением является случай кратных частот: $l\nu_1 = \nu_2$, где l – целое число, значительно большее единицы в силу адиабатического приближения. В этом частном случае с ростом координаты распространения z набег фаз всех спектральных гармоник в (14) может быть кратен 2π. Это впервые произойдет на расстоянии $\Delta z_- = 2u\mathrm{K}(\mu_+)/\nu_+$. На периоде $\Delta z = \Delta z_+ = 2\Delta z_-$ информационный и управляющий сигналы окажутся сфазированными. При таком выборе $\nu_{1,2}$ возникающие искажения сначала накапливаются, а затем полностью компенсируются, и информационный сигнал является периодическим.

Подчеркнем, что аналогичным образом можно обобщить на случай больших времен взаимодействия и другие приближенные решения системы (1), записанные в виде многочисленных комбинаций эллиптических функций. Например, рассмотренную в [4] комбинацию, решения, получающиеся перестановкой эллиптических функций Якоби у «быстрой» и «медленной» компонент, а также решения в виде одинаковых, но разномасштабных по времени эллиптических функций. Для всех этих решений могут быть построены спектры и сделаны аналогичные выводы.

Найденные спектры приближенных решений (11), (14) системы (1) интересно сравнить со спектрами ее точных частных решений $\tilde{A}_\pm(z,t_1) = \tilde{r}_\pm(t_1)\exp(\mathrm{i}\tilde{\kappa}_\pm z)$ [17], отвечающих использованному в работе типу разделения переменных и выраженных через те же эллиптические функции: $\tilde{r}_+(t_1) = r_{0+}\mathrm{cn}(\nu t_1,\mu)$ и $\tilde{r}_-(t_1) = r_{0-}\mathrm{dn}(\nu t_1,\mu)$, где $r_{0\pm}$ – постоянные амплитуды; $\tilde{\kappa}_\pm$ – константы разделения переменных для частных решений [17]. Их временные спектры эквидистантны, они получаются из (11) и (14) при $\mu_\pm = \mu$, $\nu_+ = \nu_0 = \nu$, $m = 0$ (при этом в (14) исчезают суммы по q и r). Искажения в них также отсутствуют.

4. Заключение

В работе проведен анализ эволюции спектров полученного в [1] приближенного решений задачи адиабатического взаимодействия двух плоских кноидальных волн (информационный и управляющий сигналы) с ортогональными циркулярными поляризациями в изотропной гиротропной нелинейной среде с дисперсией групповых скоростей второго порядка. Найден дискретный эквидистантный спектр управляющего сигнала. Показано, что в общем случае спектр информационного сигнала дискретен и неэквидистантен. Он содержит бесконечное множество спектральных линий – комбинаций частотных гармоник амплитуд двух взаимодействующих кноидальных волн. Именно такой вид спектра и определяет апериодичность и постепенную «хаотизацию» приближенного аналитического решения для информационного сигнала. Если частотные гармоники амплитуд двух взаимодействующих кноидальных волн кратны, то на первой половине пространственного периода приближенного решения возникающие искажения накапливаются, а на второй – полностью компенсируются. Состояние поляризации результирующего электрического поля, состоящего из быстрого информационного и медленного управляющего сигналов, при этом также будет меняться периодически.

Проведенное обобщение алгоритма построения решений неинтегрируемых систем нелинейных уравнений Шредингера вида (1) в адиабатическом приближении [1] на большие времена взаимодействий позволяет распространить полученные выводы спектрального анализа и на другие решения этой системы.

1. Makarov V.A., Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Laser Phys*., **24**, 085405 (2014).
2. Makarov V.A., Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Laser Phys. Lett*., **11**, 115402 (2014).
3. Makarov V.A., Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Opt. Express*, **22**, 26607 (2014).
4. Макаров В.А., Петникова В.М., Руденко К.В., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **45**, 35 (2015).
5. Makarov V.A., Petnikova V.M., Rudenko K.V., Shuvalov V.V. *Phys. Wave Phenomena*, **23**, 96 (2015).
6. Давыдов А.С. *Квантовая механика* (М.: Наука, 1973).
7. Мессиа А. *Квантовая механика* (М.: Наука, 1979, т. 2).
8. Griffiths D.J. *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall Inc., 1995).
9. Berry M.V. *Quantum, Classical and Semiclassical Adiabaticity*, in *Theoretical and Applied Mechanics*. Ed. by F.I.Niordson and N. Olhoff (North-Holland: Elsevier Sci. Publ., 1985, p. 83–96).
10. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны (М.: Физматлит, 2001).
11. Коварский В.А., Перельман Н.Ф., Авербух И.Ш. *Многоквантовые процессы* (М.: Энергоатомиздат, 1985).
12. Грибов Л.А., Баранов В.И., Зеленцов Д.Ю. *Электронно-колебательные спектры многоатомных молекул. Теория и методы расчета* (М.: Наука, 1997).
13. Буренин А.В. *УФН*, **180**, 745 (2010).
14. Grishanin B.A., Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *J. Appl. Spectr*., **47**, 1309 (1987).
15. Грушанин Б.А.,, Петникова В.М., Шувалов В.В. *Вестник Моск. ун-та. Сер.Физика. Астрономия*, **29** (4), 58 (1988).
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971).
17. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике. Для научных работников и инженеров* (М.: Наука, 1974).
18. *Справочник по специальным функциям* (М.: Наука, 1979).